– PANTHÉON - SORBONNE –
UNIVERSITÉ PARIS 1

Cahiers de la MSE

CERMSEM

Schémas intertemporels de la modélisation macroéconomique et théorie du contrôle : simulation, optimisation, anticipations et régulation

Philippe COURREGE* - Pascal GOURDEL**
Pierre LORIDAN**- Pierre MATARASSO***

1999.49

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Maison des Sciences Économiques, 106-112, boulevard de L'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13
http://www.univ-paris1.fr/MSE/CahiersMSE

Schémas intertemporels de la modélisation macroéconomique et théorie du contrôle : simulation, optimisation, anticipations et régulation

Philippe COURREGE* - Pascal GOURDEL**
Pierre LORIDAN**- Pierre MATARASSO***

1999.49

Juillet 1999

*CERMSEM, EP 1737 du CNRS, Université Paris I, Maison des Sciences Economiques, 106 - 112 Boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13 et APH, 85 Boulevard de Port-Royal, 75013 Paris

**CERMSEM, EP 1737 du CNRS, Université Paris I, Maison des Sciences Economiques, 106 - 112 Boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13

***CNRS, CIRED, 45 Bis, Avenue de la Belle Gabrielle, Jardin Tropical, 94736 Nogent-sur-Marne Cedex

Resumé. L'origine de ce travail réside dans la question, dite téléologique, de la justification de scénarios déterminés par optimisation intertemporelle, pour les modèles macroéconomiques d'une économie non planifiée, mais susceptible de régulation. On aborde cette question par une approche constructive reposant sur l'introduction d'un formalisme permettant d'expliciter et d'étudier comment simulation, anticipation et optimisation peuvent être liées dans ces modèles. Ce formalisme, qui dérive de celui de la théorie du contrôle, s'incrit dans un cadre, à temps discret et incertitude finie, suffisamment général pour inclure à la fois certains éléments de la théorie de la viabilité et la spécificité de la théorie du contrôle optimal, dont une forme adaptée du théorème de Bellman. Dans ce contexte, le propos du texte est d'abord de type méthodologique : il s'agit d'un prolégomène, d'une réflexion formelle, sur les schémas intertemporels de la modélisation macroéconomique, qui vise l'expression et la discussion des procédures d'exploitation des modèles en cause plutôt que l'étude de leurs propriétés mathématiques ou des méthodes de résolution correspondantes. Le propos méthodologique est illustré par la présentation détaillée, formellement et avec une application numérique, d'un modèle de la problématique des limites et du développement durable. Les modèles intertemporels d'équilibre général sont aussi concernés, mais l'application du formalisme général à leur cas ne figure pas dans le texte.

mots clefs : modèles macroéconomiques, équilibre intertemporel, incertitude finie, régulation, simulation, optimisation, anticipation, théorie du contrôle, viabilité.

Abstract. This work finds its origin in the question, said here teleological, which is raised by the calculation, through intertemporal optimization, of scenarios for macroeconomic models, in a decentralized, but possibly regulated, setting. The constructive approach of this question, taken here, introduces a formalism allowing the explicitation and the study of how simulation, expectation and optimization can be linked in macroeconomic models. This formalism, which derives from discrete time and finite uncertainty control theory, is general enough to include both some elements from viability theory and the specificity of optimal control theory. In this context, the purpose is firstly methodologic : it is a prolegomena, a formal reflexion, about the intertemporal schemes of macroeconomic modeling, which aims the general expression and the discussion of the exploitation procedures of the models rather than the study of their mathematical properties or solving algoritms. The methodologic purpose is illustrated by a detailled presentation, in a formal style and with a numerical application, of a model adressing the sustainable development problem. The temporary general equilibrium models, including incomplete markets models, are also concerned, but are not viewed in details.

key words : Macroeconomic models, temporary equilibrium, finite uncertainty, public policy, simulation, optimization, expectation, control theory, viability.

JEL : E17, D84, Q28, C61, B49.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient P. Priouret qui a contribué aux prémices, en 1994, de la réflexion présentée ici. Ils remercient aussi J.-M. Bonnisseau, C. Del Vigna et B. Dessus pour d'utiles renseignements, ainsi que J.-P. Aubin, A. d'Autume et J.-L. Lions pour l'attention qu'ils ont porté à une version préliminaire du texte. Ils remercient enfin les personnels, de la bibliothèque du CEPREMAP, de la bibliothèque du CIRED et du CERMSEM, pour la qualité de leur accueil.

SOMMAIRE

Chapitre 1 - Introduction 1

Chapitre 2 - Principes de la théorie du contrôle à incertitude finie ... 7

Chapitre 3 - Théorie du contrôle et modèles macroéconomiques : simulation, optimisation, anticipations et régulation 27

Chapitre 4 - Un modèle de la problématique des limites et du développement durable : (I) cadre général 63

Chapitre 5 - Un modèle de la problématique des limites et du développement durable : (I) approche numérique 91

Annexe - Compléments mathématiques 121

Notes 129

Bibliographie 153

Index 159

INDICATIONS DE LECTURE

Les chapitres sont décomposés en paragraphes (§) repérés, dans chaque chapitre, par des entiers ; par ex., l'indication "§ 1.2" renvoie au paragraphe 2 du Chapitre 1. Les paragraphes sont décomposés en alinéas repérés, dans chaque paragraphe, par des lettres majuscules ; par ex., l'indication "alinéa 1.2.D" renvoie à l'alinéa (D) du § 1.2. La structure de l'Annexe est analogue, mais avec la lettre A au lieu du n° du chapitre. Les renvois internes, en général aux alinéas, sont mis pour éviter les redites et faciliter une vue d'ensemble du texte, mais ils peuvent être ignorés en première lecture. L'index renvoie aussi aux alinéas ; il est complété (p. 162) par une table de ces derniers, par pages.

Les relations (formules, assertions, conditions, interprétations) sont numérotées par chapitre, les relations du chapitre n étant repérées par les couples (n.r) où r est le numéro (entier) ; par ex. la relation (3.4) est la 4ème du chapitre 3. Certaines sous-relations d'une relation sont repérées par une lettre minuscule qu'on indique alors après le numéro ; par ex., (3.4a). Lorsqu'une relation (n.r) est exactement décomposée en ses sous-relations repérées par des lettres minuscules, l'indication (n.r) désigne la conjonction des sous-relations ; par ex., (3.4) désigne la conjonction de (3.4a) et de (3.4b).

Les notes, numérotées par chapitre, figurent à la fin du texte, avec l'indication, au début de chaque note, du ou des point(s) d'appel (en général alinéa). Vu leur importance, le lecteur est invité à avoir sous la main une copie des pages correspondantes. En particulier, toutes les références externes (à la bibliographie) sont en note.

Une version préliminaire du texte a fait l'objet, en mai 1998, du cahier Eco & Maths n° 98.23. Cette version est périmée et le présent texte la remplace intégralement, ce qu'indique la modification du titre.

CHAPITRE 1 - **INTRODUCTION**

§ 1.1 - CONSTAT DE SITUATION

(A) Les **modèles dynamiques** de **prospective macroéconomique** ([1a]), ici considérés à temps discret et horizon fini (alinéa 1.3.F), donnent lieu à deux procédures d'exploitation axées sur la détermination de scénarios : l'exploitation par simulation et l'exploitation par résolution intertemporelle. Dans l'**exploitation par simulation**, le scénario est obtenu de façon **récursive**, via la détermination, à chaque période, d'un équilibre, d'un fonctionnement, instantané qui conditionne les variables d'état à la période suivante. Dans l'**exploitation par résolution intertemporelle**, le scénario est obtenu par résolution directe, globale, éventuellement par **optimisation intertemporelle**, du système complet des contraintes, intrapériodes ou interpériodes, qui expriment l'**équilibre intertemporel** en liant les variables aux diverses périodes, système pouvant inclure des **conditions normatives**, par exemple **finales** ou de **stabilité**. De telles conditions peuvent, en particulier, exprimer un **objectif collectif** (par exemple stabiliser la population ou les émissions polluantes, contrôler l'inflation ou la masse monétaire) lorsque, le modèle participant d'une problématique d'**économie régulée**, son exploitation vise l'étude, par les **instances régulatrices**, des interventions de **politique publique** susceptibles de réaliser cet objectif.

(B) Les mérites comparés de ces deux procédures d'exploitation font l'objet d'un débat entre spécialistes, débat où les difficultés de résolution prennent largement le pas sur la réflexion conceptuelle, épistémologique, i.e. concernant la justification, la pertinence prospective, des scénarios déterminés ([1b]). Dans ce débat, les deux procédures sont opposées en ce qui concerne la détermination de scénarios soumis à des conditions normatives (alinéa 1.1.A) : l'exploitation par simulation se heurte alors à des difficultés pratiques, de calcul, considérables, tandis que l'exploitation par résolution intertemporelle, en particulier par optimisation intertemporelle, est bien adaptée à cette détermination. Mais, la justification de cette dernière procédure est omise ou limitée à des considérations vagues selon lesquelles le caractère intertemporel de la résolution exprime, représente, des anticipations, une clairvoyance, concernant l'avenir, sans qu'il soit précisé de qui elles sont le fait ([1c]).

(C) Ce défaut de justification est renforcé, dans le cas de l'exploitation par optimisation intertemporelle, par une ambiguïté concernant l'interprétation de la fonction objectif en cause : cette ambiguïté, qui est liée à celle ci-dessus concernant la clairvoyance, réside en ce que l'optimisation peut représenter, selon les cas, un comportement des acteurs décentralisés ou une visée normative des instances régulatrices ([1d]), voire un amalgame des deux (alinéa 1.4.B).

(D) On appellera ici **question téléologique** le paradigme conceptuel, situé par le constat ci-dessus. Elle concerne la justification méthodologique de scénarios déterminés, dans le cadre des modèles macroéconomiques en cause ici, selon la procédure d'exploitation par résolution intertemporelle, en particulier par optimisation intertemporelle, et plus généralement la justification de la notion d'**équilibre intertemporel**. Le qualificatif "téléologique" fait référence à la **finalité** dont semble participer l'équilibre intertemporel, cette finalité s'exprimant, en particulier, par l'optimisation intertemporelle ou la prise en compte de conditions normatives, entre autres de conditions finales, cela apparemment en contradiction avec le **principe de causalité** ([1e]).

(E) Le constat ci-dessus (alinéas 1.1.A-C) peut être complété par deux remarques relatives à la **théorie du contrôle. La première remarque** concerne la pauvreté des liens entre la théorie du contrôle et les travaux relatifs aux modèles macroéconomiques, alors que la problématique d'**économie régulée** dont ils relèvent est typiquement du ressort de cette théorie ([1f]). La **seconde remarque**, qui fait suite à la première, consiste en ce que la théorie du contrôle, si elle est très avancée pour ce qui est des méthodes de résolution, l'est beaucoup moins pour ce qui est de l'exposé de ses principes, de ses fondements conceptuels et méthodologiques, spécialement en ce qui concerne le lien de ses schémas intertemporels avec le principe de causalité ([1g]).

§ 1.2 - <u>ORIENTATION GENERALE</u>

(A) Ce texte, sur les modèles dynamiques de prospective macroéconomique et leurs procédures d'exploitation, propose une réflexion formelle qui va s'appuyer sur les divers éléments du constat précédent que sont la question téléologique et les deux remarques relatives à la théorie du contrôle (alinéas 1.1.D,E).

(B) La question téléologique est abordée (§ 2.15 et 3.16), selon une **approche constructive**, par la recherche de justifications indirectes, i.e. basées sur une équivalence formelle entre la procédure de détermination dont la justification est problématique (alinéa 1.1.B) et une autre qui est plus clairement justifiée. Cette approche repose sur l'introduction d'une classe de **modèles dont la dynamique est gouvernée par des anticipations** (§ 3.6 à 3.11), modèles dont la structure permet de préciser le lien entre les deux procédures d'exploitation en montrant, entre autres, comment simulation et optimisation intertemporelle, plutôt qu'opposées comme il semble résulter du débat à leur sujet (alinéa 1.1.B), peuvent être complémentaires, via les anticipations, et étroitement liées dans l'exploitation, tout en respectant le principe de causalité. Dans ce sens, seule l'exploitation par simulation est considérée comme compatible avec ce principe (alinéas 3.14.D,G) et les justifications indirectes de l'exploitation par résolution intertemporelle consistent essentiellement en des réductions à l'exploitation par simulation (alinéas 2.15.D et 3.16.F,G).

(C) L'introduction de cette classe de modèles à anticipations repose sur celle, au chapitre 3, d'un **formalisme général** des **schémas intertemporels** de la **modélisation macroéconomique**, formalisme qui constitue une réponse à la question naturelle qu'engendre la première remarque sur la théorie du contrôle (alinéa 1.1.E), en ce sens que les structures correspondantes sont dérivées de celles de cette théorie, en les adaptant à la perspective d'économie régulée par un dédoublement des commandes en deux types : celles qui participent du comportement des acteurs décentralisés et celles qui expriment les interventions des instances régulatrices. En particulier, c'est en s'appuyant sur ce dédoublement que peut être levée l'ambiguïté entre les deux types d'optimisation (alinéa 1.1.C).

(D) De plus, vu l'importance, dans cette démarche, des concepts de la théorie du contrôle et comme suite à la seconde remarque concernant cette dernière (alinéa 1.1.E), on reprend ses principes au chapitre 2. En fait, ce chapitre 2 est plus qu'un préliminaire en ce sens qu'on y présente une synthèse consistant à inclure, dans un même cadre formel à temps discret et incertitude finie, à la fois les éléments voulus de la **théorie de la viabilité** et ceux de la **théorie du contrôle optimal**, dont une forme du **théorème de Bellman** adaptée à l'incertitude finie et à la question téléologique (§ 2.12 et alinéas 2.15.E,F).

(E) Comme illustration du formalisme général, qui est présenté de façon abstraite aux chapitres 2 et 3, deux types de modèles sont plus spécialement envisagés : d'une part (E1) les modèles planétaires de croissance endogène qui interviennent dans les travaux d'économie de l'environnement sur l'effet de serre, d'autre part (E2) les modèles d'équilibre intertemporel en avenir incertain, en particulier ceux qui interviennent dans la théorie des marchés incomplets. Un modèle illustratif du premier type est décrit en détail au chapitre 4 et donne lieu à une application numérique au chapitre 5. De plus, la question téléologique concernant les modèles de ces deux types est discutée aux § 1.4 et 1.5, après la présentation de l'orientation méthodologique au § 1.3. Par ailleurs, la chapitre 3 commence par une délimitation des systèmes macroéconomique et de la démarche prospective en cause (§ 3.1).

§ 1.3 - ORIENTATION METHODOLOGIQUE

(A) Bien que l'approche soit essentiellement formelle, d'économie mathématique, le propos du texte est d'abord de type **méthodologique**, pour ne pas dire épistémologique : il s'agit d'une réflexion formelle, sur les schémas intertemporels de la modélisation macroéconomique, réflexion qui vise l'expression générale et la discussion des **procédures d'exploitation** des modèles en cause plutôt que, au moins directement (alinéa 1.3.C), l'étude de leurs propriétés mathématiques ou des méthodes de résolution correspondantes.

(B) Ce propos méthodologique a une **motivation pratique**, en ce sens qu'il s'agit de l'expression de procédures d'exploitation concernant des **modèles concrets**, numérisés, dont les résultats peuvent donner ou donnent lieu à discussion ou décision de politique économique, et pas seulement de considérations théoriques à visée académique. D'où l'importance d'un **formalisme général**, accompagné d'une terminologie systématique, qui a été spécialement travaillée, formalisme grâce auquel peuvent s'exprimer précisément et simplement ces procédures, alors que leur expression est souvent inextricable au sein de la complexité des modèles opérationnels ([1h]). En fonction de ce propos, le présent texte a été conçu, hors des schémas académiques et dans des conditions artisanales ([1i]), pour servir de support théorique et d'outil de travail collectif, en particulier par la systématique terminologique, à des équipes scientifico-techniques, mandatées pour construire et gérer des modèles opérationnels ([1j]).

(C) Par ailleurs, au-delà de cette fonction appliquée, le formalisme introduit devrait faciliter l'étude, autrement que sur des maquettes ([1k]), des problèmes mathématiques que posent les modèles opérationnels, cela en permettant, au prix d'un effort d'abstraction (alinéas 3.1.A,B), de conjuguer et d'unifier les travaux dispersés sur des modèles disparates. Certains de ces problèmes sont énoncés ou évoqués chemin faisant, puis récapitulés dans les épilogues des chapitres 2, 3, 5 (§ 2.16, 3.18, 5.11). On souligne à ce sujet que le texte réclame davantage une aptitude à l'abstraction mathématique, au maniement d'un formalisme abstrait, que des connaissances techniques. En particulier, au moins pour l'essentiel, il ne réclame aucune connaissance technique de la théorie du contrôle ou de la théorie économique (alinéa 1.6.D).

(D) Le propos méthodologique réclame que le formalisme introduit soit, à la fois, défini de façon rigoureuse du point de vue mathématique et convenablement interprété en termes des systèmes représentés. Dans ce sens, l'orientation adoptée consiste à distinguer systématiquement, au risque de quelques longueurs, les **modèles** en cause - qui sont l'objet de l'étude et sont définis **axiomatiquement**, comme des **structures mathématiques** - des **systèmes concrets** que ces modèles visent à représenter, les liens entre les deux étant abordés par des énoncés spécifiques, les **interprétations**, qui se réfèrent directement aux termes, même généraux [1l], du discours purement descriptif relatif à ces systèmes, plutôt qu'aux travaux d'économie théorique, lesquels ne sont mentionnés - généralement en notes - que comme des compléments aux interprétations précédentes.

