DYNAMIQUE D'UN MARCHE INTERTEMPOREL :
DEROULEMENT REEL ET ANTICIPATIONS

Philippe COURREGE [1]

avec la collaboration de

Jean LACROIX [2] et Pierre MATARASSO [3]

Version 0, Mars 2000

[1] CERMSEM, Université de Paris I, 106-112 Bd de l'Hôpital, 75013 - Paris.

[2] Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI, rue du Chevaleret, 75013 - Paris.

[3] CNRS, CIRED, 45 bis, Avenue de la Belle Gabrielle, Jardin Tropical, 94736 - Nogent sur Marne Cedex.

CHAPITRE 1 - **INTRODUCTION**

§ 1.1 - MOTIVATION

(A) A l'origine de ce texte se trouve la question de la signification de l'équilibre intertemporel, dans la théorie des marchés incomplets ([1a]), mais aussi dans celle de l'équilibre temporaire ([1b]). Plus précisément, (A1) la question de la relation entre l'objet mathématique "équilibre intertemporel", de ces théories, et le déroulement (temporel) réel du marché, déroulement qui est séquentiel. Par déroulement réel on entend celui qui s'inscrit dans le temps unique de l'histoire, alors que le temps des entités prospectives, des anticipations, est virtuel. Ainsi, la question posée participe de la distinction entre déroulement réel et anticipations, plus précisément de la conception selon laquelle (A2) la dynamique économique, qui engendre le déroulement réel, est gouvernée par les anticipations des acteurs décentralisés ([1c]). Il s'agit de situer l'équilibre intertemporel dans cette conception.

Formellement, l'équilibre intertemporel apparaît, au moins dans la première de ces théories, comme un multiplet (x_s, $s \in S$) de variables vectorielles x_s (dont les composantes sont les prix, les consommations, les encours) indexées par les noeuds s de l'arbre S représentant les éventualités, les aléas, externes qui conditionnent le système ([1d]), tandis que le déroulement temporel apparaît comme un multiplet ($\underline{x}(t)$, $t \in [0,T]$) de ces mêmes variables, mais indexées par les dates sucessives $t \in [0,T]$ (du temps réel ici discret) qui stratifient l'arbre S. Ce schéma suggère que (A3) ces deux objets mathématiques ne peuvent être identifiés. La question est alors de préciser les liens entre eux.

(B) L'objet de ce § 1.1 est de cerner cette question, en évoquant, dans le cadre de la conception A2 ci-dessus et en fonction de la remarque A3, quelques-uns des aspects des théories en cause où elle est sous-jacente : rôle de l'incertitude et du principe de causalité (alinéas 1.1.C,D,G), marché contingent ou au comptant (alinéa 1.1.E), rôle des anticipations (alinéa 1.1.F), contrôle macroéconomique par les instances régulatrices (alinéas 1.1.G,H).

Cela étant, comme l'indique la vue d'ensemble qui figure au § 1.2, la question 1.1.A1 n'est qu'un préalable et le propos du texte est constructif plutôt que polémique, en ce sens que, au-delà des remarques parfois critiques de ce § 1.1, il s'agit de mettre en évidence, par l'étude d'un système simple de marchés séquentiels (alinéa 1.2.B), les problèmes, non usuels en théorie de l'équilibre intertemporel, que pose la formulation mathématique d'une réponse.

(C) Dans le cas déterministe, cas où l'arbre S coïncide avec l'intervalle [0,T] des entiers, les deux multiplets peuvent être formellement identifiés et la question est voilée, mais ne disparaît pas pour autant. En effet, interpréter l'équilibre intertemporel comme représentant un déroulement réel du marché n'est pas acceptable, car (C1) cette interprétation est incompatible avec le principe de causalité ([1e]), vu (C2) la finalité, la conception téléologique, qui marque la définition de l'équilibre intertemporel, soit par l'expression des comportements des acteurs décentralisés ([1c]), via l'optimisation de leurs utilités intertemporelles, soit par les conditions normatives, en particulier finales ([1g]), qui lui sont imposées. Cet argument est essentiel (alinéas 1.1.G,H).

(D) Dans le cas non déterministe, i.e. en présence d'incertitude, la structure arborescente de l'arbre S empêche de considérer le multiplet (x_s, $s \in S$) comme un déroulement temporel, vu que, à chaque instant t, il prend en compte toutes les éventualité postérieures, alors qu'une seule d'entre elles par période se réalisera dans le déroulement réel. Ainsi, ce multiplet doit être interprété comme une entité prospective, comme un plan (1h), en termes d'anticipations des acteurs (alinéa 1.1.F). La question prend alors tout son sens : (D3) quel lien ce plan a-t-il avec le déroulement réel ($\underline{x}(t)$, $t \in [0,T]$).

(E) Dans le cas d'un marché contingent (ou complet), déterministe ou non déterministe , i.e. comportant, pour chaque agent, une seule contrainte de budget intertemporelle (1i), la signification du multiplet (x_s, $s \in S$) comme plan (alinéa 1.1.D) est avérée : la théorie du marché intertemporel n'est alors qu'un procédé de détermination d'un plan et ignore le déroulement temporel (1j). Par contre, dans le cas d'un marché au comptant (ou incomplet), i.e. comportant, pour chaque agent, une contrainte de budget par aléa, le plan que représente ce multiplet prend en compte, de par cette multiplicité de contraintes, l'aspect séquentiel du déroulement réel, mais la question reste entière, car cette prise en compte de l'aspect séquentiel du déroulement réel n'est que prospective, dans le plan et ne constitue pas une représentation de ce dernier en lui-même.

(F) Le rôle des anticipations des agents apparaît comme central dans les préliminaires des premiers écrits sur l'équilibre intertemporel, que ce soient ceux qui préfigurent la théorie des marchés incomplets (1k) ou ceux sur l'équilibre temporaire (1m). Mais, dans les premiers et la plupart des seconds, le lien entre anticipations et déroulement réel n'est pas précisé, ce dernier n'étant guère appréhendé que via l'hypothèse de rationnalité des anticipations (1n), même si l'aspect séquentiel du marché est évoqué (1p), tandis que, dans les seconds où ce lien est explicite (1q), le processus d'anticipation, ici uniquement des prix, n'est qu'un élément exogène de l'équilibre temporaire et l'insistance est mise sur l'étude locale de ce dernier ou sur celle de déroulements stationnaires, mais pas sur le déroulement réel. Dans les travaux récents sur sur les marchés incomplets, les préoccupations méthodologiques qu'exprime la question en cause sont pratiquement absentes : leurs auteurs sont essentiellement préoccupés par l'étude mathématique de l'équilibre et des mécanismes de marché correspondants (1r).

(G) L'argument d'incompatibilité avec le principe de causalité présenté à l'alinéa 1.1.C exclut qu'un équilibre intertemporel puisse être interprété comme un déroulement réel, cela, en particulier à cause des conditions normatives, qui lui sont imposées : un acteur décentralisé ne peut imposer une condition finale réelle, même si elle concerne ses propres encours. Mais, cet argument tombe évidement si l'équilibre est considéré comme une entité prospective (alinéa 1.1.D), vu que ces conditions peuvent alors être interprétées comme exprimant, pour chacun des acteurs décentralisés, un comportement prospectif, au même titre que l'optimisation de ses préférences intertemporelles. De plus, l'argument n'exclut pas que ces conditions soient envisagées pour le déroulement réel, mais elles réclament alors une autre interprétation (alinéa 1.1.H), puisque la précédente, comme comportement prospectif de l'agent, est caduque.

(H) L'interprétation des conditions normative imposées au déroulement réel du marché (alinéa 1.1.G) réclame de renoncer à l'orientation strictement microéconomique de la théorie usuelle, orientation qui réside, comme dans le modèle de Arrow-Debreu ([1s]), dans l'absence de prise en compte de l'environnement macro-économique du marché, en particulier du rôle des instances régulatrices, i.e. de l'Etat ([1u]). En effet, (H1) l'un des rôles de ces instances est de (chercher à) faire en sorte, par une politique, un contrôle, convenable du déroulement du marché, que ces conditions soient satisfaites. Ainsi, l'introduction de ce rôle de contrôle fait apparaître un lien entre la théorie du marché intertemporel et le (nouveau) domaine de la théorie du contôle qui participe de la conception 1.1.A2 : celui qui concerne le contrôle des systèmes dynamiques gouvernés par des anticipations ([1v]). C'est l'un des buts de ce texte que d'illustrer les problèmes que pose cette théorie par l'étude d'un système simple de marchés séquentiels (alinéa 1.1.B).

§ 1.2 - <u>VUE D'ENSEMBLE</u>

(A) La conception envisagée ici comme réponse à la question 1.1.A1 consiste, conformément aux indications 1.1.A2, en ce que : (A1) le déroulement réel ($\underline{x}(t)$, $t \in [0,T]$) est une trajectoire d'un système dynamique dont la fonction d'évolution, la dynamique, est gouvernée par les anticipations des acteurs décentralisés à la période courante, anticipations mises en cohérence, assemblées, sous forme d'un équilibre intertemporel à partir de cette période ([1w]). Plus précisément : (A2) le **déroulement réel** est relatif à un **chemin** ($\mathbf{s}(t)$, $t \in [0,T]$) tracé dans l'arbre S des éventualités externes ; (A3) pour chaque période $t \in]0,T]$, la **fonction d'évolution**, qui détermine $\underline{x}(t)$ à partir des $\underline{x}(t')$ pour $t' \in [0,t[$, découle d'un **mécanisme décisionnel** qui repose sur la détermination d'un **équilibre intertemporel** (x_σ, $\sigma \in [s\rangle$), avec $s = \mathbf{s}(t)$, où $[s\rangle$ est le sous-arbre de l'arbre S constitué par s et la descendance de s dans l'arbre S ; (A4) l'équilibre intertemporel (x_σ, $\sigma \in [s\rangle$), avec $s = \mathbf{s}(t)$ est constitué par l'assemblage équilibré, la **mise en cohérence**, des **anticipations des acteurs décentralisés**, il sera parfois, pour cela, appelé seulement **anticipation** en $t \in [0,T]$.

On souligne le lien A2 ci-dessus entre le temps réel et l'arbre d'incertitude S : (A5) le chemin auquel est relatif le déroulement réel est une hypothèse, une donnée, qui vient compléter celle de l'arbre S. On souligne aussi que, dans cette conception, (A6) les équilibres significatifs sont les multiplets (x_σ, $\sigma \in [s\rangle$) relatifs aux sous-arbres $[s\rangle$ ($s \in S$) et pas seulement l'équilibre global (x_s, $s \in S$) précédemment considéré (alinéa 1.1.A), lequel ne représente qu'une anticipation à la période $t = 0$.

(B) Les indications 1.2.A1-A6 ci-dessus manquent évidemment de précision formelle. Elles ont pour but de situer, à titre introductif, le schéma intertemporel de la conception envisagée, sans l'alourdir par les définitions formelles des équilibres en cause. Ces définitions seront données dans le cadre du système de marchés intertemporels, dit **de référence**, qui est étudié dans la suite : système correspondant au modèle intertemporel d'échanges purs à horizon fini, i.e. à T périodes, comportant un seul actif nominal renégocié à chaque période ([1x]). D'autres indications, encore génériques, ressortent de la suite de cette introduction.

La conception 1.2.A1-A6 affleure dans les préliminaires des écrits sur l'équilibre temporaire et des premiers écrits sur les marchés incomplets, à travers l'évocation du caractère séquentiel du marché ([1p]), mais elle n'y est pas développée formelement, dans son ensemble, bien que sa pièce maîtresse que constitue le rôle des anticipations dans la dynamique décisionnelle (propriété 1.2.A3,A4) soit à la base de la théorie - locale - de l'équilibre temporaire ([1Y]). Par ailleurs, elle s'apparente davantage à la conception keynésienne des anticipations adaptatives ([1A]) qu'aux travaux récents en théorie des marchés incomplets (alinéas 1.1.F,H).

(C) Plusieurs définitions des anticipations (x_σ, $\sigma \in [s>$), comme équilibres intertemporels, sont possibles dans le cadre de la conception 1.2.A1-A6 : définition comme équilibre temporaire ou définition comme équilibre de marché intertemporel, au sens de la théorie des marché incomplets. Le formalisme retenu, avec une indexation par les éléments du sous-arbre [s>, correspond à la deuxième définition. On verra au § X.Y que cette définition, comme équilibre de marché intertemporel, est un cas particulier de la première, le cas où la rationnalité de l'anticipation est la plus grande (alinéa X.Y.Z).

(D) La conception du déroulement réel comme trajectoire d'un système dynamique réclame de préciser, pour ce système, le lien entre sa fonction d'évolution, sa dynamique au sens fonctionnel, usuel, et le mécanisme décisionnel, basé sur des anticipations (propriétés 1.1.A3,A4). Ce lien n'est pas simple, en particulier car il peut comporter des arbitrages, des choix arbitraires, pour pallier la non-unicité des équilibres en cause. Lorsque ces derniers sont définis à partir de fonctions d'utilité des consommateurs, il est à rapprocher du théorème de Bellman (alinéa 1.2.F).

(E) Cette difficulté amène à considérer, à chaque période, une structure intermédiaire entre la fonction d'évolution et le mécanisme décisionnel, structure qui, condensant, rassemblant, les incidences des anticipations, constitue de ces dernières une expression statique, ne portant que sur la période courante, mais suffisante pour déterminer la fonction d'évolution. Une telle structure intermédiaire sera appelée **transitoir**, à la période en cause ([1B]).

Par exemple, dans le cas du système de référence (alinéa 1.2.B), cette structure est constituée, pour chaque période et chaque consommateur, par une fonction d'utilité portant, en plus des consommations, sur l'encours et par une borne inf. de ce dernier (i.e. d'une borne sup. d'endettement), ces deux composants suffisant à résumer l'incidence des anticipations.

(F) A chaque transitoir est associée une notion d'**équilibre**, dit **transitoire**, qui ne retient de l'équilibre intertemporel en cause que les variables relatives à la période courante. Ainsi, la détermination des variables décisionnelles qui déterminent le déroulement réel, i.e. l'état du système à la période suivante, peut consister seulement en la détermination de l'équilibre transitoire, ce qui est un problème statique, ne portant que sur la période courante.

Cette démarche, de réduction de la détermination intertemporelle d'une trajectoire à une suite de problèmes statiques, aux périodes successives, est à la base du théorème de Bellman, les structures en cause étant alors les fonctions objectif de Bellman ([1C]). Elle est aussi importante dans la théorie des décisions individuelles sur laquelle s'appuie la théorie de l'équilibre temporaire ([1D]).

(G) L'exposé qui suit va essentiellement consister à préciser la conception précédente et les difficultés qu'elle soulève par l'étude du système de référence (alinéa 1.2.B), cela en visant l'enchainement des concepts, via leurs propriétés préliminaires, et l'énoncé des problèmes qu'ils posent, plutôt que la démonstration de résultats mathématiquement difficiles. Pour cette étude, les structures et équilibres, intertemporels et transitoires, seront systématiquement envisagés, en eux mêmes et dans leurs liens, à partir des deux approches des consommateurs, l'approche en termes de fonctions d'utilité et celle en termes de fonctions de demande, avec une insistance particulière sur le lien entre fonctions de demande transitoires et fonctions de demande usuelles. Ces divers liens seront illustrés par le traitement du cas particulier, du système de référence, dans lequel les fonctions d'utilités des consommateurs sont du type Cobb-Douglas, cas où toutes les structures et tous les équilibres en cause peuvent être entièrement explicités.