(E) Cette démarche vise à éviter la lacune épistémologique, de nombreux travaux d'économie théorique, qui réside dans l'opacité de l'interprétation concrète des modèles dont l'étude mathématique est l'objet principal de ces travaux, opacité résultant d'**interprétations hatives**, par des cascades ascendantes, voire cycliques, de références à des travaux du même type.

Sans s'étendre sur cette lacune, vu le propos constructif plutôt que critique du texte (alinéa 1.2.B), on cite à son sujet la littérature sur les anticipations, en particulier "rationnelles", où elle est particulièrement nette [1m] : de quoi s'agit-il donc, au-delà de résultats - subtils - sur une certaine équation stochastique faisant dépendre le présent d'une espérance conditionnelle du futur ? Le traitement des anticipations présenté au chapitre 3 (§ 3.6 à 3.11) fournit certaines réponses - à approfondir - à cette question (alinéas 3.9.D-F). Dans le même sens et en liaison avec la question téléologique, on peut citer la théorie de l'équilibre général intertemporel (§ 1.5).

(F) Encore à propos de l'orientation méthodologique, on insiste sur les options techniques du formalisme introduit (alinéa 1.2.C,D), options qui consistent en l'utilisation systématique d'une représentation, d'une part à **temps discret** et **horizon fini**, d'autre part à **incertitude finie**, i.e. par un arbre d'événements fini, comme dans la théorie de l'équilibre intertemporel, en particulier celle des marchés incomplets. Ces options, qui correspondent et sont adaptées à la motivation pratique (alinéa 1.3.B), permettent de faire en sorte que l'exposé, bien qu'abstrait, reste élémentaire du point de vue mathématique, en particulier évite les complications du temps continu et de l'appareil probabiliste de la théorie du contrôle stochastique (alinéas 2.1.G,H) [1n].

§ 1.4 - MODELES DU DEVELOPPEMENT DURABLE

(A) Les modèles du premier type envisagé, le type 1.2.E1, sont ceux, à visée appliquée, qui interviennent dans les travaux d'économie de l'environnement et, plus particulièrement, dans les travaux récents relatifs au développement durable [1o]. La question téléologique concerne alors la justification de l'optimisation intertemporelle qui est utilisée pour déterminer, dans une démarche de théorie du contrôle non explicitée, conjointement un scénario soumis à certaines conditions normatives (par ex., la réduction des émissions polluantes) et les mesures de politique économique correspondantes (par ex., des taxations).

(B) Les fonctions objectif qui interviennent dans ces optimisations sont de plusieurs types qui reçoivent des interprétations et justifications diverses. Un premier type de telles fonctions, le plus fréquent, est constitué de **fonctions**

d'utilité sociale, sommes d'utilités individuelles et instantanées, dont la maximisation vise à représenter les comportements des acteurs locaux, donc à engendrer une évolution "naturelle", un "équilibre général intertemporel", résultant de ces comportements ([1p]). La justification - quand il en est question - fait alors appel, plus ou moins explicitement et de façon peu fondée mathématiquement, au théorème de Negishi ([1q]). Un second type, moins fréquent, est constitué de **fonctions de coût global**, cette fois à minimiser, l'optimisation visant encore à représenter un comportement "naturel" des acteurs en économie libérale ([1s]). Dans un troisième type, la fonction objectif est hybride en ce sens qu'elle vise à représenter à la fois une utilité sociale comme dans le premier type et une **pression normative** dans le sens de la réduction des émissions polluantes ou de l'économie des ressources (alinéa 1.1.C) ([1t]). Enfin, des fonctions objectif représentant seulement une telle pression normative sont aussi parfois utilisées, par exemple celle correspondant au critère de Rawls ([1u]).

(C) D'autres modèles intervenant en économie de l'environnement ([1v]) s'apparentent aux modèles macroéconomiques empiriques dynamiques ([1w]) ou aux modèles du commerce international ([1x]), tant en ce qui concerne la structure que la procédure d'exploitation. Cette dernière consiste alors en une **simulation**, avec calcul à chaque période d'un équilibre comportant éventuellement une anticipation. Mais la difficulté des problèmes d'optimisation multiples que pose le contrôle des scénarios ainsi obtenus (§ 3.15) entrave cette procédure et alimente le débat sur les mérites comparés des deux procédures (alinéa 1.1.B).

(D) Le cadre du modèle présenté aux chapitres 4 et 5 permettra de préciser les considérations précédentes en s'appuyant sur l'appareil conceptuel introduit aux chapitres 2 et 3. Au demeurant, ce modèle fait suite à un travail préliminaire d'expérimentation numérique sur divers autres du même type 1.2.E1, travail, initialement motivé par le caractère insatisfaisant des modèles existants quant à leurs fondements (alinéas 1.4.A,B), qui a accompagné la réflexion méthodologique (§ 4.14). Au-delà, l'appareil mis en place devrait pouvoir contribuer - par son caractère général - à l'articulation, actuellement problématique, entre les modèles macroéconomiques et ceux, purement physiques, de l'environnement ([1y]).

§ 1.5 - <u>MODELES D'EQUILIBRE INTERTEMPOREL</u>

(A) Les modèles du second type, le type 1.2.E2, essentiellement théoriques, sont ceux de l'**équilibre général intertemporel en avenir incertain** ([1z]), la question téléologique concernant alors la relation entre l'objet mathématique "équilibre" (appelé aussi "équilibre stochastique" ([1A])) de cette théorie et le déroulement temporel. Schématiquement, un tel objet "équilibre" apparaît comme un multiplet (x_s, $s \epsilon S$) de variables vectorielles x_s indexées par les noeuds s de l'arbre S représentant les événements élémentaires, les aléas, externes conditionnant le système ([1B]), tandis que le déroulement temporel concerne des variables $y(t)$ indexées par les dates sucessives $t \epsilon [0,T]$ qui stratifient l'arbre S des aléas externes. Dans ces conditions, comment passer des unes aux autres ?

(B) La réponse envisagée ici à cette question consiste en ce que, à chaque date t, c'est le multiplet (x_σ, $\sigma \epsilon [s>$), où s est l'événement élémentaire à la date t et [s> la descendance de s dans l'arbre S, qui est significatif et représente une **anticipation** des agents en cause à cette date, anticipation dont découle les conditions de fonctionnement, la dynamique, du système pendant la période t, lesquelles déterminent mécaniquement son évolution jusqu'à la date t+1 ; ainsi de suite, récursivement. Or, cette réponse, même si elle est sans doute bien connue des spécialistes, est difficile à trouver clairement exprimée dans la littérature standard sur la théorie ([1C]) : ses auteurs sont bien davantage préoccupés par les difficultés mathématiques de la démonstration de l'existence d'un équilibre que par la signification de ce dernier, surtout que cette signification relève de l'appareil conceptuel de la théorie du contrôle stochastique bien éloigné de ces préoccupations (alinéa 1.1.E, première remarque).

(C) Le formalisme présenté au chapitre 3 va permettre de généraliser cette réponse, en systématisant le lien entre simulation et anticipation ([1D]). Cette application aux modèles d'équilibre intertemporel, du type 1.2.E2, devrait illustrer et compléter la présentation du formalisme général, du point de vue de ces modèles, comme les chapitres 4 et 5 le font du point de vue des modèles de l'effet de serre, du type 1.2.E1. Le potentiel de travail disponible ne l'ayant pas permise, elle devra faire l'objet d'un développement ultérieur (alinéa 3.18.B).

§ 1.6 - <u>AVERTISSEMENT</u>

(A) En conclusion de ce chapitre introductif, on revient sur le propos méthodologique du texte (§ 1.3) pour donner quelques indications de lecture visant à éviter que les lecteurs susceptibles d'être concernés par les problème posés ne soient rebutés par le caractère inhabituel du propos ([1E]) ou les longueurs de la forme qui est concomitante de ce dernier (alinéa 1.3.D).

(B) Quatre types de lecteurs sont susceptibles d'être spécialement concernés : d'une part les spécialistes des modèles économique ou les utilisateurs de ces modèles qui sont sensibles aux problèmes de structure et de justification envisagés aux § 1.1 et 1.2, voire les philosophes des sciences travaillant, plus généralement, sur la démarche de modélisation ([1F]) ; d'autre part les mathématiciens spécialistes des problèmes posés dans le texte, entre autres spécialistes de la théorie du contrôle ou de l'optimisation en analyse numérique.

(C) Les lecteurs des trois premiers types ne peuvent pas éviter une lecture linéaire du texte leur permettant de prendre connaissance du formalisme introduit et de son interprétation, au moins dans les grandes lignes, vu le rôle central de ce formalisme dans les développements méthodologiques (alinéas 1.3.B,D).

(D) Un lecteur du quatrième type devrait pouvoir, grâce à la présentation axiomatique (alinéa 1.3.D), ne prendre connaissance que des aspects du formalisme relatifs au problème qui l'intéresse, même s'il n'a pas de connaissances techniques des modèles macroéconomique (alinéa 1.3.C) et même pour l'application traitée aux chapitres 4 et 5. Dans ce sens, les principaux problèmes sont récapitulés dans les épilogues des chapitres 2, 3, 5 (§ 2.16, 3.18, 5.11).

(E) Par contre, deux types d'attentes seront déçues : celles, pour les mathématiciens ou utilisateurs des modèles, consistant à chercher des méthodes de démonstration ou de résolution numérique, vu que le texte vise à poser et à justifier les problèmes comme préalable à leur résolution (alinéa 1.3.C) ; celles, pour les experts, consistant à chercher des résultats exploitables, vu que le modèle présenté aux chapitres 4 et 5 est seulement illustratif (alinéas 4.1.F et 5.1.A), même s'il comporte des originalités de structure (alinéa 4.1.I) et offre des perspectives de développement (§ 4.14 et 5.11).

CHAPITRE 2 - PRINCIPES DE LA THEORIE DU CONTROLE A INCERTITUDE FINIE

On présente dans ce chapitre, de façon formelle et générale, les éléments de théorie du contrôle, à temps discret et incertitude finie, qui interviennent dans ce texte. L'exposé tire systématiquement parti de ce caractère fini pour éviter les complications de l'appareil probabiliste usuel de la théorie du contrôle stochastique [1n].

Après des préliminaires (§ 2.1), en particulier sur le traitement du temps et de l'incertitude, on introduit, via la notion de structure de contrôle, un cadre formel suffisamment général (§ 2.2 à 2.4) pour inclure à la fois les éléments voulus de la **théorie de la viabilité** adaptée au temps discret (§ 2.5 à 2.9) et ceux de la **théorie du contrôle optimal** (§ 2.10 à 2.13), dont une forme du **théorème de Bellman** (§ 2.12 et 2.13) [2a]. On situe ensuite dans ce cadre les schémas d'exploitation de ces deux théories (§ 2.14). Enfin (§ 2.15), comme un lien entre elles, on propose diverses formulations de la question téléologique (alinéa 1.1.D), en insistant sur son approche constructive (alinéa 1.2.B).

§ 2.1 - PRELIMINAIRES

(A) Comme l'indique l'introduction ci-dessus et conformément à l'orientation méthodologique du texte (alinéa 1.3.B), le propos de ce chapitre est formel et abstrait : on y présente, de façon générale, l'appareil formel, le formalisme, de la théorie du contrôle, à temps discret et incertitude finie, en particulier à horizon fini, tels qu'ils vont intervenir dans la suite dans ce texte.

Cette présentation est très partielle et spécifique, en ce sens qu'elle ne concerne qu'une partie de la théorie, celle qui sera utilisée dans la suite, et que, pour cette partie, elle ne vise à donner que les définitions des êtres mathématiques en cause, ainsi que le schéma logique de leurs interdépendances et leurs interprétations générales, à l'exclusion des méthodes de résolution, mis à part ce qui est dit du théorème de Bellman (§ 2.12 et 2.13). Ainsi, ce chapitre ne constitue pas une introduction à la théorie du contrôle au sens usuel, par le traitement d'exemples [2b]. Mais cela n'entraîne pas qu'il soit destiné uniquement aux lecteurs initiés à cette théorie, vu que toutes les notions y sont reprises à la base. En fait, mis à part le caractère abstrait et général de l'exposé, caractère qui sera compensé par les chapitres ultérieurs, la principale difficulté réside sans doute dans le traitement non probabiliste de l'incertitude (alinéa 2.1.B-E,H), difficulté plutôt pour les lecteurs habitués au formalisme usuel, probabiliste, de la théorie du contrôle stochastique.

L'option de base de la théorie envisagée, qui réside dans l'utilisation d'un formalisme à temps discret et à incertitude finie, est justifiée aux alinéas 2.1.G,H ci-après, après la présentation de ce formalisme aux alinéas 2.1.B-F.

(B) Le déroulement temporel et l'environnement externe du système envisagé sont pris en compte, dans leur incertitude, de façon discrète et en horizon fini. Pour cela, on désigne par $\mathbf{T} = [0,T]$, avec T entier > 0, l'intervalle des entiers dont les éléments $t \in \mathbf{T}$ représentent les **dates**, qui encadrent les **périodes élémentaires** [2c], et par S l'ensemble (fini) dont les éléments $s \in S$ représentent les **éventualités**, **aléas**, ou **événements élémentaires**, **externes**, qui conditionnent le système, la structure ordonnée de ces événements étant donnée comme un arbre sur S (ayant S comme ensemble de noeuds) qui est stratifié par **T** [2d]. Cet arbre constitue la **donnée de situation** des modèles considérés (alinéa 2.1.H).

(C) Pour chaque $t \in \mathbf{T}$, on désigne par S_t le sous-ensemble, supposé non vide, de S formé des aléas $s \in S$ ayant lieu à, relatifs à, la date t. Ainsi : (C1) on a $S_0 = \{s°\}$, en désignant par s° la racine de l'arbre ; (C2) pour chaque $t \in \mathbf{T}$, S_t est l'ensemble des $s \in S$ tels que l'unique chemin (selon la relation de l'arbre) menant de s° à s soit de longueur t, chemin dont l'ensemble des points est noté <s] ; (C3) les ensembles S_t ($t \in \mathbf{T}$) forment une partition de S ; (C4) pour chaque $s \in S$, on désigne par $\underline{t}_s$ l'unique $t \in \mathbf{T}$ tel que $s \in S_t$.

(D) Si $s \in S \setminus S_T$, on désigne par]s> (resp. s+) l'ensemble des descendants (resp. des descendants directs) de s. On pose [s> = $\{s\}$, si $s \in S_T$, et [s> = $\{s\} \cup$]s>, si $s \in S \setminus S_T$. Si $s \in$]s°>, on désigne par s- l'unique élément de S tel que $s \in (s-)+$. Si τ est un entier ≥ 0, on désigne, pour chaque $s \in S$, par $[s,\tau]$ (resp. $[s,\tau]^*$, $[s,\tau]^\#$) l'ensemble des aléas $\sigma \in$ [s> tels que $\underline{t}_\sigma \leq \underline{t}_s + \tau$ (resp. $\underline{t}_\sigma = \underline{t}_s + \tau$, $\underline{t}_\sigma < \underline{t}_s + \tau$), i.e. la troncature à la profondeur τ du sous-arbre [s> (resp. l'ensemble des feuilles de cette troncature, son complémentaire). On a alors, d'une part $[s,0] = \{s\}$, d'autre part $[s,\tau]$ = [s> si et seulement si $\tau \geq T - \underline{t}_s$.

(E) Supposant fixé un entier θ, élément de **T**, on désigne, par $\mathbf{T}^\theta$ le sous-intervalle $[0,\theta]$ de **T** et par S^θ le sous-arbre de S tronqué à la profondeur θ, i.e. la réunion $\bigcup_{t \in [0,\theta]} S_t$, enfin par $S^\theta_\#$ l'ensemble $S^\theta \setminus \{s°\}$. Dans la suite de ce chapitre, seul le sous-arbre S^θ intervient, cette limitation étant destinée à préparer le cadre requis par le chapitre 3 (alinéa 3.7.B). Elle peut être ignorée pour la lecture du chapitre 2, en prenant $\theta = T$, i.e. $\mathbf{T}^\theta = \mathbf{T}$ et $S^\theta = S$.

Un **chemin** (d'événements, pour la relation de l'arbre) est (identifié à) une suite (finie) $\mathbf{s} = (\mathbf{s}(t),\ t \in \mathbf{T}^\theta)$ d'éléments de S telle que,

(2.1) pour tout $t \in \mathbf{T}^\theta$, (a) $\mathbf{s}(t) \in S_t$ et (b) $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}(t+1)-$, si $t < \theta$.

Ainsi, un chemin représente une hypothèse de scénario externe du système considéré (alinéa 3.1.E). On désigne par **S** l'ensemble des chemins et, pour chaque $s \in S^\theta$, par $\mathbf{S}_s$ le sous-ensemble de **S** formé des chemins $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ passant par s en ce sens que $\mathbf{s}(\underline{t}_s) = s$.

(F) Le **cas déterministe** est celui où l'arbre S coïncide avec l'intervalle temporel **T** muni de son ordre (total) naturel. Le sous-arbre S^θ coïncide alors avec l'intervalle $\mathbf{T}^\theta$.

(G) L'utilisation d'un formalisme à **temps discret** tient essentiellement à la perspective d'application aux systèmes mécroéconomiques qui fait l'objet des chapitres suivants (alinéa 1.1.A et § 3.1). En effet, le niveau d'analyse des phénomènes économiques en cause - ceux que visent à représenter les modèles macroéconomiques (alinéa 3.1.D) - comporte une segmentation du temps en fonction de rythmes spécifiques, naturels (agricoles) ou conventionnels (budgétaires), qui délimitent des événements que la dicrétisation du temps permet de considérer comme "discrets". Dans ces conditions, à ce niveau d'analyse macroéconomique, les modèles à temps discret sont plus réalistes, moins schématiques, que ceux à temps continu [2e]. De plus, la limitation à un **horizon fini** est justifiée par la problématique d'économie régulée (alinéas 1.1.A et 3.1.D-F), vu l'importance des conditions finales dans les procédures d'exploitation requises par cette perspective (alinéas 2.6.C, 3.12.E, 4.1.E, 4.12.B, 5.6.A, 5.7.B, 5.9.D,E).

(H) La représentation de l'incertitude au moyen d'un **arbre d'événements** est empruntée à la théorie de l'équilibre général intertemporel [2f]. L'expression "éventualité externe" se réfère aux événements auxquels le système considéré est soumis et qui sont pris en compte dans le modèle comme des influences exogènes, sans que leurs mécanismes propres le soient. Le qualificatif externe recouvre ainsi tant des événements concrètement extérieurs (les taches solaires [2g]) que des incertitudes internes (découvertes ou accidents économiques).

Cette représentation est essentiellement justifiée, comme l'utilisation du temps discret (alinéa 2.1.G), par la perspective d'application aux systèmes macroéconomiques (alinéa 1.1.A et § 3.1). En effet, l'approche probabiliste, de la théorie usuelle des processus stochastiques, est problématique pour ces systèmes, à cause du caractère historique de leur évolution (alinéa 3.1.E). D'où l'intérêt du **traitement non probabiliste de l'incertitude** que permet cette représentation, traitement qui est un des propos de ce texte (alinéa 1.3.F), en particulier via les notions centrales de **plan** (§ 2.3 et alinéa 3.1.H) et d'**anticipation** (alinéa 3.1.I,J, § 3.6). Au demeurant, ce traitement ne doit pas être opposé au traitement probabiliste, mais conjugué avec lui : le travail d'approfondissement correspondant est à faire (alinéa 2.16.A).

§ 2.2 - <u>STRUCTURES DE CONTROLE</u>

(A) On introduit ici le cadre formel de la théorie du contrôle, i.e. la classe des modèles qui représentent, de façon générale, en tant que structures mathématiques, les systèmes envisagés. Une telle structure, appelée **structure de contrôle**, est un quadruplet $\Sigma = (X, Y, G, F)$ dont les termes composants X, Y, G, F sont eux mêmes des multiplets, $X = (X_s, s \in S^\theta)$, $Y = (Y_s, s \in S^\theta)$, $G = (G_s, s \in S^\theta)$, $F = (F_s, s \in S^\theta_\#)$, tels que :

(2.2) pour tout $s \in S^\theta$, X_s et Y_s sont des ensembles, Y_s étant non vide ;

(2.3) pour tout $s \in S^\theta$, G_s est un sous-ensemble de $X_s \times Y_s$;

(2.4) pour tout $s \in S^\theta_\#$, F_s est une application de G_{s-} dans X_s.

Les termes X_s, Y_s, G_s, F_s sont appelés respectivement **espace des états**, **espace des commandes**, **correspondance d'admissibilité**, **fonction d'évolution**, en s, de la structure Σ, conformément aux interprétations figurant aux alinéas 2.2.C,D. Les éléments de l'espace X_{s° sont appelés **états initiaux**.

(B) Pour des raisons formelles, on n'exclut pas a priori que certains des ensembles X_s ou G_s ($s \in S^\theta$) soient vides [2h]. Dans ce sens, on dit que la structure $\Sigma = (X, Y, G, F)$ est **consistante** si :

(2.5) pour tout $s \in S^\theta$, les ensembles X_s et G_s sont non vides.

Pour chaque $s \in S^\theta$, l'ensemble G_s est considéré comme une correspondance de X_s dans Y_s. Ainsi, pour chaque $x \in X_s$, on note $G_s(x)$ le sous-ensemble de Y_s qui est l'image de x par G_s, i.e. l'ensemble $\{y \in Y_s \mid (x,y) \in G_s\}$; les commandes, éléments de ce sous-ensemble $G_s(x)$, sont dites **admissibles**, par rapport à l'état x, en s [2i]. On souligne que, même si la structure est consistante, l'ensemble $G_s(x)$ peut être vide pour certains $x \in X_s$, le traitement de ce cas étant un des aspects importants de la théorie (alinéa 2.7.A et § 2.8).

(C) Les ensembles X_s et Y_s ($s \in S^\theta$) constituent les **données extensives** de la structure, celles qui en délimitent le cadre général : pour chaque $s \in S^\theta$, les éléments de l'ensemble X_s (resp. Y_s) représentent les **états** (resp. les **commandes**) possibles du système lorsque l'éventualité représentée par s a lieu. On souligne que ce sont les ensembles X_s et Y_s ($s \in S^\theta$) qui constituent des **données** du modèle et non leurs éléments, lesquels constituent les modalités des **variables** de ce dernier. Les interprétations conceptuelles de ces variables, i.e. des états et des commandes, sont le fait de leurs liens qu'expriment les données fonctionnelles (alinéa 2.2.D), puis de la définition des plans et cheminements viables (alinéas 2.3.B et 2.4.B) [2j].

(D) Les termes G_s ($s \in S^\theta$) et F_s ($s \in S^\theta_\#$) constituent les **données fonctionnelles** de la structure, celles en termes desquelles s'expriment les contraintes correspondantes : pour chaque $s \in S^\theta$, la relation $(x,y) \in G_s$, i.e. $y \in G_s(x)$ exprime que la commande y est **compatible** avec l'état x, admissible par rapport à cet état (alinéa 2.2.B), dans l'éventualité s [2i], tandis que, lorsque $s \in S^\theta_\#$ et lorsque c'est l'éventualité $\sigma \in s+$ qui a lieu, la fonction F_σ fournit l'**évolution de l'état** correspondant à cette dernière, en ce sens que $F_\sigma(x,y)$ représente l'état en σ qui résulte de la commande $y \in G_s(x)$ appliquée à l'état x, en s. Cette interprétation justifie que la fonction d'évolution F_σ, à appliquer à l'état x et à la commande y en s, dépende de l'éventualité suivante $\sigma \in s+$ et pas seulement de l'éventualité s [2k].

(E) Dans le **cas standard**, cas des exemples envisagés aux chapitres 4 à 6, tous les ensembles X_s et Y_s ($s \in S^\theta$) sont des **espaces standards**, i.e. des sous-espaces fermés d'espaces euclidiens, les correspondances de compatibilité étant alors définies par des systèmes de contraintes numériques. Cependant, cette spécificité ne joue aucun rôle dans ce chapitre et aucune structure particulière n'est requise a priori sur ces ensembles, même si on emploie les concernant le vocable "espace". En particulier, il est utile de considérer le cas, dit **cas fini**, où tous les ensembles X_s et Y_s ($s \in S^\theta$) sont finis.

§ 2.3 - PLANS ET SCHEMAS DE COMMANDE

(A) Un **plan**, relatif à (ou pour) la structure de contrôle $\Sigma = (X, Y, G, F)$, est un couple (ξ, η), où les termes ξ et η sont des multiplets $(\xi_s, s \in S^\theta)$ et $(\eta_s, s \in S^\theta)$ dont les **composantes** ξ_s et η_s vérifient :

(2.6) pour tout $s \in S^\theta$, (a) $\xi_s \in X_s$ et (b) $\eta_s \in Y_s$.

Un multiplet $(\eta_s, s \in S^\theta)$ vérifiant les relations (2.6b) est appelé **schéma de commande** [2m]. La composante η d'un plan (ξ, η) est ainsi un schéma de commande, le schéma de commande **du**, ou **sous-jacent au**, plan. Par ailleurs, la composante ξ est appelée **réalisation** du plan (ξ, η).

(B) Le plan (ξ, η) est dit **viable** [resp. **admissible**] [2n], pour la structure de contrôle Σ, s'il vérifie les **contraintes** (2.7), **d'admissibilité** des commandes par rapport aux états, et les **équations** (2.8) **d'évolution** de l'état [resp. seulement les contraintes (2.7)], avec :

(2.7) pour tout $s \in S^\theta$, (a) $\eta_s \in G_s(\xi_s)$,

(2.8) pour tout $s \in S^\theta_\#$, (a) $\xi_s = F_s(\xi_{s-}, \eta_{s-})$.

La relation (2.7a) exprime que la commande η_s en s est admissible par rapport à l'état ξ_s en s, tandis que la relation (2.8a) exprime comment l'état en s est conditionné, via la fonction d'évolution F_s, par l'état et la commande en s-.

On dit que le plan (ξ, η) est **issu de l'état initial** $x^\circ \in X_{s^\circ}$, si :

(2.9) $\xi_{s^\circ} = x^\circ$.

Un schéma de commande $\eta = (\eta_s, s \in S^\theta)$ est dit **viable**, relativement à l'état initial x°, s'il existe un plan viable, issu de x° et dont le schéma de commande sous-jacent coïncide avec η. Ce plan étant unique, on note $\Xi(\boldsymbol{\Sigma},x^\circ,\eta)$ ou $\Xi(x^\circ,\eta)$ sa réalisation.

(C) On désigne par $\mathbf{P}(\boldsymbol{\Sigma})$ ou seulement $\mathbf{P}$ l'ensemble des plans et par $\mathbf{P_v}(\boldsymbol{\Sigma})$ ou $\mathbf{P_v}$ [resp. $\mathbf{P_v}(\boldsymbol{\Sigma},x^\circ)$ ou $\mathbf{P_v}(x^\circ)$] l'ensemble des plans viables [resp. des plans viables issus de l'état initial $x^\circ \in X_{s^\circ}$]. On désigne par $\mathbf{C_v}(\boldsymbol{\Sigma},x^\circ)$ ou $\mathbf{C_v}(x^\circ)$ l'ensemble des schémas de commande viables relativement à l'état initial x°.

(D) Un plan (ξ, η) est une entité prospective qui fournit une description complète des variables d'état et de commande relatives au système, description prenant en compte, toutes les éventualités externes $s \in S^\theta$. Un plan est viable s'il respecte toutes les contraintes inhérentes aux données fonctionnelles [20]. On souligne le caractère potentiel, prospectif, des plans : ils sont d'abord des auxiliaires de l'exploitation du modèle (§ 2.14). Ce rôle d'auxiliaires d'exploitation apparaît clairement dans leur interprétation relativement aux structures de contrôle correspondant aux modèles macroéconomiques, structures qui font l'objet du chapitre 3 (alinéas 3.1.H et 3.4.D).

§ 2.4 - CHEMINEMENTS

(A) Un **cheminement**, relatif à la structure de contrôle $\boldsymbol{\Sigma} = (X, Y, G, F)$, sur le chemin $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$, est un couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, où les termes $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des multiplets $(\mathbf{x}(t), t \in \mathbf{T}^\theta)$ et $(\mathbf{y}(t), t \in \mathbf{T}^\theta)$ dont les **composantes** $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$ $(t \in \mathbf{T}^\theta)$ vérifient,

(2.10) pour tout $t \in \mathbf{T}^\theta$, (a) $\mathbf{x}(t) \in X_{\mathbf{s}(t)}$ et (b) $\mathbf{y}(t) \in Y_{\mathbf{s}(t)}$.

(B) Le cheminement $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est dit **viable** [2n] si,

(2.11) pour tout $t \in \mathbf{T}^\theta$, $\mathbf{y}(t) \in G_{\mathbf{s}(t)}(\mathbf{x}(t))$,

(2.12) pour tout $t \in \mathbf{T}^\theta$, $\mathbf{x}(t+1) = F_{\mathbf{s}(t+1)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, si $t < \theta$.

Conformément à la terminologie relative aux plans (alinéa 2.3.B). Les relations (2.11) et (2.12) sont respectivement les **contraintes d'admissibilité**, des commandes par rapport aux états, et les **équations d'évolution** de l'état.

On dit que le cheminement $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est **issu de l'état initial** $x^\circ \in X_{s^\circ}$, si,

(2.13) $\mathbf{x}(0) = x^\circ$.

On désigne par $\mathbf{O}(\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{s})$, ou seulement $\mathbf{O}(\mathbf{s})$, l'ensemble des cheminements sur le chemin $\mathbf{s}$ et par $\mathbf{O_v}(\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{s})$, ou $\mathbf{O_v}(\mathbf{s})$, l'ensemble des cheminement viables sur le chemin $\mathbf{s}$.

(C) On souligne la distinction formelle, entre cheminements et plans, qui réside dans l'indexation, par les dates $t \in \mathbf{T}^\theta$ pour les premiers, par les aléas $s \in S^\theta$ pour les seconds. Leurs liens sont explicités aux alinéas 2.4.D,E ci-après. Dans le cas déterministe (alinéa 2.1.F), plans et cheminements coïncident.

A cette distinction formelle correspond une différence d'interprétation, en ce sens qu'un cheminement sur le chemin $\mathbf{s}$ représente une **évolution** du système, con ditionnellement à l'occurrence de ce chemin, alors qu'un plan est une entité prospective (alinéa 2.3.D).

(D) Si (ξ, η) est un plan, on définit, pour chaque chemin s, un cheminement (x_s^ξ, y_s^η) sur s en posant,

(2.14) pour tout $t \in T^\theta$, (a) $x_s^\xi(t) = \xi_{s(t)}$ et (b) $y_s^\eta(t) = \eta_{s(t)}$.

Ce cheminement (x_s^ξ, y_s^η) est dit **induit** par le plan (ξ, η) sur le chemin s. Il est viable (resp. est issu de $x°$) s'il en est ainsi du plan (ξ, η). En particulier, si η est un schéma de commande viable relativement à l'état initial $x°$, alors, pour chaque chemin $s \in S$, le cheminement induit par le plan $(\Xi(x°,\eta),\eta)$, qui est noté $c_s(\Sigma,x°,\eta)$ ou $c_s(x°,\eta)$, est aussi dit **induit** par le schéma de commande η, sur le chemin s, relativement à (ou à partir de) l'état initial $x°$; c'est l'unique cheminement viable (x, y) sur s issu de $x°$ et tel que,

(2.15) pour tout $t \in T^\theta$, $y(t) = \eta_{s(t)}$ (2p).

La détermination du cheminement induit $c_s(\Sigma,x°,\eta)$, par le schéma de commande η, à partir de l'état initial $x°$, peut être considéré comme une première procédure d'exploitation par **simulation**, du modèle correspondant à la structure Σ (alinéas 2.9.C, 2.14.C, 3.14.B).

(E) Le multiplet de cheminements $(x^\xi, y^\eta) = (x_s^\xi, y_s^\eta, s \in S)$ défini par la relation (2.14) est dit **associé** au plan (ξ, η) (2q). Ce multiplet, $(x_s, y_s, s \in S)$, possède la **propriété de progressivité** :

(2.16) pour chaque $t \in T^\theta$, les composantes en t, $x_s(t)$ et $y_s(t)$, de x_s et y_s ne dépendent que de $s(t)$, en ce sens que, pour tous $s' \in S$, $s'' \in S$ et $t \in T^\theta$, $s'(t) = s''(t)$ entraîne $x_{s'}(t) = x_{s''}(t)$ et $y_{s'}(t) = y_{s''}(t)$.

Inversement, pour tout multiplet de cheminements $(x_s, y_s, s \in S)$ ayant la propriété de progressivité (2.16), il existe un plan (ξ, η) et un seul auquel ce multiplet est associé, i.e. tel que $(x^\xi, y^\eta) = (x_s, y_s, s \in S)$. Ainsi l'application $(\xi, \eta) \longrightarrow (x_s^\xi, y_s^\eta)$ est une bijection de l'ensemble des plans sur l'ensemble de ces multiplets. Un tel multiplet est appelé **plan** sous forme **extensive**, par opposition au **plan** sous forme **réduite** de départ (alinéa 2.3.A).

§ 2.5 - RESSERREMENTS DES STRUCTURES DE CONTROLE

(A) Le but premier de la théorie du contrôle réside dans la détermination de cheminements et de plans, viables et issus d'un état initial donné, via celle de schémas de commande et de stratégies convenables. Ces déterminations concernent souvent des structures de contrôle qui sont construites en plusieurs étapes, par adjonctions successives de contraintes jouant des rôles différents dans le processus de modélisation. Le cadre général de ces transformations de structures est fourni par la notion de resserrement d'une structure, notion qui est introduite ci-après (alinéa 2.5.B), puis développée au § 2.6. Ce cadre permet aussi l'analyse systématique, la classification, des divers types d'existence des plans en cause qui est envisagée ensuite aux § 2.7 et 2.8. Enfin il inclut la notion de stratégie (§ 2.9).