(H) Voici quelques uns des problèmes posés : (H1) existence de l'équilibre intertemporel, relativement au système de référence par exemple à deux périodes, lorsque les encours initiaux et les encours finaux des divers consommateurs, sont donnés, quelconques, au lieu d'être nuls comme il est usuel en théorie des marchés incomplets ([1E]) ; (H2) dans ce cas, étude de la normalisation des prix, la normalisation usuelle (par appartenance au simplexe) ne convenant plus, puisque l'unité de valeur est fixée par la montant des encours initiaux ([1F]) ; (H3) plus généralement, étude de la variété des équilibres ; (H4) existence de l'équilibre, pour un modèle statique, d'échanges purs, standard sauf en ce que certaines dotations peuvent être (strictement) négatives.

(I) La prise en compte de l'environnement macroéconomique (alinéa 1.1.H) va occuper une place importante dans le texte. Elle conduit à la considération de transitoirs dépendant de paramètres de contrôle par les instances de régulation, paramètres dont la détermination systématique, en fonction des conditions normatives, via des simulations sous contraintes, pose des problèmes à optimisation multiples ([1G]). Dans le cas du système de référence, les paramètres de contrôle envisagés sont, sans exclusive, les bornes d'endettement, soit réelles, à la période courante, soit virtuelles, à la période finale d'anticipation.

+ ch2-1b2e ch2-1a2c au 11/4/00, 20h

CHAPITRE 2 - EQUILIBRE INTERTEMPOREL ET DEPLOIEMENTS D'EQUILIBRES TRANSITOIRES

Le propos de ce chapitre est de préciser formellement la question qui motive le texte (§ 1.1) et l'aspect global de la réponse envisagée (§ 1.2), i.e. la différence entre les objets mathématiques (x_s, $s \in S$) et ($\underline{x}(t)$, $t \in [0,T]$) formalisant respectivement l'équilibre intertemporel et le déroulement réel (alinéa 1.1.A). On présente d'abord le modèle du système simple de marchés intertemporels qui va servir de référence (alinéa 1.2.B) : données de base (§ 2.1), plans viables (§ 2.2), équilibre intertemporel (§ 2.3), cheminements (§ 2.4). Dans le cadre formel ainsi introduit, on reprend (§ 2.5) la problématique, de la question 1.1.A1, qui est présentée de façon non formelle au § 1.1. On reprend ensuite les éléments globaux de la conception du déroulement réel qui est présentée au § 1.2 : transitoirs et équilibres transitoires (§ 2.6) ; déploiements d'équilibres transitoires et déroulement réel (§ 2.7). Enfin, on énonce (§ 2.8) et on discute (§ 2.9) la propriété de récursion, variante du théorème de Bellman qui relie équilibres intertemporels et déploiements d'équilibres transitoires.

§ 2.1 - DONNEES DE BASE

(A) Le système considéré de marchés intertemporels au comptant correspond à une économie d'échanges purs, intertemporelle à horizon et incertitude finis, comportant la possibilité de transferts de valeur entre périodes via un unique actif nominal renégocié à chaque période (1x). Le modèle correspondant est standard, au moins dans ses aspects principaux, et parmi les plus simples en théorie des marchés incomplets. Sa définition est cependant reprise ci-après, aux § 2.1 à 2.3, afin, d'une part d'adapter le formalisme et la terminologie à ses aspects non standards, d'autre part de rendre l'exposé accessible à des lecteurs non spécialistes de la théorie des marchés incomplets (+c).

(B) Le déroulement temporel et l'environnement externe du système envisagé sont pris en compte, dans leur incertitude, **de façon discrète** et en **horizon fini**. Pour cela, on désigne par **T** = [0,T], avec T entier > 0, l'intervalle des entiers dont les éléments $t \in \mathbf{T}$ représentent les **dates**, du temps réel (alinéa 2.5.E), qui encadrent les **périodes élémentaires** (+a), et par S l'ensemble (fini) dont les éléments $s \in S$ représentent les **éventualités** ou **aléas** externes qui conditionnent le système, la structure ordonnée de ces événements étant donnée comme un **arbre** sur l'ensemble S (dont S est l'ensemble des noeuds) qui est **stratifié** par **T** (+b). Cet arbre constitue la **donnée de situation** du modèle considéré (+m).

Le **cas déterministe** est celui où l'arbre S coïncide avec l'intervalle temporel **T** muni de son ordre (total) naturel.

(C) Pour chaque $t \in \mathbf{T}$, on désigne par S_t le sous-ensemble, supposé non vide, de S formé des aléas $s \in S$ ayant lieu à, relatifs à, la date t. Ainsi : (C1) on a $S_0 = \{s°\}$, en désignant par s° la racine de l'arbre ; (C2) les ensembles S_t ($t \in \mathbf{T}$) forment une partition de S ; (C3) pour chaque $s \in S$, on désigne par $\underline{t}_s$ l'unique $t \in \mathbf{T}$ tel que $s \in S_t$.

Si $s \in S \backslash S_T$, on désigne par s+ l'ensemble des descendants directs de s et par s* la réunion $\{s\} \cup s+$. Si $s \in S \backslash S_0$, on désigne par s- l'unique élément de S qui pré cède immédiatement s, i.e. tel que (C4) $s \in (s-)+$. Ainsi, (C5) si $s \in S_t$, avec $t > 0$, on a $s- \in S_{t-1}$, i.e. $\underline{t}_{s-} = \underline{t}_s - 1$.

(D) Un **chemin** (d'événements, pour la relation de l'arbre) est (identifié à) une suite (finie) $\mathbf{s} = (\mathbf{s}(t),\ t \in T)$ d'éléments de S telle que,

(2.1) pour tout $t \in \mathbf{T}$, (a) $\mathbf{s}(t) \in S_t$ et (b) $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}(t+1)-$, si $t < T$.

On désigne par **S** l'ensemble des chemins et, pour chaque $s \in S$, par $\mathbf{S}_s$ le sous-ensemble de **S** formé des chemins $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ passant par s en ce sens que $\mathbf{s}(\underline{t}_s) = s$. De plus, pour chaque chemin $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$, on désigne par $[\mathbf{s}]$ le sous-arbre $\{\mathbf{s}(t) \mid t \in T\}$ de S.

Un chemin représente une hypothèse de scénario de l'environnement externe du système considéré. En particulier, le déroulement réel va être relatif à un chemin (alinéa 2.5.E).

(E) L'**appareil nominatif** (S, H, I) du modèle est constitué de l'arbre S (alinéa 2.1.B) et de deux **nomenclatures** : celle des **biens**, notée H, et celle des **consommateurs**, notée I. Ces nomenclatures, ensembles finis non vides d'indexation, sont supposées fixes dans le temps et indépendantes des aléas.

(F) Le modèle comporte, outre l'appareil nominatif (S, H, I), deux types de données : les données de base, qui sont fixes et définissent une réalisation du modèle ; les données auxiliaires, circonstancielles ou normatives, qui peuvent varier selon les exercices et même donner lieu à déterminations (alinéa 2.X.Y). Un **jeu de données de base** est un multiplet (+n),

(2.2) $\Delta = (X^i,\ \omega^i,\ J^i,\ i \in I)$,

dont les termes composants sont eux-même des multiplets, $X^i = (X^i_s,\ s \in S)$, $\omega^i = (\omega^i_s,\ s \in S)$, $J^i = (J^i_s,\ s \in S)$, indexés par les aléas $s \in S$, de sorte que :

(2.3) pour chaque $i \in I$ et chaque $s \in S$,

(a) X^i_s, l'**ensemble de consommation** du consommateur i en s, est un sous-ensemble du cône $\mathbf{R}^H_+$,

(b) $\omega^i_s = (\omega^i_{s,h},\ h \in H)$, le multiplet des **dotations** du consommateur i en s, est un élément du cône $\mathbf{R}^H_+$,

(c) J^i_s, la **fonction d'utilité locale** du consommateur i en s, est une fonction numérique, éventuellement à valeurs dans $[-\infty,+\infty[$, sur l'ensemble de consommation X^i_s.