(B) On appelle **resserrement**, de la structure de contrôle $\Sigma = (X, Y, G, F)$, toute structure de contrôle $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$ telle que, d'une part le multiplet $Y = (Y_s, s \in S^\theta)$ des ensembles de commandes de $\underline{\underline{\Sigma}}$ est le même que celui de Σ, d'autre part $\underline{\underline{X}}$, $\underline{\underline{G}}$ et $\underline{\underline{F}}$ sont contenus dans X, G et F (2s), en ce sens que :

(2.17) pour tout $s \in S^\theta$, (a) $\underline{\underline{X}}_s \subset X_s$, (b) $\underline{\underline{G}}_s \subset G_s$;

(2.18) pour tout $s \in S^\theta_\#$, $\underline{\underline{F}}_s$ est la restriction de F_s à $\underline{\underline{G}}_{s^-}$.

On désigne par $R(\mathbf{\Sigma})$ l'ensemble des resserrements de la structure $\mathbf{\Sigma}$. Il résulte immédiatement de cette définition du resserrement que :

(2.19) si $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}$ est un resserrement de $\mathbf{\Sigma}$, (a) $\mathbf{P}(\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}) \subset \mathbf{P}(\mathbf{\Sigma})$,

(b) $\mathbf{P_v}(\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}) \subset \mathbf{P_v}(\mathbf{\Sigma})$, (c) pour tout $x^\circ \in \underline{\underline{X}}_{s^\circ}$, $\mathbf{P_v}(\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}, x^\circ) \subset \mathbf{P_v}(\mathbf{\Sigma}, x^\circ)$.

(2.20) la relation «$\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}''$ est un resserrement de $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}'$», entre les structures $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}''$ et $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}'$, est une relation d'ordre sur l'ensemble $R(\mathbf{\Sigma})$.

(C) On envisage successivement ci-après trois modes de génération d'un resserrement d'une structure de contrôle qui jouent des rôles différents, formellement ou méthodologiquement : d'une part (§ 2.6) le mode constructif, lié au processus de modélisation, qui est mentionné à l'alinéa 2.5.A ; d'autre part (§ 2.8) le mode analytique, concernant la recherche abstraite de resserrements ayant des propriétés spécifiques de viabilité ; enfin celui des stratégies (§ 2.9).

§ 2.6 - PROTOCOLES DE RESSERREMENT

(A) Le premier mode de génération d'un resserrement (alinéa 2.5.C) résulte de la diminution, du serrage, des espaces d'états ou, plus généralement, des correspondances d'admissibilité, i.e. de l'adjonction de contraintes portant sur l'état ou liant commande et état. On introduit d'abord ci-après ce second type de serrage, puis le premier comme cas particulier du second (alinéa 2.6.B).

On appelle **resserrement brut** d'une structure $\mathbf{\Sigma} = (X, Y, G, F)$ un resserrement de la forme $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}} = (X, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$, i.e. tel que l'égalité remplace l'inclusion dans la relation (2.17a). Un tel resserrement peut être engendré, "en extension", par la donnée de ses correspondances de compatibilité $\underline{\underline{G}}_s$ ($s \in S^\theta$) sous la forme :

(2.21) pour tout $s \in S^\theta$, $\underline{\underline{G}}_s = G_s \cap \Gamma_s$,

où le multiplet $\Gamma = (\Gamma_s,\ s \in S^\theta)$ est donné tel que,

(2.22) pour tout $s \in S^\theta$, Γ_s est un sous-ensemble de $X_s \times Y_s$.

Ainsi, pour chaque $s \in S^\theta$, la composante Γ_s de Γ, qui peut être considérée d'après (2.22) comme une correspondance de X_s dans Y_s, exprime "en extension" les contraintes adjointes à celles définissant la correspondance G_s.

Un multiplet $\Gamma = (\Gamma_s,\ s \in S^\theta)$ de la forme (2.22) est appelé **protocole de resserrement** relatif à la structure $\mathbf{\Sigma} = (X, Y, G, F)$, tandis que, pour chaque $s \in S^\theta$, la composante Γ_s de Γ est appelée **protocole de resserrement local** en s. La structure constituée par le resserrement brut $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}} = (X, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$ ainsi défini par (2.21) est alors dite **engendrée** par le protocole de resserrement Γ.

(B) Un exemple important de protocole de resserrement est celui où les protocoles locaux ne concernent que l'état, i.e. sont de la forme :

(2.23) pour tout $s \in S^\theta$, $\Gamma_s = \underline{X}_s \times Y_s$,

où le multiplet $\underline{X} = (\underline{X}_s,\ s \in S^\theta)$ est donné tel que,

(2.24) pour tout $s \in S^\theta$, $\underline{X}_s$ est un sous-ensemble de X_s.

Un multiplet $\underline{X} = (\underline{X}_s,\ s \in S^\theta)$ de la forme (2.24) est appelé **protocole de resserre-**

ment simple sur l'état, tandis que ses composantes $\underline{X}_s$ ($s \epsilon S^{\theta}$) sont appelées les **espaces des états** de, ou associés à, ce protocole.

On souligne que, malgré cette forme particulière des protocoles locaux, le resserrement brut $\underline{\Sigma}$ associé à un tel protocole reste conforme à la définition générale (alinéa 2.6.A), en ce sens que ses ensembles d'états restent identiques à ceux, X_s ($s \epsilon S^{\theta}$), de la structure Σ de départ, plutôt que d'être réduits, par exemple, aux ensembles d'états, $\underline{X}_s$ ($s \epsilon S^{\theta}$), du protocole : cette réduction participe des autres modes de définition d'un resserrement (§ 2.8 et 2.9).

(C) Un autre exemple important est celui des **protocoles de conditions finales**. On appelle ainsi un protocole de resserrement $\Gamma = (\Gamma_s,\ s \epsilon S^{\theta})$ tel que :

(2.25) pour tout $s \epsilon S^{\theta} \backslash S_{\theta}$, $\Gamma_s = X_s \times Y_s$.

Autrement dit, d'après la relation (2.21) ci-dessus, la correspondance de compatibilité $\underline{G}_s$ ne diffère (éventuellement) de la correspondance de départ G_s que pour les événements finaux $s \epsilon S_{\theta}$. Au demeurant, un tel protocole peut être conjugué avec un autre concernant les périodes intermédiaires $t < \theta$.

(D) La démarche formelle consistant à introduire une structure de contrôle comme resserrement brut d'une structure primaire peut intervenir à diverses étapes du processus de modélisation. Dans ce sens, on peut distinguer, parmi les resserrements bruts, deux types correspondants à des étapes différentes : d'une part (D1) ceux qui font partie de la représentation du phénomène en cause dans sa "naturalité", indépendamment du mode d'exploitation du modèle, d'autre part (D2) ceux qui participent de cette exploitation. On dira qu'il s'agit d'un (**protocole de) resserrement comportemental** dans le premier cas et d'un (**protocole de) resserrement d'exploitation** dans le second. Dans le premier cas, les contraintes de resserrement et celle de la structure primaire participent pareillement de la description du phénomène en cause et leur distinction ne fait que refléter un approfondissement dans l'analyse de ce dernier. Dans le second, par contre, les premières de ces contraintes jouent un rôle différent des secondes en ce sens qu'elles définissent des conditions relatives à l'exploitation du modèle, par exemple des conditions finales (alinéa 2.6.C ci-dessus). Toutefois, cette distinction n'est pas exclusive en ce sens que certains resserrements relèvent des deux types précédents ([2t]). Par ailleurs, dans la démarche du contrôle optimal (§ 2.10), les resserrements d'exploitation sont, à conjuguer avec une optimisation dont la signification peut donner lieu à une ambiguïté analogue à la précédente (alinéas 2.14.D,F).

§ 2.7 - STRUCTURES DE CONTROLE VIABLES ET TOTALEMENT VIABLES

(A) On dit qu'une structure de contrôle $\Sigma = (X, Y, G, F)$ est **viable** (resp. **ponctuellement viable** en $x^{\circ} \epsilon X_{s^{\circ}}$) s'il existe, pour cette structure, un plan viable (resp. un plan viable et issu de x°). On dit qu'une structure de contrôle $\Sigma = (X, Y, G, F)$ est **totalement viable** si elle est consistante et si :

(2.26) pour tous $s \epsilon S^{\theta}$ et $x \epsilon X_s$, l'ensemble $G_s(x)$ est non vide.

(B) Les propriétés (2.28) et (2.29) ci-après expriment les premiers liens entre ces notions ([2u]) :

(2.27) si une structure de contrôle est viable, elle est consistante ;

(2.28) si une structure de contrôle est totalement viable, elle est ponctuellement viable en chaque état initial, en particulier elle est viable ;

(2.29) pour qu'une structure de contrôle soit viable, il faut et il suffit, soit (a) qu'elle admette un resserrement viable, soit (b) qu'elle admette un resserrement totalement viable.

(C) Les propriétés (2.27) et (2.29a) découlent immédiatement des définitions. La propriété (2.28) résulte de ce que la propriété (2.26) permet de construire un plan (ξ, η) issu d'un état initial donné, par récurrence croissante sur $\underline{t}_s$, en choisissant, pour chaque $s \in S^\theta$, une commande η_s dans $G_s(\xi_s)$, puis en définissant, pour chaque $\sigma \in s+$, l'état ξ_σ par l'équation d'évolution $\xi_\sigma = F_\sigma(\xi_s, \eta_s)$.

La condition suffisante de la propriété (2.29b) découle de la propriété (2.28) et de la propriété (2.29a). La condition nécessaire résulte de ce que, si la structure Σ est viable et si (ξ, η) est un plan viable de cette structure, on en définit un resserrement totalement viable $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$ en posant :

(2.30) pour tout $s \in S^\theta$, $\underline{\underline{X}}_s = \{\xi_s\}$, $\underline{\underline{G}}_s = \{(\xi_s, \eta_s)\}$,

$$\underline{\underline{F}}_s(\xi_{s-}, \eta_{s-}) = \xi_s, \text{ si } s \neq s^\circ.$$

§ 2.8 - <u>NOYAUX DE VIABILITE</u>

(A) A propos du second mode de définition d'un resserrement (alinéa 2.5.C) et comme suite à la propriété (2.29b), on s'intéresse ici à l'ensemble $R_{tv}(\Sigma)$ des resserrements totalement viables d'une structure viable Σ, pour montrer que cet ensemble admet un élément maximum, le noyau de viabilité, relativement à l'ordre induit par celui de $R(\Sigma)$ (alinéa 2.5.B).

(B) Pour cela, on désigne par $\Sigma^* = (X^*, Y, G^*, F^*)$ la structure de contrôle qui est définie, avec unicité, en fonction de la structure $\Sigma = (X, Y, G, F)$, par récurrence décroissante sur $\underline{t}_s$, via les relations (2.31) à (2.34) ci-après :

(2.31) pour tout $s \in S_\theta$, $G^*_s = G_s$;

(2.32) pour tout $s \in S^\theta \backslash S_\theta$, $G^*_s = \{(x,y) \in G_s \mid \forall \sigma \in s+, F_\sigma(x,y) \in X^*_\sigma\}$;

(2.33) pour tout $s \in S^\theta$, $X^*_s = \{x \in X_s \mid \exists\, y \in Y_s, (x,y) \in G^*_s\}$;

(2.34) pour tout $s \in S^\theta_\#$, F^*_s est la restriction de F_s à G^*_s.

On note que la fonction F^*_s, définie par (2.34), applique G^*_{s-} dans X^*_s par définition (2.32) de G^*_{s-}.

La structure $\Sigma^* = (X^*, Y, G^*, F^*)$ ainsi définie est appelée **noyau de viabilité**, ou seulement **noyau**, de de la structure Σ (^{2V}). On note que certains des ensembles X^*_s et G^*_s ($s \in S^\theta$) ainsi définis peuvent être vides, ce qui fait que le noyau peut ne pas être consistant. Toutefois, il n'en est pas ainsi dès que la structure de départ Σ est viable, en ce sens que :

(2.35) pour qu'une structure Σ soit viable, il faut et il suffit que son noyau Σ^* soit totalement viable, auquel cas Σ^* est, dans l'ensemble ordonné $R(\Sigma)$, l'élément maximum du sous-ensemble $R_{tv}(\Sigma)$.

En particulier et plus précisément :

(2.36) pour qu'une structure Σ soit ponctuellement viable en un état initial x°, il faut et il suffit que x° soit un état initial de son noyau Σ^* ;

(2.37) tout resserrement totalement viable d'une structure viable est un resserrement de son noyau.

(C) Dans l'énoncé (2.35), la condition suffisante résulte directement de la propriété (2.29b). En ce qui concerne la condition nécessaire, puisque la propriété (2.26) voulue résulte de la définition (2.33) des ensembles d'état X_s^* ($s \epsilon S^\theta$) de Σ^*, il suffit d'établir que la structure Σ^* est consistante dès que la structure Σ est viable. Or, si (ξ, η) est un plan viable de la structure Σ supposée viable, on montre, par récurrence descendante sur $\underline{t}_s$, à partir des relations de définition (2.31) à (2.34) de Σ^*, que $(\xi_s, \eta_s) \in G_s^*$ et $\xi_s \in X_s^*$, pour tout $s \epsilon S^\theta$, la première de ces relations servant à l'initialisation de la récurrence. D'où la consistance de Σ^* et la condition nécessaire. De plus, l'argument précédent établit la condition nécessaire de l'énoncé (2.36), tandis que sa condition suffisante résulte directement de la propriété (2.19).

En ce qui concerne l'énoncé (2.37), il s'agit montrer que, si une structure $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$ appartient à $R_{tv}(\Sigma)$, alors $\underline{\underline{G}}_s \subset G_s^*$ et $\underline{\underline{X}}_s \subset X_s$, pour tout $s \epsilon S^\theta$. Or on déduit encore cette propriété, par récurrence décroissante sur $\underline{t}_s$, des relations de définition (2.31) à (2.34) de Σ^*.

(D) On souligne le caractère abstrait, purement existentiel, de la définition du noyau de viablilité par les relations (2.31) à (2.34), ce caractère abstrait s'opposant au caractère constructif de la définition des resserrement bruts (§ 2.6). Ainsi, pour les structures concrètes, donnant lieu aux déterminations numériques, le noyau de viabilité est en général inaccessible, "indéterminable", tant formellement que numériquement, en extension ([2w]). Sa considération n'en est pas moins importante pour l'analyse conceptuelle de ces structures et de leur exploitation (alinéa 2.14.C). En particulier, la considération, à défaut de la détermination, du noyau constitue un préliminaire de l'application du théorème de Bellman à une structure non totalement viable (alinéa 2.12.D).

§ 2.9 - STRATEGIES

(A) On appelle **stratégie**, relative à (alias de, pour) la structure de contrôle $\Sigma = (X, Y, G, F)$, toute structure de contrôle $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$, constituant un resserrement de la structure Σ, consistante et telle que,

(2.38) pour tous $s \epsilon S^\theta$ et $x \in \underline{\underline{X}}_s$, l'ensemble $\underline{\underline{G}}_s(x)$ est un singleton.

Pour chaque $s \epsilon S^\theta$, on désigne par $\underline{\underline{G}}_s^\#$ l'application de $\underline{\underline{X}}_s$ dans Y_s associant à chaque $x \in \underline{\underline{X}}_s$ l'unique élément du singleton $\underline{\underline{G}}_s(x)$. Autrement dit, la stratégie $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$ peut être considérée comme une règle, un procédé, associant, à chaque $s \epsilon S^\theta$ et chaque $x \in \underline{\underline{X}}_s$, une commande $\underline{\underline{G}}_s^\#(x)$ appartenant à $G_s(x)$ ([2Y]).

(B) Les propriétés (2.39) et (2.40) ci-après d'une stratégie découlent directement des définitions, des propriétés (2.29b) et (2.37), ainsi que, en ce qui concerne la condition suffisante de (2.39), de l'axiome du choix :

(2.39) pour qu'une structure de contrôle admette une stratégie, il faut et il suffit qu'elle soit viable ;

(2.40) toute stratégie relative à une structure de contrôle viable est un resserrement totalement viable de son noyau de viabilité.

Eu égard à la propriété (2.40), une stratégie $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$, relative à la structure $\Sigma = (X, Y, G, F)$, est dite **maximale** si :

(2.41) pour tout $s \in S^\theta$, $\underline{\underline{X}}_s = X^*_s$.

Cette propriété (2.40) pourrait justifier qu'on ne considère que des stratégies maximales, la stratégie résidant alors seulement dans le choix ([2z]), pour chaque $s \in S^\theta$ et chaque $x \in X^*_s$ d'une commande $\underline{\underline{G}}^\#_s(x)$ dans $G_s(x)$. On ne le fait pas à cause de la difficulté de la détermination du noyau, difficulté qui fait qu'on peut être contraint à utiliser des stratégies non maximales (alinéa 2.9.D).

(C) Soit $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$ une stratégie relative à la structure de contrôle $\Sigma = (X, Y, G, F)$. Un plan (ξ, η), relatif à la structure Σ, est dit **compatible** avec cette statégie si :

(2.42) pour tout $s \in S^\theta$, $\xi_s \in \underline{\underline{X}}_s$ et $\eta_s = \underline{\underline{G}}^\#_s(\xi_s)$.

Un tel plan est viable pour la structure de départ Σ. Plus précisément :

(2.43) pour chaque état initial $x° \in \underline{\underline{X}}_{s°}$, il existe, pour la stratégie $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$, un plan viable et un seul issu de $x°$.