Les éléments $x = (x_h,\ h \in H)$ de l'ensemble de consommation X^i_s représentent les multiplets (plans) possibles de consommations x_h des divers biens $h \in H$, par le consommateur i en l'éventualité s. Chaque composante $\omega^i_{s,h} \in \mathbf{R}_+$ du multiplet de dotations ω^i_s représente, pour le consommateur i, une quantité, du bien h, dont il dispose en s. La fonction d'utilité locale J^i_s exprime les préférences du consommateur i en s.

Le jeu de données de base Δ est fixe : tous les termes du modèle envisagés dans la suite (ensembles de budget, plans, équilibres, etc.) sont relatifs à ce jeu. Les données auxiliaires sont des modalités ou des bornes des variables. Elles seront précisées après l'introduction de ces dernières (alinéa 2.2.B).

(G) Pour chaques $i \in I$, $s \in S$, $e \in \mathbf{R}$, $d \in [-\infty,+\infty[$, $p = (p_h,\ h \in H)$ élément de $\mathbf{R}^H_+$, on désigne par $B^i_s(e, d, p)$ le sous-ensemble de l'ensemble produit $X^i_s \times \mathbf{R}$ formé des couples (x, z), avec $x = (x_h,\ h \in H)$, tels que, ch2-1a2c

(2.4) (a) $x \in X^i_s$, (b) $z \ge d$, (c) $\sum_{h \in H} p_h x_h + z \le \sum_{h \in H} p_h \omega^i_{s,h} + e$.

L'ensemble $B^i_s(e, d, p)$, la relation (2.4c), la relation 2.4b sont (appelés) respectivement l'**ensemble de budget**, la **contrainte de budget**, la **contrainte d'endettement**, du consommateur i en s, relativement à l'**encours** e, à la **borne d'endettement** d et au **vecteur de prix** p. Si $(x, z) \in B^i_s(e, d, p)$, le vecteur x et le nombre z représentent respectivement un **plan de consommation** et un (montant d') **engagement** (**financier**), possibles pour le consommateur i en s, relativement à ces données e, d, p. L'encours e et l'engagement z sont interprétés conformément aux conventions : (G1) $e > 0$ signifie un encours de créances et $e < 0$ un encours de dettes ; (G2) $z > 0$ signifie un prêt et $z < 0$ un emprunt ; (G3) prêts et emprunts sont sans intérêt (alinéa 2.2.E).

La contrainte de budget (2.4c) exprime un impératif comptable : le montant total des dépenses de consommation (premier terme dans le membre de gauche) ne doit pas excéder la somme entre les recettes dues aux dotations (permier terme dans le membre de droite) et le solde e - z entre l'encours initial et l'engagement, conformément aux conventions de signe G1 et G2 ci-dessus. La contrainte d'endettement exprime, conformément à la convention G2, une limitation de l'endettement contracté par le consommateur i en s. Elle est tautologique si $d = -\infty$.

§ 2.2 - PLANS VIABLES

(A) On introduit, dans ce §, les variables du modèle en les faisant apparaître comme les composantes des multiplets appelés "plans". Ces derniers sont d'abord envisagés ici formellement, indépendamment de leur interprétation/ comme entités /9 prospectives (alinéa 1.1.D), laquelle est reprise au § 2.5 (alinéa 2.5.C) après la définition des plans d'équilibre.

Un **plan** est un multiplet,

(2.5) $\Pi = (\mathbf{p}_\bullet, (\mathbf{x}^i_\bullet, \mathbf{z}^i_\bullet, i \in I))$,

dont les composants $\mathbf{p}_\bullet = (p_s, s \in S)$, $\mathbf{x}^i_\bullet = (x^i_s, s \in S)$, $\mathbf{z}^i_\bullet = (z^i_s, s \in S)$ $(i \in I)$ sont eux mêmes des multiplets de telle sorte que, pour chaque $s \in S$: d'une part,

(2.6) $p_s = (p_{s,h}, h \in H)$ appartient à $\mathbf{R}^H_+$; d'autre part, pour chaque $i \in I$,

(2.7) (a) $x^i_s = (x^i_{s,h}, h \in H)$ appartient à X^i_s,

(b) $z^i_s \in \mathbf{R}$.

Pour mettre en évidence l'indexation par les éventualités $s \in S$, le plan Π, de la forme (2.5)-(2.7), peut aussi être écrit sous la forme,

(2.8) $\Pi = (p_s, (x^i_s, z^i_s, i \in I), s \in S)$.

Dans le plan Π, d'une part $p_{s,h}$ représente le **prix** du bien h en l'éventualité s, d'autre part, $x^i_{s,h}$ représente la **consommation** en bien h du consommateur $i \in I$ en s, enfin, le nombre z^i_s représente (le montant de) l'**engagement** (**financier**) du consommateur i en s, conformément à la convention de signe 2.1.G2. Les termes $p_{s,h}$, $x^i_{s,h}$, z^i_s $(s \in S, i \in I, h \in H)$ sont les **variables scalaires** du modèle.

(B) Un **jeu de données auxiliaires** est un multiplet,

(2.9) $\boldsymbol{\Sigma} = (e^i, d^i_\bullet, i \in I)$, tel que :

(2.10) pour chaque $i \in I$,

(a) $e^i \in \mathbf{R}$,

(b) $d^i_\bullet = (d^i_s,\ s \in S)$, avec (b1) $d^i_s \in [-\infty, +\infty[$, pour chaque $s \in S$.

(2.11) (a) $\sum_{i \in I} e^i = 0$, (b) pour tout $s \in S$, $\sum_{i \in I} d^i_s \leq 0$.

Le nombre e^i représente l'**encours initial**, à la période initiale t = 0, du consommateur i, conformément à la convention de signe 2.1.G1. Le nombre d^i_s représente une **borne inférieure** de l'engagement du consommateur i en l'éventualité s. Les conditions (2.11) sont requises par les contraintes de viabilité (alinéa 2.2.C). Les données e^i ($i \in I$) sont circonstancielles ; les données d^i_s ($i \in I$, $s \in S$), qui seront aussi appelées **bornes d'endettement**, sont plutôt normatives, mais peuvent être aussi circonstancielles (alinéa 2.5.D).

(C) Un plan Π, de la forme (2.8), est dit **viable** (+1), relativement au jeu de données circonstancielles $\mathbf{\Sigma}$, s'il vérifie les **contraintes de viabilité** (2.12) et (2.13) :

(2.12) pour tout $s \in S$ et tout $i \in I$,

(a) $(\mathbf{x}^i_s,\ \mathbf{z}^i_s) \in B^i_s(e^i_s,\ d^i_s,\ \mathbf{p}_s)$, où $\mathbf{e}^i_s$ est défini par,

(b) $\mathbf{e}^i_s = e^i$, si $s = s°$, (c) $\mathbf{e}^i_s = \mathbf{z}^i_{s-}$, si $s \neq s°$;

(2.13) pour tout $s \in S$, (a) $\sum_{i \in I} \mathbf{x}^i_s \leq \sum_{i \in I} \omega^i_s$ (inégalité dans $\mathbf{R}^H$),

(b) $\sum_{i \in I} \mathbf{z}^i_s = 0$.

Les variables dérivées e^i_s ($i \in I$, $s \in S$), définies par les relations (2.12b,c) sont appelées **variables d'encours** : $\mathbf{e}^i_s$ représente l'encours du consommateur i en l'éventualité s, plus précisément avant les transactions en s. Ces variable d'encours sont les **variables d'état** du modèle considéré (+d).

Les relations (2.12a-c) conjuguent les contraintes de budget et d'endettement du consommateur i en s (alinéa 2.1.G). La relation (2.13a) expriment la conservation des biens dans les transactions en s, i.e. expriment que les seuls apports de biens sont le fait des dotations. La relation (2.13b) exprime la conservation de la monnaie, de la masse monétaire, en ce sens que tout emprunt d'un consommateur a pour contrepartie un prêt d'un autre et réciproquement, l'unité monétaire étant fixe dans le temps.