Le plan introduit par cette propriété est dit **engendré** par la stratégie $\underline{\underline{\Sigma}}$ à partir de l'état initial $x°$. Le schéma de commande sous-jacent à ce plan est alors viable relativement à l'état initial $x°$. Ce schéma de commande et les cheminements qu'il engendre (alinéa 2.4.C) sont aussi dits **engendrés** par la stratégie $\underline{\underline{\Sigma}}$, à partir de l'état initial $x°$. Ainsi, une procédure d'exploitation par **simulation** peut être associée à une stratégie, via les schémas de commande qu'elle engendre (alinéa 2.4.D). On souligne la distinction entre schéma de commande et stratégie que met en lumière la construction (2.43) ci-dessus : le premier dépend d'un état initial, pas la seconde.

(D) Au-delà de l'existence abstraite stipulée par la propriété (2.39), l'explicitation de stratégies, relatives à une structure de contrôle viable, est un des problèmes majeurs de la théorie du contrôle (§ 2.14), la difficulté de ce problème résidant dans le caractère explicite, l'explicitation, qui est nécessaire, en pratique, sauf dans le cas fini, vu l'impossibilité d'une définition en extension, par des tables, des stratégies comme du noyau. On signale seulement à ce propos le procédé suivant de construction des stratégies de type "argument max", qui est celui amené par le théorème de Bellman (§ 2.12 et 2.13).

Dans ce sens, on appelle **fonction objectif** sous **forme locale**, pour la structure de contrôle $\Sigma = (X, Y, G, F)$, un multiplet $q = (q_s, s \in S^\theta)$ tel que, pour chaque $s \in S^\theta$, q_s est une fonction numérique sur l'ensemble G_s (constitué par la correspondance d'admissibilité de Σ en s) appelée **fonction objectif locale** en s. Cela étant, une stratégie $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{X}}, Y, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{F}})$ de la stucture Σ est dite de **type argument max**, relativement à la fonction objectif sous forme locale $q = (q_s, s \in S^\theta)$ pour la même structure, si :

(2.44) pour tous $s \in S^\theta$ et $x \in \underline{\underline{X}}_s$, $\quad q_s(x, \underline{\underline{G}}^\#_s(x)) = \sup\limits_{y \in G_s(x)} q_s(x, y)$.

Cette relation, avec X^*_s mis pour $\underline{\underline{X}}_s$, permet de construire, par récurrence croissante sur $\underline{t}_s$ $(s \in S^\theta)$, une stratégie maximale si, pour tous $s \in S^\theta$ et $x \in X^*_s$, le maximum, au second membre de (2.44) est atteint en un point de $G^*_s(x)$ et un procédé de sélection d'un tel argument max est disponible.

§ 2.10 - CONTROLE OPTIMAL

(A) Dans ce §, on donne une formulation générale du problème de contrôle optimal relatif à une structure de contrôle, un état initial de cette structure et une fonction objectif. On envisage d'abord le cas où la fonction objectif est donnée directement sous forme réduite, ce qui fait que la formulation est non probabiliste (alinéa 2.5.B), puis celui, probabiliste, où cette fonction sous forme réduite est associée à une fonction objectif sous forme extensive et à une mesure de probabilité sur l'ensemble des chemins (alinéa 2.5.C).

(B) Une **fonction objectif** sous **forme réduite**, pour la structure de contrôle $\mathbf{\Sigma} = (X, Y, F, G)$, est une fonction numérique Q sur l'ensemble $\mathbf{P_v}(\mathbf{\Sigma})$ des plans viables pour cette structure, l'image $Q(\xi, \eta)$ du plan $(\xi, \eta) \in \mathbf{P_v}(\mathbf{\Sigma})$ par cette fonction représentant une **utilité globale** de ce plan qui est à maximiser [2A]. Cela étant, le **problème du contrôle optimal**, relatif à la structure $\mathbf{\Sigma}$, à l'état initial x° et à une telle fonction objectif, s'exprime par :

(2.45) trouver un plan (ξ^*, η^*) tel que,

(a) $(\xi^*, \eta^*) \in \mathbf{P_v}(\mathbf{\Sigma}, x°)$,

(b) $Q(\xi^*, \eta^*) = \text{Sup}\ \{\ Q(\xi, \eta)\ |\ (\xi, \eta) \in \mathbf{P_v}(\mathbf{\Sigma}, x°)\ \}$.

Un plan (ξ^*, η^*) solution de ce problème est dit **optimum**, pour la structure $\mathbf{\Sigma}$, relativement à la fonction objectif Q et à l'état initial x°. Un tel plan est viable, conformément à la relation (2.45a), et, puisque $\xi^* = \Xi(x°, \eta^*)$, sa détermination est équivalente à celle de son schéma de commande η^*.

(C) Une **fonction objectif** sous **forme extensive**, pour la structure de contrôle $\mathbf{\Sigma}$, est un multiplet $Q^\# = (Q^\#_{\mathbf{s}},\ \mathbf{s} \in \mathbf{S})$ tel que, pour tout chemin $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$, $Q^\#_{\mathbf{s}}$ est une fonction numérique sur l'ensemble $\mathbf{O_v}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{s})$ des cheminements viables sur $\mathbf{s}$, l'image $Q^\#_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ du cheminement $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{O_v}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{s})$ par cette fonction représentant l'**utilité globale** de ce cheminement qui est à maximiser.

Soit π une mesure de **probabilité** sur l'ensemble (fini) $\mathbf{S}$ des chemins, mesure représentant les **inférences probabilistes** qui sont disponibles concernant ces derniers [2B]. A une fonction objectif sous forme extensive $Q^\# = (Q^\#_{\mathbf{s}},\ \mathbf{s} \in \mathbf{S})$ et à cette mesure π, on associe une fonction objectif sous forme réduite Q^π par la relation,

(2.46) $$\text{pour tout } (\xi, \eta) \in \mathbf{P_v}(\mathbf{\Sigma}), \quad Q^\pi(\xi, \eta) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}} \pi(\{\mathbf{s}\})\ Q^\#_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}^\xi_{\mathbf{s}}, \mathbf{y}^\eta_{\mathbf{s}}).$$

Le problème du contrôle optimal correspondant est alors celui, (2.45), relatif à cette fonction objectif sous forme réduite Q^π.

§ 2.11 - FONCTIONS OBJECTIF SEPARABLES

(A) Soit $q = (q_s,\ s \in S^\theta)$ une fonction objectif sous forme locale pour la structure de contrôle $\mathbf{\Sigma}$ (alinéa 2.9.D). On lui associe d'abord une fonction objectif $\hat{q}$ sous forme réduite par la relation,

(2.47) $$\text{pour tout } (\xi, \eta) \in \mathbf{P_v}(\mathbf{\Sigma}), \quad \hat{q}(\xi, \eta) = \sum_{s \in S^\theta} q_s(\xi_s, \eta_s).$$

On associe ensuite à q une fonction objectif $\hat{q}^\# = (\hat{q}^\#_{\mathbf{s}},\ \mathbf{s} \in \mathbf{S})$ sous forme extensive, par la relation, (2.48) pour tous $s \in S$ et $(x, y) \in O_V(\Sigma, s)$, $\hat{q}^{\#}_s(x, y) = \sum_{t \in T^\theta} q_{s(t)}(x(t), y(t))$.

La fonction objectif $\hat{q}$ [resp. $\hat{q}^{\#}$] définie par (2.47) [resp. par (2.48)] est dite **séparable** sous **forme réduite** [resp. sous **forme extensive**] et **engendrée** par la fonction objectif sous forme locale q.

(B) Cela étant, soit $\hat{q}^{\pi}$ la fonction objectif sous forme réduite associée, par la relation (2.46), à la mesure de probabilité π sur **S** et à la fonction objectif sous forme extensive $\hat{q}^{\#}$ définie par (2.48). Cette fonction objectif $\hat{q}^{\pi}$ s'exprime par la relation (voir l'Annexe, § A.1),

(2.49) pour tout $(\xi, \eta) \in P_V(\Sigma)$, $\hat{q}^{\pi}(\xi, \eta) = \sum_{s \in S^\theta} \pi(S_s)\ q_s(\xi_s, \eta_s)$.

Autrement dit, la fonction objectif sous forme réduite $\hat{q}^{\pi}$ est séparable et engendrée par la fonction objectif sous forme locale $q^{\pi} = (q^{\pi}_s, s \in S^\theta)$ définie, en fonction de π et de q, par la relation,

(2.50) pour tous $s \in S^\theta$, $x \in X_s$, $y \in Y_s$, $q^{\pi}_s(x, y) = \pi(S_s)\ q_s(x, y)$.

§ 2.12 - THEOREME DE BELLMAN

(A) La présentation du théorème de Bellman qui fait l'objet de ce § et du suivant a deux motifs : d'une part l'extension, de ce théorème, du cas déterministe au cas à incertitude finie [2C] ; d'autre part son lien avec la question téléologique (alinéas 2.15.E,F).

On appelle **structure de Bellman** (à incertitude finie) le couple (Σ, q) constitué par une structure de contrôle $\Sigma = (X, Y, F, G)$ et une fonction objectif sous forme locale $q = (q_s, s \in S^\theta)$ pour cette structure (alinéa 2.9.D). On dit qu'une telle structure (Σ, q) est **valuée** si, d'une part la structure de contrôle Σ est **totalement viable**, d'autre part, il existe un multiplet $V = (V_s, s \in S^\theta)$, où, pour chaque $s \in S^\theta$, V_s est une fonction numérique sur X_s, tel que :

(2.51) pour tous $s \in S_\theta$ et $x \in X_s$, $V_s(x) = \operatorname{Sup}_{y \in G_s(x)} q_s(x, y)$;

(2.52) pour tous $s \in S^\theta \backslash S_\theta$ et $x \in X_s$,

$$V_s(x) = \operatorname{Sup}_{y \in G_s(x)} [q_s(x,y) + \sum_{\sigma \in s+} V_\sigma(F_\sigma(x,y))].$$

Le multiplet $V = (V_s, s \in S^\theta)$, qui est déterminé de façon unique par ces relations, est appelé multiplet des **fonctions(-valeur) de Bellman** de la structure valuée, tandis que les relations (2.52) sont les **équations fonctionnelles de Hamilton-Jacobi-Bellman** [2E]. On dit, de plus, que la structure est **strictement valuée** si toutes les bornes sup. figurent aux seconds membres des relations (2.51) et (2.52) sont atteintes.

On note qu'au second membre de (2.52), $V_\sigma(F_\sigma(x,y))$ est bien défini pour $x \in X_s$ et $y \in G_s(x)$, d'après (2.3) et (2.4), puisque $\sigma \in s+$ entraîne $\sigma- = s$. On note aussi, d'une part le **caractère héréditaire** du multiplet V des fonctions de Bellman, en ce sens que, pour chaque $s \in S^\theta$, V_s ne dépend que des données sur le sous-arbre [s>, d'autre part le caractère **rétro-récursif** de la définition, commençant par S_θ via (2.51), puis passant de S_{t+1} à S_t via (2.52). On note enfin que, dans le cas fini, toute structure de Bellman est strictement valuée.

(B) A partir des fonctions-valeur de Bellman, on définit une nouvelle fonction objectif sous forme locale $W = (W_s,\ s\epsilon S^\theta)$, dite aussi **de Bellman**, par :

(2.53) pour tous $s\epsilon S_\theta$ et $(x,y) \epsilon G_s$, $W_s(x,y) = q_s(x,y)$,

(2.54) pour tous $s\epsilon S^\theta \backslash S_\theta$ et $(x,y) \epsilon G_s$, $W_s(x,y) = q_s(x,y) + \sum_{\sigma \epsilon s+} V_\sigma(F_\sigma(x,y))$.

(C) Cela étant, le **théorème de Bellman** consiste ici en ce que, pour une structure de Bellman strictement valuée (Σ,q) et un état initial $x°$ de la structure Σ, un plan $(\xi^*, \eta^*) = (\xi^*_s, \eta^*_s, s\epsilon S^\theta)$, viable et issu de $x°$, est optimal - relativement à la structure Σ, à l'état initial $x°$ et à la fonction objectif séparable $\hat{q}$ sous forme réduite qui est engendrée par la fonction objectif sous forme locale q - si et seulement s'il vérifie,

(2.55) pour tout $s\epsilon S^\theta$, $W_s(\xi^*_s, \eta^*_s) = \operatorname{Sup}_{y \epsilon G_s(\xi^*_s)} W_s(\xi^*_s, y)$.

De plus, un plan optimum (ξ^*, η^*) vérifie,

(2.56) pour tout $s\epsilon S^\theta$, (a) $V_s(\xi^*_s) = \sum_{\sigma \epsilon [s>\cap S^\theta} q_\sigma(\xi^*_\sigma, \eta^*_\sigma)$,

(b) $W_s(\xi^*_s, \eta^*_s) = V_s(\xi^*_u)$. En particulier :

(2.57) $\hat{q}(\xi^*, \eta^*) = V_{s°}(x°)$.

Une démonstration de cet énoncé figure en Annexe (§ A.2 à A.4). On note que la condition suffisante réclame seulement que la structure de Bellman soit valuée. On note aussi le caractère purement algébrique de cet énoncé qui apparaît comme une propriété de théorie des arbres [2C].

(D) Si la structure de Bellman de départ (Σ,q) est telle que la structure de contrôle Σ est seulement viable (et non totalement viable), on peut chercher à appliquer le théorème de Bellman à la structure (Σ^*,q). Pour cela, il faut revoir les équations de Bellman (2.51) et (2.52) pour les conjuguer avec les contraintes (2.31) à (2.34) de définition du noyau Σ^* de Σ.

§ 2.13 - <u>OPTIMISATION GLOBALE ET OPTIMISATION LOCALE</u>

(A) Dans le cas d'une structure de Bellman valuée, la propriété (2.55) du plan optimum (ξ^*, η^*) est à rapprocher de la définition (2.44), avec W mis pour q, d'une stratégie de type argument max relativement à la fonction objectif sous forme locale de Bellman W. Ainsi, l'optimisation globale correspondant au problème (2.45) est ramenée à la suite des optimisations locales (2.55) pour tous les événements $s = \mathbf{s}(t)$ du chemin $\mathbf{s}$ suivi. Cette réduction est à la base de la programmation dynamique, mais c'est surtout à cause de son lien avec la question téléologique (alinéas 2.15.E,F) qu'elle est mise en évidence ici, comme le sont les considérations suivantes (alinéas 2.13.B,C).

(B) La réduction précédente réclame la détermination préalable, en chaque $s\epsilon S^\theta$ concerné, de la fonction objectif locale W_s correspondant à l'objectif global retenu. Si la fonction objectif globale est associée à une fonction objectif séparable sous forme extensive $\hat{q}^\# = (\hat{q}^\#_s, s\epsilon S)$ et à une mesure de probabilité π sur S par la relation (2.46), la fonction W_s doit être déterminé par les relations (2.51) à (2.54), à partir de la fonction objectif sous forme locale q^π donnée par la relation (2.50). On note le caractère récursif de ces déterminations consistant en ce que W_s ne dépend que des données, y compris celles concernant la mesure de probabilité π, sur le sous-arbre [s>.

(C) On note aussi la complexité de ces déterminations, leur caractère hautement non explicite en fonction des données que sont la structure et la fonction objectif. Cependant, cette complexité ne constitue pas, au-delà des difficultés pratiques qui en résultent, le seul obstacle à une justification complète de l'exploitation correspondante (alinéas 2.14.F et 2.15.F).

§ 2.14 - RECAPITULATION : PROCEDURES D'EXPLOITATION

(A) Dans le cadre formel précédemment mis en place (§ 2.2 à 2.13), on s'intéresse ici à la formulation de **procédures d'exploitation** des (modèles correspondant aux) structures de contrôle, cela dans le but de situer, de façon évidemment non exclusive, les pratiques opératoires des deux approches en cause - l'approche de la théorie du contrôle optimal et celle de la théorie de la viabilité - en distinguant celles qui sont communes aux deux théories et celles qui sont spécifiques.

(B) Le point de départ, la **procédure primaire**, commune aux deux théories, concerne la définition de la structure de contrôle sur laquelle on va travailler, appelée **structure (de contrôle) opérationnelle** : ainsi qu'on l'a déja mentionné (alinéa 2.5.A), cette structure est en général construite, constituée, comme le **resserrement brut** Σ = (X, Y, G, F), d'une **structure primaire** $\mathring{\Sigma}$ = (X, Y, $\mathring{G}$, $\mathring{F}$), engendré par un **protocole de resserrement d'exploitation** (alinéas 2.6.A,D), cela en général, car il importe parfois que la structure opérationnelle soit la structure primaire (condition 3.14.C1). Par ailleurs, plusieurs structures opérationnelles peuvent être successivement ainsi constituées et exploitées à partir d'une même structure primaire, via divers protocoles de resserrement d'exploitation.

En théorie du contrôle optimal, cette construction de la structure opérationnelle en deux étapes est fréquente sans être obligatoire, le protocole de resserrement brut étant alors sans ambiguïté du type d'exploitation (alinéa 2.6.D), au demeurant souvent un protocole de conditions finales (alinéa 2.6.C).

En théorie de la viabilité, elle est systématique et basée sur des protocoles de resserrement simples sur l'état (alinéa 2.6.B), correspondant aux ensembles et tubes définissant les contraintes de viabilité (2F), avec souvent une ambiguïté entre les deux types de resserrement brut (alinéa 2.6.D). Cette ambiguïté, qui semble assez fondamentale, constitutive de cette théorie, est à rapprocher de ce que les phénomènes économiques y sont essentiellement envisagés dans un esprit naturaliste qui exclut toute finalité, en particulier tout appel à des procédures d'optimisation intertemporelle (2G).