(D) On souligne le **caractère récursif**, de la définition précédente des plans viables, i.e. des contraintes de viabilité : en chaque éventualité $s \in S$, la vérification des contraintes (2.12) et (2.13) par les variables locales en s, i.e. $\mathbf{p}_s$, $\mathbf{x}^i_s$, $\mathbf{z}^i_s$ ($i \in I$), ne dépend que des variables locales en s-, en l'occurrence que des variables $\mathbf{z}^i_{s-}$.

Toutefois, le système de ces contraintes, en chaque éventualité s, est en général beaucoup trop sous-déterminé pour permettre une détermination univoque, à des arbitrages limités près, des variables en s en fonction des variables s-, détermination qui serait ainsi récursive. L'objet du modèle est d'étudier, relativement à divers jeux de données auxiliaires, divers procédés - récursifs ou non récursifs - permettant de déterminer des plans viables en levant cette in-

 suite dans ch2-1b2e

détermination. Dans ce sens, on commence par présenter, au § 2.3, le procédé - non récursfif - qui correspond à la définition les équilibres intertemporels. On envisage ensuite ceux - récursifs - qui reposent sur les transitoirs (§ 2.6).

(E) A propos de la définition précédente des plans viables (alinéa 2.2.C), on souligne le caractère très simplifiée du modèle considéré en ce qui concerne la structure financière, puisqu'il ne prend en compte, via les variables d'encours, que des transferts de valeur, d'une période à la suivante, consistant en des prêts et emprunts sans intérêt (convention 2.1.G3). Cette simplification a été retenue pour éviter que le propos principal de l'exposé - qui est de répondre à la question 1.1.A1 en insistant sur le rôle des instances régulatrices du marché (alinéas 1.1.H et 1.2.I) - ne soit obscurci par la prise en compte de la complexité des mécanismes financiers, complexité qui, par contre, remplit la théorie des marchés incomplets. Cette prise en compte constitue l'une des extensions possibles du modèle présenté (alinéas X.Y.N ...).

§ 2.3 - EQUILIBRES INTERTEMPORELS

(A) Parmi les procédés qui permettent la détermination de plans viables par un renforcement des contraintes de viabilité (alinéa 2.2.D), celui qui correspond aux équilibres intertemporels repose sur la considération de fonctions d'utilité intertemporelles pour les consommateurs, donc aussi d'ensembles de consommation et de budget intertemporels. On commence par définir ces termes à partir du jeu de données de base.

Pour chaque $i \in I$, l'**ensemble de consommation intertemporel** $\vec{X}^i$ du consommateur i est l'ensemble produit $\prod_{s \in S} X^i_s$. Un élément générique de cet ensemble est ainsi un multiplet $x_\bullet = (x_s,\ s \in S)$, tel que, pour tout $s \in S$, $x_s \in X^i_s$, ce qui fait que x_s est lui même un multiplet, un vecteur, $(x_{s,h},\ h \in H)$ élément de $\mathbf{R}^H_+$.

Pour chaques $i \in I$, $e \in \mathbf{R}$, $d_\bullet = (d_s,\ s \in S)$ élément de $[-\infty, +\infty[^S$, $p_\bullet = (p_s,\ s \in S)$ élément de $(\mathbf{R}^H_+)^S$, on désigne par $\vec{B}^i(e,\ d_\bullet,\ p_\bullet)$ l'**ensemble de budget intertemporel** du consommateur i, relativement aux données intertemporelles e, $d_\bullet$, $p_\bullet$, i.e. le sous ensemble de l'espace produit $\vec{X}^i \times \mathbf{R}^S$ formé des couples $(x_\bullet,\ z_\bullet)$, avec $x_\bullet = (x_s,\ s \in S)$ et $z_\bullet = (z_s,\ s \in S)$, tels que,

(2.14) pour tout $s \in S$,

(a) $(x_s,\ z_s) \in B^i_s(e_s,\ d_s,\ p_s)$, où e_s est défini par,

(b) $e_s = e$, si $s = s°$, (c) $e_s = z_{s-}$, si $s \neq s°$.

Enfin, pour chaque $i \in I$, on désigne par $\vec{J}^i$ la **fonction d'utilité intertemporelle** du consommateur i, i.e. la fonction numérique, éventuellement à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$, définie sur l'ensemble de consommation intertemporel $\vec{X}^i$ par :

(2.15) (a) $\vec{J}^i(x_\bullet) = \sum_{s \in S} J^i_s(x_s)$, pour tout élément $x_\bullet = (x_s,\ s \in S)$ de $\vec{X}_i$.

(B) Cela étant, un **équilibre (intertemporel)**, relativement au jeu de données auxiliaires Σ, est un plan Π, de la forme (2.8), **viable** et tel que,

(2.16) pour tout $i \in I$,

(a) $\vec{J}^i(x_\bullet) \leq \vec{J}^i(x^i_\bullet)$,

pour tout $(x_\bullet,\ z_\bullet)$ tel que, (a1) $(x_\bullet,\ z_\bullet) \in \vec{B}^i(e^i,\ d^i_\bullet,\ p_\bullet)$, cette relation étant à compléter par la relation (2.17) qui résulte des contraintes de viabilité (2.12),

(2.17) pour tout $i \in I$, (a) $(\mathbf{x}^i_\bullet, \mathbf{z}^i_\bullet) \in \bar{B}^i(e^i, d^i_\bullet, \mathbf{p}_\bullet)$.

Le concept d'équillibre ainsi introduit est formellement identique à celui qui est usuel en théorie des marchés incomplets, cela à une nuance et à une systématisation des conditions opérationnelles près. La nuance réside en ce que l'équilibre physique (2.13a) est écrit ici avec inégalité plutôt qu'égalité (+e). La systématisation des conditions opérationnelles consiste en l'introduction des données auxiliaires qui constituent le jeu $\mathbf{\Sigma}$: d'une part, via la condition initiale (2.14b), introduction d'encours initiaux e^i quelconques, alors qu'ils sont usuellement nuls (+f), d'autre part, via les contraintes d'endettement (2.4b), introduction de bornes d'endettement d^i_s a priori quelconques, alors qu'elles sont usuellement, soit absentes, pour $s \notin S_T$ (+g), soit nulles, pour $s \in S_T$ (+h).

(C) La principale différence, par rapport à l'approche usuelle, est de type méthodologique et concerne l'ordonnancement des diverses contraintes. Elle apparaît dans la démarche de présentation consistant en ce que les contraintes d'équilibre physique ou financier (2.13) sont introduites ici avec le concept préalable, non usuel, de plan viable (§ 2.2), alors qu'elles sont, dans la démarche usuelle, associées aux contraintes d'optimisation (2.16) pour la définition de l'équilibre (+j). Ce concept va jouer le rôle important de charnière, de point de bifurcation, entre l'approche usuelle de l'équilibre intertemporel et l'approche du déroulement réel proposée ici. Il permet, en particulier, de mettre en évidence le caractère intertemporel, non récursif, de la définition du premier, par opposition à celle d'un plan viable (alinéa 2.2.D) : un plan d'équilibre $(\mathbf{x}^i_\bullet, \mathbf{z}^i_\bullet)$ du consommateur i maximise l'utilité intertemporelle $\bar{J}^i(x_\bullet)$ parmi tous les plans $(x_\bullet, z_\bullet)$, de ce consommateur, viables, i.e. vérifiant la contrainte de budget intertemporelle (2.16a1).

(D) Une autre différence, par rapport à l'approche usuelle, réside dans l'hypothèse selon laquelle, outre que les préférences intertemporelles des consommateurs sont associées à des fonctions objectif intertemporelles $\bar{J}^i$, ces dernières sont supposées séparable, i.e. définies sous la forme (2.15) à partir des fonctions objectif locales J^i_s, qui sont ainsi considérées comme données de base. Cette hypothèse ne résulte pas seulement du souci de simplification du modèle (alinéas 2.1.A et 2.2.E), mais va jouer un rôle important dans l'étude des procédés récursifs de détermination des plans viables (alinéas 2.2.D), procédés où ce sont les fonctions objectif locales qui interviennent (alinéa X.Y.N). Par contre, elle ne joue aucun rôle dans la définition donnée de l'équilibre intertemporel (alinéa 2.3.B), définition où les fonctions $\bar{J}^i$ pourraient être des données de base.

§ 2.4 - CHEMINEMENTS

(A) Après les plans et équilibres intertemporels (§ 2.2 et 2.3), on introduit formellement, dans ce §, le type d'objet mathématique, appelé cheminement, dont participe le déroulement réel $(\underline{x}(t), t \in [0,T])$ (alinéa 1.1.A). L'approche est encore ici formelle. Les interprétations font l'objet du § 2.5.

(B) Etant donné un chemin $\mathbf{s} = (\mathbf{s}(t), t \in T)$, un **cheminement** sur ce chemin, est un multiplet, (2.18) $\Xi = (\hat{p}(t), (\hat{x}^i(t), \hat{z}^i(t), i\in I)), t\in \mathbf{T})$,

dont les composants $\hat{p}(t)$, $\hat{x}^i(t)$, $\hat{z}^i(t)$ $(i\in I, t\in \mathbf{T})$ sont eux mêmes des multiplets de telle sorte que, pour chaque $t\in\mathbf{T}$: d'une part,

(2.19) $\hat{p}(t) = (\hat{p}_h(t), h\in H)$ appartient à $\mathbf{R}_+^H$;

d'autre part, pour chaque $i\in I$,

(2.20) (a) $\hat{x}^i(t) = (\hat{x}_h^i(t), h\in H)$ appartient à $X^i_{\mathbf{s}(t)}$,

(b) $\hat{z}^i(t) \in \mathbf{R}$.

(C) Un cheminement Ξ, de la forme (2.18), sur le chemin $\mathbf{s}$, est dit **viable**, relativement au jeu de données auxiliaires $\boldsymbol{\Sigma}$, s'il vérifie les **contraintes de viabilité** (2.21) et (2.22) :

(2.21) pour tout $t\in\mathbf{T}$ et tout $i\in I$,

(a) $(\hat{x}^i(t), \hat{z}^i(t)) \in B^i_{\mathbf{s}(t)}(\hat{e}^i(t), d^i_{\mathbf{s}(t)}, \hat{p}^i(t))$, où $\hat{e}^i(t)$ est défini par,

(b) $\hat{e}^i(t) = e^i$, si $t = 0$, (c) $\hat{e}^i(t) = \hat{z}^i(t-1)$, si $t > 0$;

(2.22) pour tout $t\in\mathbf{T}$, (a) $\sum_{i\in I} \hat{x}^i(t) \le \sum_{i\in I} \omega^i_{\mathbf{s}(t)}$ (inégalité dans $\mathbf{R}^H$),

(b) $\sum_{i\in I} \hat{z}^i(t) = 0$.

(D) Formellement, (D1) un cheminement (resp. un cheminement viable), sur le chemin $\mathbf{s}$, n'est qu'un plan (resp. un plan viable) relativement au sous-arbre $[\mathbf{s}]$, de S, associé au chemin $\mathbf{s}$. Cela résulte immédiatement de la comparaison des définitions (2.18)-(2.20) et (2.21)-(2.22) ci-dessus des cheminements avec celles correspondantes (2.5)-(2.7) et (2.12)-(2.13) des plans. De plus, (D2) dans le cas déterministe (alinéa 2.1.B), plans et cheminements coïncident.

Inversement, (D3) étant donné un plan Π, de la forme (2.8), et un chemin $\mathbf{s}$, on définit un cheminement Ξ, de la forme (2.18), sur ce chemin en posant,

(2.23) pour tout $t\in\mathbf{T}$,

(a) $\hat{p}(t) = \mathbf{p}_{\mathbf{s}(t)}$, (b) $\hat{x}^i(t) = \mathbf{x}_{\mathbf{s}(t)}$, (c) $\hat{z}^i(t) = \mathbf{z}_{\mathbf{s}(t)}$.

Ce cheminement est noté $\Pi[\mathbf{s}]$ et dit **induit** par le plan Π sur le chemin $\mathbf{s}$. Il est viable s'il en est ainsi du plan Π.

(E) Les liens formels ci-dessus entre plans et cheminements ne doivent pas faire illusion : ils cachent la profonde différence de signification entre eux qui est à l'origine de ce texte (§ 1.1 et 2.5). C'est pourquoi les définitions relatives aux cheminements sont explicitées ci-dessus de façon autonome, malgré la propriété D1.

§ 2.5 - PROBLEMATIQUE ET INTERPRETATIONS

(A) A partir des définitions formelles des plans, plans viables, équilibres, et cheminements (§ 2.2 à 2.4), on reprend ici l'analyse de leurs interprétations et différences commençée de façon non formelle dans l'introduction (alinéas 1.1.C-E,G,H). Pour cela, on commence par préciser le **contexte macroéconomique** du modèle.

(B) Le système de marchés intertemporels en cause (alinéa 2.1.A) est envisagé dans une perspective macroéconomique d'**économie régulée**, en distinguant, parmi les composants superstructurels, d'une part les **comportements spontanés**, en particulier d'**anticipation**, des **acteurs décentralisés** du marché que sont les consommateurs, d'autre part les interventions des **instances régulatrices** qui disposent d'**instruments de politique publique** susceptibles d'agir sur les comportements des acteurs décentralisés ($^{+i}$).

(C) Dans ce contexte, un plan, en tant qu'objet mathématique, terme du modèle, est interprété comme une anticipation, une entité prospective globale, macroéconomique, qui est le fait des instances régulatrices et non des acteurs décentralisés. Dans le cadre de cette interprétation d'un équilibre comme anticipation des instances régulatrices, l'argument d'incompatibilité, de l'optimisation intertemporelle (2.16) ou des conditions normatives (2.4b) via (2.12a) (alinéa 2.5.D), avec le principe de causalité (alinéa 1.1.C) tombe, puisque cette optimisation ou ces conditions, étant considérées dans une anticipation, sont seulement d'ordre prospectif. Cependant, la question 1.1.A1 n'en subsiste pas moins : quel est le lien de cet objet mathématique "équilibre intertemporel" avec le déroulement réel ? Les développement qui suivent dans ce chapitre et ceux du chapitre 3 visent à préciser formellement la réponse esquissée à l'alinéa 1.2.A, en commençant par la conception du déroulement réel (alinéa 2.5.E).

(D) Dans le cadre du modèle considéré, le premier exemple d'instrument de politique publique (alinéa 2.5.B ci-dessus) est fourni par les bornes d'endettement d^i_s ($i \in I$, $s \in S$), au moins par certaines d'entre elles, qui sont alors qualifiées de "normatives" (alinéa 2.2.B). Cependant, ces bornes ne sont pas les seuls exemples d'instruments de politique publique, dans le cadre restreint du modèle considéré, et ne sont même que des exemples primaires de tels instruments : ainsi que l'indique le qualificatif de "normatives", ces bornes vont apparaître comme des objectifs, de la politique publique, à atteindre par des moyens détournés plutôt que comme des contraintes directes (alinéa 3.X.Y). Par ailleurs, certaines de ces bornes peuvent aussi être considérées comme circonstancielles, i.e. comme exprimant un comportement spontané des consommateurs face aux aléas, au même titre que les fonctions d'utilité locales J^i_s. Dans le même sens, mais de façon plus indirecte, de telles bornes vont constituer un composant des transitoirs (alinéa 2.6.N).

(E) Un cheminement sur le chemin $\mathbf{s}$ représente, décrit, une **évolution**, du système de marchés considéré, conditionnellement à l'occurrence de ce chemin : évolution dans le temps réel, temps de l'histoire (alinéa 1.1.A), dont les dates successives sont représentées, de façon discrète, par les entiers $t \in \mathbf{T}$, au demeurant le seul temps pris en compte par le modèle.