(C) En première analyse, l'**exploitation** d'une structure opérationnelle Σ consiste, dans tous les cas, en la détermination de plans et de cheminements viables, via celle de schémas de commande et de stratégies convenables. Mais, cette première formulation réclame d'être affinée en distinguant dans l'exploitation un aspect pratique, de calcul numérique, et un aspect théorique, mathématique.

L'**exploitation pratique** consiste en la détermination, relativement à la stucture opérationnelle Σ, de plans et de cheminements, viables et issus d'un état initial donné, cela, soit (C1) par **optimisation**, via l'application d'un code de calcul convenable, soit (C2) par **simulation** à partir (a) d'un schéma de contrôle ou (b) d'une stratégie (alinéas 2.4.D, 2.9.C, 3.4.E, § 3.14), la détermination de cette dernière participant aussi de l'exploitation théorique C4 ci-après.

L'exploitation théorique consiste d'abord (C3) en l'étude du noyau de viabilité de la structure opérationnelle, en particulier pour le repérage, conformément à la propriété (2.36), des états initiaux en lesquelles cette structure est ponctuellement viable, repérage réclamé par l'exploitation pratique. Vu la difficulté de la détermination complète du noyau (alinéa 2.8.D), cette étude concerne, en général, seulement ou principalement, (C4) la détermination de stratégies spécifiques - qui sont des resserrements du noyau conformément à la propriété (2.37) - en vue de l'exploitation pratique C2 ci-dessus.

(D) En **théorie du contrôle optimal**, sous sa forme usuelle, un **protocole d'exploitation**, de la structure primaire $\mathring{\Sigma}$, est, formellement, un couple (Γ, Q) où $\Gamma = (\Gamma_s, s \epsilon S^{\theta})$ est un protocole de resserrement (alinéa 2.6.A) et Q une fonction objectif sous forme réduite (alinéa 2.10.B), pour cette structure. **L'exploitation pratique**, de cette structure primaire selon le protocole d'exploitation (Γ, Q), consiste alors en la détermination, pour la structure opérationnelle Σ engendrée par le protocole de resserrement Γ (alinéas 2.6.A et 2.14.B), de **plans optimums**, relativement à la fonction objectif Q et à certains états initiaux (alinéa 2.10.B), cette fonction relevant ainsi formellement du protocole d'exploitation plutôt que de la représentation du phénomène en cause, sans que cette distinction soit exclusive (alinéas 2.6.D et 2.14.F). En outre, cette détermination peut être, soit (D1) directe, par application d'un code d'optimisation convenable, soit (D2) indirecte, via la détermination préalable d'une stratégie, par exemple par application du théorème de Bellman (alinéa 2.13.A), éventuellement suivie de simulations (alinéas 2.4.D et 2.9.C).

(E) En **théorie de la viabilité**, c'est l'exploitation théorique qui est privilégiée, avec une insistance spéciale, d'une part sur la détermination du noyau de viabilité (de la structure opérationnelle) lorsqu'elle est possible, d'autre part sur la détermination directe, par explicitation, de stratégies spécifiques visant à représenter un comportement spontané, inertiel, du système ([2H]), conformément à l'esprit de la théorie (alinéa 2.14.B), l'exploitation pratique consistant alors seulement en les simulations associées à ces stratégies (alinéa 2.9.C). Dans ces conditions, le **protocole d'exploitation** réside dans les diverses démarches qui conduisent à cette explicitation de stratégies. Il est, de ce fait, difficile à formaliser. En particulier, il ne se réduit pas au protocole de resserrement engendrant la structure opérationnelle, si tant est que ce dernier en fasse partie, vu l'ambiguïté sur son type (alinéas 2.6.D et 2.14.B).

(F) Dans les modèles envisagés au § 1.4 qui font intervenir une optimisation intertemporelle dont la justification pose question (alinéas 1.4.A,B, § 2.15), l'exploitation ne relève précisément d'aucun des deux types précédents (alinéas 2.14.D,E) tout en ayant des points communs avec celle de chacun d'eux. En effet, bien que l'exploitation pratique de ces modèles consiste en la détermination de plans optimums comme en théorie du contrôle usuel (alinéa 2.14.D), cette exploitation s'apparente plutôt à celle de la théorie de la viabilité, dans son rejet de toute finalité normative, vu que le rôle, la signification épistémologique, de l'optimisation y est très différente de celle qu'elle a dans les modèle relevant de la théorie du contrôle optimal : plutôt que de faire partie du protocole d'exploitation comme dans cette théorie, l'optimisation y participe, via le choix de la fonction objectif [21], à l'expression d'un comportement spontané du système à contrôler, comme si l'évolution de ce dernier relevait d'une finalité - ou d'une fatalité - naturelle, d'une sorte de principe de moindre action macroéconomique, alors que - c'est ce qui motive la question téléologique (alinéa 1.1.D) - la justification théorique d'une telle finalité est problématique. On parlera alors d'**exploitation** du modèle par **optimisation comportementale**.

§ 2.15 - <u>FORMULATION DE LA QUESTION TELEOLOGIQUE</u>

(A) Dans le prolongement du § 2.14, on aborde ici la question téléologique (alinéas 1.1.D et 2.14.F) en en proposant diverses formulations, dans le cadre des structures de contrôle, mais en se limitant, en ce qui concerne l'équilibre intertemporel, au cas de l'optimisation comportementale (alinéa 3.18.B) : d'abord les formulations purement interrogatives, qui situent les divers types de question (alinéa 2.15.B) ; puis, pour le type concernant seulement l'optimisation comportementale, une formulation constructive (alinéa 1.2.B), reliant la question à celle des stratégies optimales, comme un rapprochement entre les plans ou cheminements déterminés par optimisation comportementale et les plans viables relativement à une structure plus riche, i.e. à un resserrement de la structure de départ (alinéas 2.15.C-I). Ces formulations seront approfondies au chapitre 3 (§ 3.16 et 3.17), grâce à la décomposition de la commande, en particulier en les reliant aux procédures d'exploitation par simulation, de structures à anticipations (alinéas 3.16.E-J).

(B) On supppose donnés, une structure de contrôle $\boldsymbol{\Sigma}$, dite **structure de référence**, et, relativement à cette structure, d'une part une fonction objectif sous forme réduite Q, d'autre part un protocole de resserrement d'exploitation Γ. On désigne par $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ la **structure opérationnelle**, qui est engendrée par le protocole de resserrement Γ à partir de la structure de référence $\boldsymbol{\Sigma}$ (alinéa 2.14.B).

Dans le cadre du modèle défini par ces données $\boldsymbol{\Sigma}$, Q, Γ, la question téléologique concerne la justification de la pertinence de plans ou de cheminements de divers types, dont la détermination relève de l'exploitation standard du modèle (§ 2.14) : d'une part (B1) [**question de type 1**] plans optimums, pour la structure $\boldsymbol{\Sigma}$, relativement à la fonction objectif Q ; d'autre part (B2) [**question de type 2**] plans viables pour la structure resserrée $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$; enfin (B3) [**question de type 1&2**] plans optimums, pour cette structure $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$, relativement à la fonction objectif Q. On note, dans la formulation des questions 1 et 1&2, la limitation au cas de l'optimisation comportementale (alinéa 3.18.B).

La justification de la pertinence du résultat d'une détermination, ici un plan ou un cheminement, concerne la validité d'une inférence prospective faite, relativement au système représenté, à partir de ce résultat. On ne cherche pas ici à approfondir cet aspect épistémologique de la question, le caractère problématique des justifications directes - de l'optimisation ou des contraintes d'exploitation en cause - étant une hypothèse qu'on ne discute pas, au-delà de ce qui en est dit aux alinéas 2.14.F, 3.14.C-G et 3.16.D : le propos est plutôt, conformément à l'orientation du texte (alinéa 1.2.B), de proposer des démarches de justification indirecte, via des formulations constructives, visant des réponses positives à la question. C'est à une telle démarche concernant la question de type 1 qu'est consacré le reste de ce § 2.15 (alinéas 2.15.C-J).

(C) La formulation constructive de la question téléologique de type 1 va reposer sur (C1) la comparaison entre les plans optimums, pour la structure de référence Σ, relativement à la fonction objectif Q, et les plans viables pour un resserrement comportemental $\underline{\underline{\Sigma}}$ de cette structure (alinéa 2.6.D). Dans ce sens, on dit que la structure $\underline{\underline{\Sigma}}$ **réalise** (resp. **réalise exactement**) la fonction objectif Q, relativement à la structure Σ et à l'état initial x^o de cette structure, si elle vérifie [2K] :

(2.58) pour qu'un plan issu de x^o soit optimum, pour la structure de référence Σ, relativement à la fonction objectif Q et à l'état initial x^o, il suffit (resp. il faut et il suffit) qu'il soit viable pour la structure resserrée $\underline{\underline{\Sigma}}$.

Dans ce cas, on dit, inversement, que la fonction objectif Q est **réalisée** (resp. **exactement réalisée**) par le resserrement $\underline{\underline{\Sigma}}$, relativement à l'état initial x^o. Le resserrement $\underline{\underline{\Sigma}}$ est alors appelé **réalisateur** (resp. **réalisateur exact**) relatif à la structure de référence Σ, à la fonction objectif Q et à l'état initial x^o. On définirait de même des **réalisateurs approchés**, par exemple (alinéa 2.15.I) en introduisant une métrique sur l'ensemble des plans, et des **réalisateurs communs** à tous les états initiaux x^o du noyau de Σ. En particulier, les réalisateurs qui sont des stratégies constituent les **stratégies optimales** relativement aux termes Σ, Q et x^o (alinéas 2.15.A et 2.15.G) [2L]. On souligne la distinction entre le réalisateur $\underline{\underline{\Sigma}}$ et le resserrement d'exploitation $\tilde{\Sigma}$, même si ces deux resserrements ne sont pas sans relations (alinéas 3.17.E,F).

(D) La **question téléologique de type 1 sous forme constructive** peut alors être formulée comme suit : (D0) étant donnés, pour la structure de référence Σ, un état initial x^o et une fonction objectif sous forme réduite Q, fonction objectif supposée telle que la justification directe de l'optimisation correspondante est problématique, peut-on trouver un resserrement de cette structure tel que, d'une part (a) ce resserrement réalise exactement (voire seulement réalise) cette fonction relativement à l'état initial x^o, d'autre part (b) ce resserrement donne lieu, contrairement à la fonction objectif Q, à une **justification claire** en tant que resserrement comportemental ?

Ainsi, dans le cas d'une réponse positive, l'optimisation comportementale - i.e. la détermination de plans optimums relativement à la structure de référence Σ, à l'état initial x^o et à la fonction objectif Q - est indirectement justifiée, puisqu'elle bénéficie, via la propriété (2.58), de la justification des plans viables pour la structure resserrée $\underline{\underline{\Sigma}}$. La pertinence de cette formulation repose évidemment sur celles de la notion de "justification claire" du resserrement en cause. On discute ci-après les questions que pose cette notion.

(E) Un exemple fondamental de réalisateur possédant la propriété D0a ci-dessus est fourni par le théorème de Bellman, lorsque la fonction objectif Q est la fonction objectif sous forme réduite $\hat{q}$ engendrée par une fonction objectif sous forme locale q. En effet, si (Σ, q) est une structure de Bellman valuée (resp. strictement valuée), avec Σ = (X, Y, F, G), ce théorème stipule précisément que la fonction objectif sous forme réduite Q = $\hat{q}$ est réalisée (resp. exactement réalisée) par le resserrement $\underline{\underline{\Sigma}}$ = (X, Y, F, $\underline{\underline{G}}$) de la structure Σ obtenu en définissant ses correspondances d'admissibilité $\underline{\underline{G}}_s$ ($s \in S^\theta$), en termes de la fonction objectif locale de Bellman W, par les relations :

(2.60) pour tous $s \in S^{\theta}$ et $x \in X_s$,

$$\underline{\underline{G}}_s(x) = \{ y^* \in G_s(x) \mid W_s(x, y^*) = \sup_{y \in G_s(x)} W_s(x, y) \}.$$

Malheureusement, cette propriété peut difficilement être considérée comme fournissant la justification (indirecte) envisagée (alinéa 2.15.D), car la propriété D0b est en défaut, puisque la construction du resserrement repose, comme point de départ, sur la fonction objectif sous forme locale q, ... dont la justification claire fait justement défaut.

(F) On souligne que l'échec précédent (alinéa 2.15.E) ne tient pas à la complexité ou au caractère hautement non explicite de la construction de la fonction objectif sous forme locale W de Bellman (alinéa 2.13.C) dont dépend le resserrement via la relation (2.60), mais à l'absence de justification de son point de départ qu'est la fonction objectif sous forme locale q. Plus généralement, il semble raisonnable d'admettre qu'une "justification claire" d'un resserrement ne réclame pas que ce dernier s'exprime de façon explicite en fonction des données, mais seulement que sa construction soit justifiée, fût-elle, comme dans le cas de la fonction W de Bellman, non explicite. Cependant, cette option est à approfondir en précisant la notion de construction explicite en cause. On commence à le faire au chapitre 3 par l'introduction des resserrements et des stratégies basées sur des anticipations (§ 3.11).

(G) Le lien étroit entre réalisateurs et stratégies optimales (alinéa 2.15.C), laisse présager - même si les premiers sont moins contraignants, puisque n'exigeant pas l'univocité des secondes - que la recherche des réalisateurs sera d'une difficulté analogue à celle des stratégies optimales, sans compter la difficulté résultant de la justification requise. Dans ces conditions, la disposition pratique de réalisateurs approchés ou ponctuels n'est pas à négliger.

Par **réalisateur ponctuel**, d'un plan (ξ, η) optimum, relativement aux termes $\mathbf{\Sigma}$, Q et x°, on entend un resserrement $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}$, de la structure $\mathbf{\Sigma}$, tel que ce plan soit aussi viable, ou approximativement viable, pour la structure $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}$. Ainsi, la disposition d'un tel réalisateur - justifié - fournit une justification de la détermination du plan (ξ, η) en cause comme plan optimum. Un exemple de ce type est présenté au chapitre 5 (propriété 5.10.F2).

(H) Dans le même esprit, i.e. pour rendre plus accessibles des réponses positives à la question téléologique, on peut envisager d'affaiblir la définition d'un réalisateur $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}$ en exigeant seulement qu'il soit un resserrement de la structure de référence $\mathbf{\Sigma}$ après une transformation de certaines composantes des commandes. Les structures à commandes doubles qui font l'objet du chapitre 3 fournissent un cadre naturel à cette extension, les composantes en cause étant celles qui correspondent au contrôle par les instances (alinéas 3.3.B,C et 3.16.I).

(I) Une situation favorable, i.e. où la propriété 2.15.D0b est satisfaite, est celle où le resserrement $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}$ en cause est la structure opérationnelle fournie par une procédure primaire (alinéa 2.14.B) clairement justifiée. Mais c'est alors la **question inverse** de la question 2.15.D0 qui peut se poser, pour des raisons pratiques liées à complexité de la structure $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}$. Cette question consiste en (I0) la recherche d'une construction "convenable", à partir de la structure $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}$, d'une fonction objectif Q réalisée, de préférence exactement, par cette structure, relativement à l'état initial x° [2M]. Ainsi, le traitement des plans optimums, pour cette fonction objectif et la structure de référence $\boldsymbol{\Sigma}$, peut remplacer celui, plus complexe, des plans viables de la structure $\underline{\underline{\Sigma}}$ (2N). On souligne que l'existence abstraite d'une telle fonction objectif, qui est toujours assurée dans le cas standard sous des hypothèses de régularité convenables (2P), ne suffit pas, en particulier pour la mise en oeuvre pratique de l'optimisation, puisque cette dernière réclame que les termes en cause, à défaut d'être explicites, soient obtenus par une construction, un procédé, algorithmique et ne soit pas d'un ordre de complexité supérieure à celui du resserrement $\underline{\underline{\Sigma}}$.

(J) L'approche précédente de la question de type 1 (alinéa 2.15.C-I) ne s'étend pas directement à la question de type 1&2, dont le contexte est pourtant le plus fréquent (alinéas 3.16.D), en particulier vu la complexité des liens entre les resserrements $\bar{\Sigma}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}$. En fait, l'introduction d'un protocole de resserrement d'exploitation rend caduque cette approche, qui ne semble pas non plus pouvoir s'appliquer à la question de type 2 : ce n'est que dans le cadre de la simulation qu'on proposera une approche constructive des trois aspects de la question (alinéa 3.16.G).

§ 2.16 - EPILOGUE DU CHAPITRE 2

(A) Au-delà de leur propos méthodologique - qui est de définir un cadre formel et des procédures, avec une terminologie systématique, plutôt que de démontrer des théorèmes - les développements de ce chapitre soulèvent de nombreux problèmes mathématiques. Certains de ces problèmes sont évoqués chemin faisant, entre autres, aux alinéas 2.1.H, 2.8.D, 2.9.D, 2.13.B,C, 2.15.D-J). Parmi eux, on souligne d'abord ceux qui concernent les liens entre la représentation de l'incertitude utilisée ici et la théorie usuelle, probabiliste, du contrôle stochastique à temps discret (§ 2.1, alinéas 1.3.F, 2.4.E, 2.10.C, § 2.12 et 2.13) (1n), puis ceux qui concernent l'extension du traitement présenté et de ces liens aux cas du temps continu ou d'un continuum d'aléas. On souligne aussi, à propos du temps continu, les problèmes liés à la théorie de la viabilité (alinéas 2.8.D et 2.14.E).