Cela étant, le **déroulement réel** du système de marché va être représenté, décrit, par un couple ($\mathbf{s}$, Ξ), où $\mathbf{s}$ est un chemin et Ξ un cheminement sur ce chemin. Ainsi, l'inférence, dans le cadre du modèle, du déroulement réel comporte, réclame, d'abord celle du chemin $\mathbf{s}$, puis celle du cheminement Ξ sur ce chemin. Le chemin $\mathbf{s}$ étant en général exogène, la **problématique** du modèle en cause, va consister à (E1) expliciter une démarche permettant la **détermination récursive**, à partir d'un chemin $\mathbf{s}$ et d'un jeu de données auxiliaires $\boldsymbol{\Sigma}$, d'un cheminement Ξ, sur ce chemin, viable relativement à ce jeu, de telle sorte que le couple ($\mathbf{s}$, Ξ)

ch2-162e

représente le déroulement réel qui est inféré par le modèle, i.e. qui est proposé comme résultat raisonnable de son exploitation prospective.

La problématique E1 ci-dessus constitue la base méthodologique de la réponse envisagée à la question 1.1.A1. Le reste de l'exposé va consister à développer formellement la conception 1.2.A1-A6 (alinéa 1.2.A) qui constitue le corps de la réponse.

(F) Dans ce sens, la première étape consiste à envisager, pour s'en démarquer, la **démarche téléologique**, qui consiste à proposer, comme inférence du déroulement réel, le couple (**s**, Π[**s**]), où Π est un équilibre intertemporel relativement au jeu de données auxiliaires $\boldsymbol{\Sigma}$: (F1) sous cette forme, i.e. sans autre justification, cette démarche est incompatible avec le principe de causalité, à cause de la finalité, du caractère non récursif, qui marque la définition de l'équilibre intertemporel (alinéas 1.1.C et 2.3.C). La restriction "sans autre justification" mise dans l'assertion F1 ci-dessus signifie que le cheminement Π[**s**] réclame une justification (supplémentaire) pour pouvoir être considéré comme une inférence raisonnable du déroulement réel. On appelera "**question téléologique**" le paradigme conceptuel concernant cette justification ($^{+k}$). Une réponse - positive - partielle à cette question est fournie par l'application du théorème de Bellman qui figure au § 2.8.

NOTES

1a [1.1.A] Par ex., [F1], [A1], [C1], [C2].

1b [1.1.A] Par ex., [D1], [D1], [E1], [C3].

1c [1.1.A, 1.1.C] Dans le modèle usuel d'échange pur, les acteurs décentralisés sont les consommateurs. Le qualificatif "décentralisés" est mis pour les distinguer des autres acteurs que sont les instances régulatrices (alinéa 1.1.H).

1d [1.1.A] Par ex., [C1], p. 92.

1e [1.1.C] Par principe de causalité, on entend ici, au risque d'être un peu schématique, la conception selon laquelle il n'existe pas de causalité en sens inverse du temps, i.e. selon laquelle c'est le passé et le présent qui conditionnent l'avenir et non l'inverse. Il est appelé aussi principe de raison suffisante (par ex., [E3], p. 133, 136, 155, 187) ou principe d'objectivité (par ex., [F2], p. 32). Ce principe peut aussi être évoqué à propos de la remarque 1.1.A3, pour marquer la différence de rôle dans la représentation entre déroulement réel et entités prospectives.

1g [1.1.C] Ces conditions consistent, en général, à supposer que les encours sont nuls à la période finale t = T. Par ex., [C1], bas de p. 92.

1h [1.1.D] Le terme "plan" est courant dans les écrits sur l'équilibre intertemporel (par ex., [B1], p. 36, [G2], p. 289-90, 294, 296, [G3], p. 955, [C1], p. 93), mais y est appliqué seulement aux acteurs décentralisés, alors qu'on l'applique aussi ici aux instances régulatrices (alinéa 1.1.H).

1i [1.1.E] Il s'agit alors du modèle de Arrow-Debreu ; par ex., [F1], p. 1528-9.

1j [1.1.E] Cette formulation un peu brutale ne fait que traduire l'hypothèse selon laquelle, dans le modèle de Arrow-Debreu, tous règlements (payements) ont lieu au début du processus en cause (par ex., [G1], p. 31 et 34, et [F1], p. 1529), hypothèse qui ne figure pas dans le livre de Debreu [B1], même si on y trouve le terme "plan" (p. 36). L'interprétation de ce modèle - fondamentalement statique - en termes intertemporels (par ex., [B1], § 2.2 p. 33 et § 7.2 p. 107, et références ci-dessus), via le concept de marché complet, a contribué à l'embarras de la théorie de l'équilibre intertemporel en ce qui concerne le déroulement réel (par ex., [F3], avant propos, p. vi).

1k [1.1.F] Par ex., [G2], p. 289, [G3], p. 932, 940 955-60, [F3], p. 4, 21-23.

1m [1.1.F] Par ex., [D1], p. 536, 538, 541, [D2], p. 879-83 et 887, [F3], p. 134.

1n [1.1.F] Par ex., [G3], p. 932 et 941, [F1], p. 1527, [F3], p. 23 et 138. L'expression de cette hypothèse selon laquelle les anticipations des agents sont "auto-réalisatrices" ([F3], p. 23) illustre bien l'embarras de la théorie en ce qui concerne le déroulement réel, par opposition à la conception 1.1.A2 et à la remarque 1.1.A3 dont participe la question posée et la démarche proposée (alinéa 1.2.A).

1p [1.1.F, 1.2.B] Par ex., [G1], p. 35-36, [G3], p. 931, 939, 955, [D2], p. 880, [F1], p. 1529, [F3], p. 4, 5, 133.

1q [1.1.F] Par ex., [E1], [C3].

1r [1.1.F] Par ex., [A1], [C1], [C2], [B2], [E4], [F4], [F5], [F6]. Le mot "dynamique" figure dans [A1], p. 7 et 29, mais sans que le système dynamique en cause ne soit explicité.

1s [1.1.H] Voir à ce sujet [A2], alinéa 1.1.A, p. 1, § 3.1 et 3.2, p. 13-15.

1u [1.1.H] Par ex., [F4] part de l'hypothèse qu'aucun contrôle de la masse monétaire par les instances régulatrices n'est possible (p. 211).

1v [1.1.H] Voir à ce sujet [A3], par exe., alinéa 1.2.B, p. 2, et § 3.14, p. 50-53.

1w [1.2.A] Le temps étant supposé discret (alinéa 1.1.A), le terme "période", mis pour "période élémentaire", est synonyme de "dâte" ou d'"instant" ([A3], alinéa 2.1.B, p. 7).

1x [1.2.B] Ce modèle est celui qui est étudié dans [C1], mais avec un seul actif.

1y [1.2.B] Par ex., [D2], § 2, p. 882-86.

1A [1.2.B] Par ex., [F3], p. 21. Cette conception (des anticipations adaptatives) a aussi largement inspiré les constructeurs des modèles macroéconomiques empiriques (par ex., [B3], p. 56 sq.).

1B [1.2.E] Le néologisme "transitoir" est construit comme "dortoir" ou "parloir" : il désigne une structure, un système, et non une action.

1C [1.2.F] Par ex., [A3], § 2.12 et 2.13, p. 19-20, alinéa 2.15.E, p. 24.

1D [1.2.F] Par ex., [D2], bas de p. 884.

1E [1.2.H] Par ex., [C1], bas de p. 92.

1F [1.2.H] Si l'équilibre en question est une anticipation du déroulement réel, la normalisation des prix est à faire en fonction des prix (réels) antérieurs.

1G [1.2.I] Par ex., [A3], § 3.14 et 3.15, p. 50-55.

mt2_1a1b au 11/4/00, 20h

NOTES

+c [2.1.A] L'auteur regrette vivement la quasi-absence de la langue française dans la théorie des marchés incomplets : elle semble ne plus y être utilisée que dans les introductions des thèses (par ex., [A1]).