(B) Par ailleurs, en deçà de ces problèmes de recherche, bien des formulations proposées réclameraient des améliorations, tant du point de vue mathématique que du point de vue épistémologique. Le potentiel de travail disponible ne les a pas permises, mais elles sont à envisager.

CHAPITRE 3 - THEORIE DU CONTROLE ET MODELES MACROECONOMIQUES : SIMULATION, OPTIMISATION, ANTICIPATIONS ET REGULATION

On introduit dans ce chapitre les structures de contrôle, en particulier celles à anticipations, qui correspondent aux modèles macroéconomiques dont l'analyse des procédures d'exploitation est à l'origine de ce texte (§ 1.2). Après des indications sur la problématique (§ 3.1), on introduit la classe générale des structures de contrôle en cause, dites à commandes doubles (§ 3.2 et 3.3), ainsi que les plans et cheminements correspondants (§ 3.4 et 3.5), puis les anticipations (§ 3.6) et les protocoles d'anticipation (§ 3.7 et 3.8), enfin celles de ces structures qui font intervenir des anticipations (§ 3.9 à 3.11). On situe ensuite les procédures d'exploitation visées par rapport aux procédures générales de la théorie du contrôle envisagées au chapitre 2 (§ 3.12 à 3.14), en insistant sur les problèmes à optimisations multiples qu'elles posent (§ 3.15). Enfin, on revient sur la question téléologique (§ 3.16 et 3.17).

Le caractère très général, "structurel", de cette présentation permet de rendre la formulation des procédures suffisamment simples, alors qu'elle est inextricable dans la complexité des structures particulières. Dans ce sens, au-delà des indications sur les systèmes et la démarche prospective données au § 3.1 (alinéas 3.1.D-F), l'exposé reste au niveau abstrait de ces formulations générales, l'illustration par des exemples étant renvoyée aux chapitres ultérieurs.

§ 3.1 - ORIENTATION

(A) Ainsi que l'indique l'introduction ci-dessus, le propos de ce chapitre est, comme celui du chapitre 2, formel et abstrait : il s'agit de l'étude très générale des structures de contrôle - au sens donné à cette expression au chapitre 2 (§ 2.2) - qui expriment formellement les schémas intertemporels de la modélisation macroéconomique. Conformément à la démarche générale de ce texte (alinéa 1.3.D), c'est l'exposé mathématique qui dirige, sous forme axiomatique, les interprétations ne venant qu'après les considérations formelles, interprétations au demeurant elles-mêmes abstraites, vu le niveau de généralité ([11]).

Ainsi, l'exposé se situe à deux niveaux d'abstraction au dessus du discours descriptif des systèmes concrets en cause : le premier de ces niveaux est celui de la structure spécifique des modèles eux mêmes ; le second, celui de l'exposé, concerne les schémas intertemporels qui sont sous-jacents à ces modèles ([3a]). Au demeurant, cette situation est aussi celle de la théorie du contrôle, au moins telle qu'elle est envisagée au chapitre 2 (alinéas 1.2.D et 2.1.A,G,H).

(B) Dans ces conditions, le chapitre ne contient aucun détail concernant la structure ou l'exploitation des modèles macroéconomiques en cause, les références à ces derniers, dans les interprétations, restant au niveau des catégories conceptuelles ([11]). Ce caractère abstrait est compensé par les modèles présentés aux chapitres suivants. En fait, certains des schémas intertemporels présentés dans ce chapitre pourraient s'appliquer à des modèles de systèmes concrets très éloignés de ceux que représentent les modèles macroéconomiques (alinéa 3.1.D), par exemple systèmes de type technologique (en robotique, biologie, médecine, etc.), à l'orée des sciences cognitives. Cependant, on se limite à la référence aux modèles macroéconomiques pour éviter les ambiguïtés d'interprétation du formalisme, vu que l'approfondissement de ces autres références est à faire, en particulier en ce qui concerne les anticipations (alinéas 3.1.D,I,J) ([3b]).

(C) Les références aux modèles macroéconomiques et à leurs procédures d'exploitation réclament des indications délimitant, au niveau considéré des catégories conceptuelles (alinéa 3.1.B), d'une part les systèmes concrets correspondant aux modèles en cause, d'autre part la problématique d'utilisation de ces derniers en termes de prospective, problématique qui motive la question téléologique (alinéas 1.1.A,D). Ces indications sont données aux alinéas 3.1.D,E et 3.1.F ci-après, puis complétées, aux alinéas 3.1.G-M, par des commentaires montrant comment la construction formelle du chapitre leur est liée.

(D) Les **systèmes concrets** de référence (alinéa 3.1.C), dits **macroéconomiques**, sont ceux qui sont représentés, dans leur **évolution** face aux **aléas** du devenir historique, par les modèles macroéconomiques ([1a]). Concernant l'ensemble des activités humaines ayant lieu sur un territoire, on y distingue, dans une perspective d'**économie régulée**, la base physique, naturelle ou technique, et les superstructures économiques, lesquelles concernent, d'une part les **comportements spontanés**, en particulier d'**anticipation**, des **acteurs décentralisés**, dans un **cadre de marché**, d'autre part les interventions des **instances régulatrices** qui disposent d'**instruments de politique publique** susceptibles d'agir sur les comportements des acteurs décentralisés.

(E) La perspective d'**économie régulée** est ici une option de base, en ce sens que le chapitre concerne essentiellement les modèles macroéconomiques qui participent de cette perspective (alinéa 1.1.A,E et 3.1.F). Ses justifications font l'objet de la théorie de la régulation ([3c]).

L'expression "**comportement spontané**" fait référence à tous les mécanismes décisionnels de l'économie libérale sur lesquels les instances régulatrices ne peuvent agir qu'indirectement. Parmi ces mécanismes, figurent au premier chef les **anticipations** des acteurs, en tant que projections dans l'avenir, représentations de l'avenir, en fonction desquelles sont prises les décisions.

Les **aléas**, géophysiques ou sociétaux, qui conditionnent l'évolution des systèmes macroéconomiques sont - relativement - bien identifiés en ce qui concerne la multiplicité des possibles, mais leur prise en compte dans le cadre de l'approche probabiliste, de la théorie usuelle des processus stochastiques, est problématique, vu le caractère historique, unique, de cette évolution. Ainsi, les pondérations intervenant dans les objectifs des acteurs décentralisés ou des instances régulatrices représentent plutôt des préférences (comme les taux d'actualisation ou les prix) que des inférences probabilistes (de type statistique).

(F) Parmi les procédures d'exploitation des modèles macroéconomiques, procédures qui constituent la **prospective macroéconomique**, on distingue, en amont des procédés de résolution (alinéas 1.1.A,B), celles qui relèvent de la démarche de **prévision** et celles qui relèvent des démarches de **prospective exploratoire** ([3d]). La démarche de prévision, fortement marquée par le fatalisme de l'idéologie libérale, se limite à envisager "ce que risque d'être l'avenir, historiquement", essentiellement via l'extrapolation tendancielle du passé récent. De ce fait, elle ne permet pas ou mal d'appréhender les **transformations profondes**, de l'appareil productif et des superstructures ([3e]), ce qui par contre est le propos de la prospective exploratoire, laquelle cherche plutôt à appréhender, par la **mé-**

thode des scénarios ([3g]), "ce qui est techniquement et fonctionnellement possible" à un horizon déterminé ([3h]). Cela étant, les procédures de prospective exploratoire sont de plusieurs types selon l'importance des contraintes de comportement couvertes par l'expression "fonctionnellement possible".

Si cettte expression est entendue au sens large, i.e. avec peu de contraintes de comportement des acteurs décentralisés, on obtient la **prospective de base**, qui privilégie ainsi l'étude des scénarios compatibles avec l'exigence minimale de réalisme, exigence correspondant à l'expression "techniquement possible". Le présent texte ne concerne pas, au moins pas directement, cette démarche ([3i]).

Si l'expression "fonctionnellement possible" est entendue, dans la perspective d'économie régulée (alinéas 3.1.D,E), au sens strict on obtient la **prospective comportementale** et les **modèles dynamiques** auxquels on s'intéresse ici ([3j]). Les comportements des acteurs décentralisés sont alors pris en compte, en principe, de façon exhaustive, comme dans la démarche prévision, mais le sont en même temps que les interventions, des instances régulatrices, susceptibles de promouvoir les transformations visées que les comportement spontanés, des acteurs décentralisés, ne suffisent pas à engender. Les études exploratoires portent alors sur ces interventions, par exemple en fonction du **principe de précaution** ([3k]).

(G) Pour terminer ce § d'orientation, on commente ci-après les principaux concepts introduits dans le chapitre en termes des caractéristiques concrètes dégagées aux alinéas 3.1.D-F, cela en supposant connue, au moins dans ses grandes lignes, la problématique de la théorie du contrôle présentée au chapitre 2.

La dualité, mise en évidence dans les systèmes macroéconomiques, entre (les deux types d'acteurs que sont) les acteurs décentralisés et les instances régulatrices (alinéa 3.1.D,E) s'exprime, dans les structures de contrôle à commandes doubles (§ 3.2 et 3.3), par le dédoublement des (variables de) commandes de la structure (alinéa 2.2.C) en deux composantes ([3m]) : celle qui représente les comportements spontanés des acteurs décentralisés et celle qui représente les interventions des instances régulatrices, le terme de "contrôle" étant réservé à ces dernières, tandis que le terme "dynamique" correspond aux premiers (alinéas 3.2.B, 3.3.C, 3.4.D). Cette dualité joue un rôle essentiel dans tout l'exposé, en particulier dans les traitements des anticipations (§ 3.6 à 3.11) et des procédures d'exploitation par simulation (§ 3.14). Cependant, qui peut le plus peut le moins, le même formalisme peut aussi représenter une évolution sans contrôle des instances, dans une démarche de prévision (alinéas 3.1.F et 3.14.F).

(H) Ainsi, un **plan**, relatif à une structure de contrôle à commandes doubles (alinéa 3.4.C), peut être considéré - en tant qu'entité prospective (alinéa 2.3.D) - comme une projection ([3n]), par les instances régulatrices, récapitulant à la fois les contrôles que ces dernières envisagent, les états successifs du système et les comportements, les dynamiques, spontané(e)s correspondant à ces contrôles. De plus, pour chaque hypothèse de scénario concernant les aléas, hypothèse représentée par une succession d'aléas appelée **chemin** (alinéa 2.1.E), le **cheminement** induit par un plan sur ce chemin (alinéa 2.4.D et 3.5.C) représente le déroulement du plan correspondant à ce scénario. Dans le cas de la prévision, (alinéa 3.1.F), seuls les cheminements sont à considérer.

(I) Au niveau de généralité de l'exposé (alinéa 3.1.B) les divers acteurs décentralisés ne sont pas représentés individuellement mais seulement comme un tout, un complexe, qui n'est pas décomposé, analysé, ici, mais doit l'être lors de la spécification d'un modèle (alinéa 3.18.B, § 4.2, 4.10, 5.2, 5.3). En particulier, les diverses anticipations de ces acteurs en interactions ne sont représentées, à chaque instant, que comme un complexe, appelé **anticipation** à cet instant (alinéa 3.6.A), complexe qui est de la même nature, d'entité prospective, qu'une plan (alinéa 3.1.H), mais concernent les projections des acteurs décentralisés plutôt que celles des instances régulatrices (alinéa 3.6.B).

(J) Dans ces conditions, les déterminants des anticipations sont représentés en extension par un ensemble de contraintes appelé **protocole d'anticipation** (§ 3.7 et 3.8). Cette condensation, symbolisation, permet d'exprimer - de façon relativement simple - comment les anticipations aux instants successifs (au sens précédent) se conjuguent pour engendrer la dynamique spontanée du système, celle des acteurs décentralisés, cette conjugaison se traduisant par la définition d'une structure de contrôle à commandes doubles, dite à anticipations, à partir d'une structure de base et du protocole d'anticipation (§ 3.9 à 3.11) ([3o]).

(K) L'appareil formel ainsi mis en place permet, aux § 3.12 à 3.17, de préciser les procédures d'exploitation précédemment envisagées au chapitre 2 (§ 2.14 et 2.15), ainsi que les questions que posent ces procédures dans le cadre de la prospective comportementale (alinéa 3.1.F), cela en mettant l'accent sur la **justification** de leur **pertinence**, en liaison avec la question téléologique.

Dans ce sens, on commence par expliciter (§ 3.13 et 3.14), dans ce cadre, la procédure d'exploitation par **simulation** et, sous forme de **règles d'inférence**, des conditions pour que les plans et les cheminements obtenus par simulation puissent être "proposés comme inférences raisonnables de l'exploitation prospective du modèle en cause" (alinéas 3.14.B,D,G,H,J). Ces règles sont une expression du **principe de causalité** dans le cadre des structures à commandes doubles (alinéa 3.14.C). Elles reposent sur deux distinctions : d'une part la distinction entre la simulation elle-même, qui se fait à (schéma de) contrôle donné (alinéas 3.14.B,K) ([3p]), et la détermination de ce dernier en fonction des visées normatives des instances régulatrices (alinéas 3.1.F, 3.14.H-J, 3.16.J, § 3.15) ; d'autre part la distinction entre les **contraintes comportementales**, qui expriment les comportements des acteurs décentralisés, et les **contraintes d'exploitation**, qui expriment ces visées normatives (alinéas 2.6.D, 3.12.B,D,E,G,H, 3.14.B,C,H, 3.16.H).

(L) On revient enfin (§ 3.16 et 3.17) sur la question téléologique, dans le cadre général des structures de contrôle à commandes doubles, en s'appuyant de nouveau sur les distinctions précédentes. Pour cela, on commence par formuler, dans ce cadre, la procédure usuelle, par optimisation intertemporelle, utilisée couramment dans l'exploitation des modèles intertemporels et qui est à l'origine de la question (alinéas 1.1.A,D, § 1.4 et 1.5). Cette formulation permet de préciser la question en la liant à la remarque que, dans cette procédure, les deux distinctions précédentes sont justement ignorées (alinéa 3.16.D,J), ce qui renforce la perplexité sur la pertinence des cheminements ainsi obtenus.

(M) Cela étant, conformément à l'approche constructive (alinéa 1.2.B), on étudie une formulation indirecte, reposant sur la recherche d'un protocole d'anticipation tel que la simulation relative à la structure à anticipations associée à ce protocole (alinéas 3.1.J,K) redonne, ne serait-ce qu'approximativement, les cheminements optimums de la procédure en question (alinéas 3.16.E-H). Ainsi, en cas d'obtention d'un tel protocole, cette procédure pourrait être indirectment justifiée par la simulation, pourvu que ce protocole soit lui-même justifié. On souligne le rôle joué par la procédure de simulation dans cette justification indirecte : l'approche constructive de la question téléologique proposée ici repose sur la conception méthodologique selon laquelle seuls sont pertinents les cheminements pouvant être obtenus par simulation (alinéa 3.14.G), dans des conditions convenables, liées au principe de causalité (alinéa 3.14.D,G).

§ 3.2 - DONNEES DE BASE

(A) Les structures de contrôle auxquelles on s'intéresse dans ce chapitre, i.e. celles qui expriment les schémas intertemporele requis par les diverses procédures de prospective macroéconomique (alinéas 3.1.A,E,F) ([3q]), vont être définies (§ 3.3) dans un cadre spécifique dont on commence, dans le présent § 3.2, par définir les composants. Ces composants, les **données de base**, se répartissent en données extensives et données fonctionnelles, de base, qui sont introduites aux alinéas 3.2.B-E ci-après.

Comme au chapitre 2, le déroulement temporel et l'environnement externe du système sont pris en compte de façon discrète, par un **arbre d'événements** fini S, en particulier en **horizon fini** (alinéas 2.1.G,H). Cet arbre constitue la **donnée de situation**, conformément aux alinéas 2.1.B-F, avec les mêmes notations et la même terminologie, en particulier en ce qui concerne la limitation aux ensembles S^θ et T^θ, l'entier $\theta \in T$ étant toujours fixé (alinéas 2.1.E et 3.7.B).

(B) Les **données extensives de base** sont constituées par trois multiplets d'ensembles **non vides** indexées par les événements $s \in S$: le multiplet $E = (E_s,\ s \in S)$ des ensembles d'**états** (éventuels) du système, le multiplet $D = (D_s,\ s \in S)$ des ensembles de **dynamiques**, le multiplet $U = (U_s,\ s \in S)$ des ensembles de **contrôles**.

Aucune structure particulière n'est requise a priori sur ces ensembles, même si on emploie parfois les concernant le vocable "espace" qui correspond au **cas standard**, cas où ils sont tous des espaces standards (alinéa 2.2.E). En particulier, il est utile de considérer le cas, dit **cas fini**, où ils sont tous finis.

Par ailleurs, le cas où tous les ensemble de contrôle U_s ($s \in S$) sont des singletons est dit **sans contrôle**. Il permet de prendre en compte, dans le même cadre formel, des systèmes sans contrôle des instances (alinéa 3.4.F) ([3s]).