+a [2.1.B] Eu égard à la discrétisation du temps, on identifie couramment une date $t \in \mathbf{T}$ et la période (élémentaire) commençant à cette date, ce qui permet des expressions comme, "à la période t", "pendant la période t", "période courante", "période précédente", etc.

+b [2.1.B] Un arbre (orienté), ou arborescence, sur S (ayant S comme ensemble de noeuds, de sommets) peut être considéré ici, sous la forme primitive qui est usuelle (par ex. [A0], p. 149, [D0], p. 113, [B4], p. 3), comme une relation binaire R sur S, i.e. comme un sous-ensemble R de S×S, qui exprime la descendance directe en cause, en ce sens que $(s',s") \in R$ équivaut à «s" est un descendant direct de s'». De plus, un arbre sur S est dit stratifié par $\mathbf{T} = [0,T]$ si tous les chemins menant de la racine aux feuilles ont la même longueur T. Dans ce cadre formel, les divers termes introduits aux alinéas 2.1.C,D - termes S_t $(t \in \mathbf{T})$, s+, s-, etc. - dérivent de la structure R d'arbre sur S statifié par **T**.

Pour une approche axiomatique, directement en termes de la stratification, on peut définir la structure d'arbre sur S stratifié par **T** à partir de la suite $(S_t,\ t \in \mathbf{T})$ de sous-ensembles de S et de l'application p, s ⟶ s-, de $S \backslash S_0$ dans S, en supposant ces données telles que : (a1) la suite $(S_t,\ t \in \mathbf{T})$ forme une partition de S ; (a2) S_0 est un singleton {s°} ; (a3) pour chaque $t \in \mathbf{T}$ tel que $t < T$, p applique S_{t+1} sur S_t. La relation primitive R de l'arbre est alors la relation p^{-1}, inverse de p, en ce sens «s" est un descendant direct de s'» équivaut à s' = p(s").

+m [2.1.B] La représentation de l'incertitude au moyen d'un arbre d'événements est celle de la théorie des marchés incomplets (par ex., [C1], p. 92, après [B1], chap. 7, p. 107-8).

+n [2.1.F] Le terme multiplet ...

+l [2.2.C] Le qualificatif "viable" est emprunté à la théorie de la viabilité, bien que la propriété qu'il désigne soit plus forte ici que dans cette théorie ([A4], par ex., p. 23, 88, 381). La notion de plan viable constitue une extension au cas d'un modèle intertemporel de la notion d'état réalisable (ou accessible) de la théorie statique de l'équilibre général (par ex., [B1], p. 82 ou 133), mais une extension qui renforce la notion en incluant, dans les contraintes de viabilité, les contraintes d'équilibre budgétaire et financier (2.12) et (2.13b), en plus de celle d'équilibre physique (2.13a). Plus généralement, la notion de plan viable est à la base de l'approche des systèmes dynamiques présentée dans [A3] (§ 2.3 et 3.4).

+d [2.2.C] Voir à ce sujet, dans [A3], les alinéas 2.2.C, ~~2.3.C~~ 3.2.C et 4.3.A.

+e [2.3.B] Par ex., relation (ii), p. 1531 de [F1] ou p. 93 de [C1]. Mais on trouve aussi l'inégalité, par ex., dans [E4], p. 111. /,   /9

+f [2.3.B] Par ex., dans [F1] p. 1530, première relation (3), et, dans [C1] p. 92, antépénultième relation.

nt2-1a1b

+g [2.3.B] Au moins dans les modèles à horizon fini (par ex., [C1] p. 92). Dans les modèles à horizon infini, les bornes d'endettement sont endogènes (par ex., [E4], bas de p. 114).

+h [2.3.B] Par ex., la seconde relation (3) de la p. 1530 de [F1] et la dernière relation de la p. 92 de [C1] stipulent que les engagements $\mathbf{z}_s^i$ sont supposés nuls pour $s \epsilon S_T$ (parenthèse, ligne 7 du bas, p. 92 de [C1]), ce qui équivaut à ce que $d_s^i = 0$ pour $s \epsilon S_T$, d'après la condition d'équilibre financier (2.13b). On met ici en évidence ces hypothèses par l'introduction du jeu de données auxiliaires.

+i [2.3.D] Cette problématique est à la base des développements du chapitre 3 de [A3] (alinéas 3.1.D-F, p. 28-29).

+j [2.3.C] Par ex., relations (ii) et (iii), p. 93 de [C1].

+k [2.5.F] Cette question joue un rôle central dans [A3] (en particulier, § 1.1, 1.5, 2.15, 3.16, 3.17, 4.13 et 5.10).

BIBLIOGRAPHIE

A1 Bottazzi J.-M. (1992), Contribution à la théorie de l'équilibre général : incertain, dynamique et marchés incomplets, Thèse, Université de Paris I.

A2 Courrège P., Gourdel P. (1996), Une classe de modèles statiques d'équilibre général avec taxation, Etat producteur et échanges extérieurs, Cahiers Eco & Maths, 95.57 et 96.74, CERMSEM, Université de Paris I.

A3 Courrège P., Gourdel P., Loridan P., Matarasso P. (1999), Schémas intertemporels de la modélisation macroéconomique et théorie du contrôle : simulation, optimisation, anticipations et régulation, Cahiers de la MSE, CERMSEM, 1999.49.

B1 Debreu G. (1984), Théorie de la valeur, Dunod, Paris.

B3 Deleau M., Malgrange P., Muet P.A. (1981), Une Maquette représentative des modèles macroéconomiques, Annales de l'INSEE, 42, 53-91.

B2 Duffie D. (1996), Incomplete Security Markets with Infinitely many States ; an Introduction, Journal of Economic Theory, 26, 1-8.

C1 Florenzano M., Gourdel P. (1994), T-Period Economies with Incomplete Markets, Economics letters, 44, 91-97.

C2 Florenzano M. (1999), Cours à Hanoï.

C3 Fuchs G., Laroque G. (1976), Dynamics of Temporary Equilibria and Expectations, Econometrica, 44, 1157-78.

D1 Grandmont J.-M. (1977), Temporary General Equilibrium Theory, Econometrica, 45, 535-72.

D2 Grandmont J.-M. (1982), Temporary General Equilibrium Theory, in K.J. Arrow, M.D. Intriligator (ed.), Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, Chap. 19, North-Holland, Amsterdam.

E1 Grandmont J.-M., Laroque G. (1973), Money in the Pure Consumption Loan Model, Journal of Economic Theory, 6, 382-395.

E3 Israel G. (1996), La mathématisation du réel, Ed. du Seuil, Paris.

E4 Levine D.K, Zame W.R. (1996), Debt Contraints and Equilibrium in Infinite Horizon, Journal of Mathematical Economy, 26, 103-131.

F1 Magill M., Shafer W. (1991), Incomplete Markets, in W. Hildenbrand, H. Sonnenschein (ed.), Handbook of Mathematical Economics, Vol. IV, Chap. 30, North-Holland, Amsterdam.

F3 Magill M., Quinzii M. (1996), Theory of Incomplete Markets, Vol. 1, The MIT Press, Cambridge, Massachussets.

F6 Magill M., Quinzii M. (1996), Incomplete Markets over infinite horizon : long lived securities and speculative bubbles, Journal of Mathematical Economy, 26, 133-170.

F2 Monod J. (1970), Le hasard et la nécessité, Ed. du Seuil, Paris.

F4 Prechac C. (1996), The Impact of Financial Intermediaries on Stationary Interest Rates, Journal of Economic Theory, 69, 211-217.

F5 Prechac C. (1996), Existence of Equilibrium in Incomplete Markets with Intermediary Costs, Journal of Mathematical Economy, 25, 373-380.

G1 Radner R. (1968), Competitive Equilibrium under Uncertainty, Econometrica, 36, 31-58.

G2 Radner R. (1972), Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets, Econometrica, 40, 289-303.

G3 Radner R. (1982), Equilibrium under Uncertainty, in K.J. Arrow, M.D. Intriligator (ed.), Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, Chap. 20, North-Holland, Amsterdam.