(C) Pour chaque $s \in S$, d'une part chaque élément e de l'ensemble E_s [resp. d de D_s] représente un **état** possible [resp. une **dynamique** (de fonctionnement spontané)] des acteurs décentralisés, dans l'éventualité s, d'autre part chaque élément u de U_s représente, dans la même éventualité, un **contrôle instantané** par les instances régulatrices. On indique ci-après comment ces termes sont reliés à la problématique des systèmes macroéconomiques en cause (alinéas 3.1.D,E).

Le vocable "état" est employé ici dans le sens qu'il a en théorie du contrôle (alinéa 2.2.C). Il couvre les divers types de stocks intervenant dans les systèmes en cause (alinéa 3.1.D) : état naturel du territoire, équipements ou stocks de matières, avoir financiers, acquis culturels, informations sur le passé, etc.

Le vocable "dynamique" est employé, en tant que substantif, comme abréviation de "dynamique de fonctionnement", voire comme synonyme de "fonctionnement". Il couvre les divers types de flux (productions, consommations, investissements, etc.), mais également les prix et les décisions des acteurs décentralisés qui conditionnent les flux.

Le vocable "contrôle" est employé ici, au chapitre 3, précisément comme abréviation de "contrôle par les instances régulatrices", alors que le vocable "commande" a été employé, au chapitre 2, dans le contexte plus général de la théorie du contrôle (alinéa 2.2.B) : le contrôle est ici seulement une composante de la commande, celle "des instances régulatrices" (alinéa 3.3.C,D).

Au-delà de ces interprétations générales, les éléments des ensembles E_s et D_s, d'une part, U_s, d'autre part, vont jouer des rôle assez différents dans l'exploitation du modèle, en ce sens que les premiers, $e \in E_s$ et $d \in D_s$, représentent les modalités des variables endogènes de base, correspondant à l'évolution naturelle, spontanée, du système, tandis que les seconds, $u \in U_s$, représentent les modalités des variables de contrôle dont disposent des instances régulatrices pour orienter cette évolution, variables endogènes ou exogènes selon le mode d'exploitation (alinéas 3.4.B, 3.12.B, 3.14.B,H, 3.16.D,E,J).

De plus, on souligne que, dans la représentation proposée, le rôle des instances régulatrices est seulement réglementaire, de contrôle, une éventuelle activité économique, directe, de la puissance publique étant prise en compte, via les variables d'état et de dynamique, comme activité des acteurs décentralisés.

(D) Les **données fonctionnelles de base** sont constituées par deux multiplets : celui $g = (g_s,\ s \in S)$ des **correspondances d'admissibilité** g_s (de la dynamique par rapport à l'état et au contrôle) et celui $f = (f_s,\ s \in]s°>)$ des **fonctions d'évolution** f_s (de l'état). Ces multiplets sont supposés tels que :

(3.1) pour chaque $s \in S$, g_s est un sous-ensemble non vide de $E_s \times D_s \times U_s$;

(3.2) pour chaque $s \in]s°>$, f_s est une application de $E_{s-} \times D_{s-} \times U_{s-}$ dans E_s.

Pour chaque $s \in S$, g_s est considéré comme une correspondance de $E_s \times U_s$ dans D_s et, pour chaque $(e,u) \in E_s \times U_s$, on note $g_s(e,u)$ l'image de (e,u) par cette correspondance, i.e. l'ensemble $\{d \in D_s \mid (e,d,u) \in g_s\}$.

Ces données fonctionnelles de base représentent l'ensemble des contraintes, de base, d'infrastructure, qui conditionnent l'évolution du système en étant communes à tous ses acteurs, acteurs décentralisés ou instances régulatrices (alinéas 3.1.D,E) : conservation des quantités et des valeurs, compatibilité des fonctionnements avec les encours, conditions d'évolution de ces derniers, conventions comportementales de base, etc.

(E) Chaque multiplet $\Delta = (S,\ \theta,\ E,\ D,\ U,\ g,\ f)$ de données - de situation, extensives et fonctionnelles de base - est appelé **jeux de données de base**. Chacun de ces jeux fournit le cadre formel d'une classe de structures de contrôle du type envisagé ici (§ 3.3 et 3.11). Dans toute la suite on suppose qu'un tel jeu Δ est donné. On suppose aussi donné un entier τ, appelé **profondeur** (des anticipations), tel que (alinéa 3.7.B) :

(3.3) $0 \leq \tau < T - \theta$.

§ 3.3 - STRUCTURES DE CONTROLE A COMMANDES DOUBLES

(A) Dans ce § 3.3, on délimite le cadre formel associé à un jeu de données de base Δ (alinéa 3.2.E), cela en définissant la classe générale des structures de contrôle, dites à commandes doubles, qui prennent en compte la dualité entre les acteurs décentralisés et les instances régulatrices (alinéa 3.1.D,E). Toutes les structures de contrôle intervenant dans ce chapitre, en particulier celles à anticipations (§ 3.11) vont appartenir à cette classe et, plus particulièrement, vont être des resserrements d'une structure à commandes doubles, dite de base, qui est caractéristique des données de base (alinéa 3.3.E). Comme préliminaire, on définit les divers types d'agencement des contrôles (alinéa 3.3.B).

(B) Pour chaque $s \in S^{\theta}$ (^{3t}), on appelle **schéma de contrôle**, de **profondeur** τ, en s, tout élément de l'ensemble produit $\prod_{\sigma \in [s,\tau]} U_{\sigma}$, noté $\mathbf{U}_s(\Delta,\tau)$ ou $\mathbf{U}_s(\tau)$ voire, $\mathbf{U}_s$, i.e. tout multiplet $\underline{u} = (\underline{u}_{\sigma},\ \sigma \in [s,\tau])$ tel que $\underline{u}_{\sigma} \in U_{\sigma}$ pour tout $\sigma \in [s,\tau]$. On appelle **schéma de contrôle**, de **profondeur** τ, tout multiplet $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s,\ s \in S^{\theta})$, élément de l'ensemble produit $\prod_{s \in S^{\theta}} \mathbf{U}_s(\Delta,\tau)$, noté $\mathbf{U}(\Delta,\tau)$ ou $\mathbf{U}(\tau)$, i.e. tout multiplet $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{s,\sigma},\ s \in S^{\theta}\ \sigma \in [s,\tau])$ tel que $\mathbf{u}_{s,\sigma} \in U_{\sigma}$ pour tous $s \in S^{\theta}$ et $\sigma \in [s,\tau]$, le multiplet $\mathbf{u}_s = (\mathbf{u}_{s,\sigma},\ \sigma \in [s,\tau])$ étant appelé la **composante** en $s \in S^{\theta}$ du schéma **u**. Les schémas de contrôle, en chacune des éventualités $s \in S^{\theta}$, vont constituer l'une des composantes de la commande en s des structures de contrôle en cause (alinéa 3.3.C). En particulier, lorsque la profondeur τ est nulle, l'ensemble produit $\mathbf{U}_s(0)$ est identifié à l'ensemble U_s et un schéma de contrôle $\underline{u} \in \mathbf{U}_s(0)$ à un contrôle instantané $u \in U_s$, pour chaque $s \in S^{\theta}$. Lorsque la profondeur τ est fixée sans ambiguité, $\mathbf{U}_s(\tau)$ est noté $\mathbf{U}_s$ ($s \in S^{\theta}$) et $\mathbf{U}(\tau)$ noté $\mathbf{U}$.

Un schéma de contrôle $\underline{u}$, en $s \in S^{\theta}$, représente une modalité d'intervention des instances régulatrices si l'événement s a lieu (alinéas 3.1.D,E et 3.3.D), tandis qu'un schéma de contrôle $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s,\ s \in S^{\theta})$ récapitule les interventions en les divers événements $s \in S^{\theta}$.

(C) Une structure de contrôle $\boldsymbol{\Sigma} = (X,\ Y,\ G,\ F)$ est dite **à commandes doubles**, relativement au jeu de données de base Δ et à la profondeur τ, si elle vérifie les conditions (3.4) à (3.6) :

(3.4) pour tout $s \in S^{\theta}$, (a) $X_s \subset E_s$, (b) $Y_s = D_s \times \mathbf{U}_s(\tau)$;

(3.5) pour tout $s \in S^{\theta}$ et tout $(e,d,\underline{u}) \in E_s \times D_s \times \mathbf{U}_s(\tau)$,

(a) $(e,d,\underline{u}) \in G_s$ entraîne $(e,d,\underline{u}_s) \in g_s$;

(3.6) pour tout $s \in S^{\theta}_{\#}$ et tout $(e,d,\underline{u}) \in G_{s-}$,

(a) $F_s(e,y) = f_s(e,d,\underline{u}_{s-})$, si $y = (d,\underline{u}_{s-})$.

Ces conditions expriment comment les données de base conditionnent la structure considérée. En particulier, la relation (3.4b) exprime qu'une commande $y \in Y_s$ est un couple $(d,\underline{u})$, i.e. a deux composantes $d \in D_s$ et $\underline{u} \in \mathbf{U}_s$, d'où le qualificatif "**à commandes doubles**" donné aux structures en cause. Pour tout $s \in S^{\theta}_{\#}$, le terme $F_s(e,y)$, avec $y = (d,\underline{u}) \in Y_{s-}$, est aussi noté $F_s(e,d,\underline{u})$.

En vertu des interprétations données aux dynamiques $d \in D_s$ et aux schémas de contrôle $\underline{u} \in \mathbf{U}_s(\tau)$ en s (alinéas 3.2.C et 3.3.B), ce dédoublement de la commande exprime la dualité, en particulier décisionnelle, mise en évidence dans les systèmes macroéconomiques entre (les deux types d'acteurs que sont) les acteurs décentralisés et les instances régulatrices (alinéa 3.1.D,E).

(D) On souligne que, lorsque la profondeur τ est > 0, la seconde composante $\underline{u}$ de la commande $y = (d,\underline{u})$ est un schéma de contrôle et non un contrôle instantané. Cette propriété annonce l'anticipation, puisqu'elle stipule que, dans ce cas

$\tau > 0$, la compatibilité, en s, de la première composante $d \in D_s$ de la commande avec l'état $e \in E_s$ - compatibilité qu'exprime la relation $(e,d,\underline{u}) \in G_s$ - peut dépendre des contrôles instantanés $\underline{u}_\sigma$ en les éventualités σ postérieures à s que contient le sous-arbre $[s,\tau]$ si $\tau > 0$. On souligne aussi que, par contre, les données de base ne concernent, conformément aux relations (3.1) et (3.2), que les contrôles instantanés. Il s'agit là d'une convention concernant les structures à anticipation : (D1) la dépendance vis-à-vis du schéma de contrôle n'est pas totalement prise en compte par les données de base, mais par des structures à commandes doubles qui sont des resserrements de la structure de base (alinéa 3.3.E), éventuellement à anticipations (alinéa 3.10.C et § 3.11).

(E) Les fonctions d'évolution F_s $(s \in S^\theta_\#)$, d'une structure de contrôle à commandes doubles, sont canoniquement définies par les fonctions de base f_s et les relations (3.6). Par contre les relations (3.5) laissent en général les correspondances G_s $(s \in S^\theta)$ largement indéterminées. Dans ce sens, on désigne par $\boldsymbol{\Sigma}_b(\Delta,\tau)$, ou seulement $\boldsymbol{\Sigma}_b(\tau)$, voire $\boldsymbol{\Sigma}_b$, la structure à commandes doubles, dite **de base** pour la profondeur τ, la plus sous-déterminée, i.e. telle que, pour chaque $s \in S^\theta$, $X_s = E_s$ et G_s est l'ensemble des triplets $(e,d,\underline{u}) \in E_s \times D_s \times \mathbf{U}_s(\tau)$ tels que $(e,d,\underline{u}_s)) \in g_s$. Ces structures, pour les diverses profondeurs τ, vont jouer un rôle de référence (alinéas 3.11.D, 3.12.D, 3.16.B). On note que les hypothèses sur les données de base (alinéa 3.2.B,D) font qu'elles sont consistantes.

(F) Une structure de contrôle à commandes doubles $\boldsymbol{\Sigma} = (X, Y, G, F)$ relative à la profondeur τ peut être considérée canoniquement comme relative à la profondeur $\tau' > \tau$: il suffit d'associer à $\boldsymbol{\Sigma}$ la structure $\boldsymbol{\Sigma}' = (X, Y', G', F')$, relative à la profondeur τ', obtenue en définissant, pour chaque $s \in S^\theta$, G'_s comme ensemble des triplets $(e,d,\underline{u}') \in E_s \times D_s \times \mathbf{U}_s(\tau')$ tels que $(e,d,\Pi^U_s(\underline{u}')) \in G_s$, où Π^U_s désigne la projection canonique de $\mathbf{U}_s(\tau')$ sur $\mathbf{U}_s(\tau)$.

§ 3.4 - <u>PLANS</u>

(A) Dans ce § et le suivant, on considère les plans et les cheminements relatifs, soit à une structure de contrôle à commandes doubles, $\boldsymbol{\Sigma} = (X, Y, G, F)$, soit aux structures à contrôle spécifié $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ $(\mathbf{u} \in \mathbf{U})$ qui lui sont associées (alinéa 3.4.B).

(B) Pour chaque schéma de contrôle $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s,\ s \in S^\theta)$, la **structure** (de contrôle) **à contrôles spécifiés** par u, associée à la structure de contrôle à commandes doubles $\boldsymbol{\Sigma} = (X, Y, G, F)$, est la structure de contrôle $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{u}} = (X, D, F^{\mathbf{u}}, G^{\mathbf{u}})$ dont, d'une part le multiplet des espaces d'états est celui $X = (X_s,\ s \in S^\theta)$ de la structure $\boldsymbol{\Sigma}$ de départ et le multiplet des espaces de commandes est celui de base $D = (D_s,\ s \in S^\theta)$, d'autre part les données fonctionnelles $G^{\mathbf{u}}$ et $F^{\mathbf{u}}$ sont définies, en fonction de celles de la structure $\boldsymbol{\Sigma}$, par les relations :

(3.7) pour tous $s \in S^\theta$, $G^{\mathbf{u}}_s = \{\ (e,d) \in E_s \mid (e,d,\mathbf{u}_s) \in G_s\ \}$,

(3.8) pour tous $s \in S^\theta_\#$, $e \in E_{s-}$, $d \in D_{s-}$, (a) $F^{\mathbf{u}}_s(e,d) = F_s(e,d,\mathbf{u}_{s-})$.

On note que, d'après la relation (3.6), (3.8) ci-dessus s'écrit aussi,

(3.8') pour tous $s \in S^\theta_\#$, $e \in E_{s-}$, $d \in D_{s-}$, (a) $F^{\mathbf{u}}_s(e,d) = f_s(e,d,\mathbf{u}_{s-,s-})$.

Ainsi, dans cette structure $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathbf{u}}$, le schéma de contrôle u est un paramètre exogène, tandis que, pour chaque $s \in S^\theta$, les commandes sont les dynamiques $d \in D_s$.

(C) Un **plan**, relatif à la structure à commande double Σ, est, par définition (alinéas 2.3.A,B), un triplet $(\xi, \zeta, u) = (\xi_s, \zeta_s, u_s, s \in S^\theta)$ tel que,

(3.9) pour tout $s \in S^\theta$, (a) $\xi_s \in X_s$, (b) $\zeta_s \in D_s$, (c) $u_s \in U_s$.

Un tel plan (ξ, ζ, u) est **viable** [resp. **admissible**] (pour la structure Σ) s'il vérifie les conditions (3.10) et (3.11) [resp. les conditions (3.10)], avec :

(3.10) pour tout $s \in S^\theta$, (a) $(\zeta_s, \xi_s, u_s) \in G_s$;

(3.11) pour tous $s \in S^\theta_\#$, (a) $\xi_s = F_s(\xi_{s-}, \zeta_{s-}, u_{s-})$.

Un **plan**, relatif à la structure Σ^u à contrôles spécifiés par la schéma de contrôle **u**, est un couple $(\xi, \zeta) = (\xi_s, \zeta_s, s \in S^\theta)$ vérifiant les conditions (3.9a,b). De plus :

(3.12) pour que le triplet (ξ, ζ, u) soit un plan viable [resp. admissible] pour la structure à commandes doubles Σ, il faut et il suffit que le couple (ξ, ζ) soit un plan viable [resp. admissible] pour la structure Σ^u à contrôles spécifiés par le schéma de contrôle **u**.

Cette propriété autorise à considérer un plan comme un triplet (ξ, ζ, u), même s'il s'agit de la structure à contrôles spécifiés contrôle Σ^u.

(D) Un plan (ξ, ζ, u), relatif à la structure de contrôle à commandes doubles Σ, peut être considéré - en tant qu'entité prospective (alinéa 2.3.D) - comme une projection ([3n]), par les instances régulatrices (alinéa 3.1.D,E), récapitulant, via les termes **u**, ξ et ζ, respectivement les contrôles que ces dernières envisagent, les états successifs du système et les comportements, les dynamiques, spontané(e)s correspondant à ces contrôles. Le schéma de commande sous-jacent à ce plan (alinéa 2.3.A) est alors constitué du couple (ζ, u), le terme ζ représentant ainsi la composante spontanée de la commande, tandis que le terme **u** représente la composante qui relève des instances régulatrices (alinéas 3.1.D,E et 3.3.B).

Dans ce sens, le couple (ξ, ζ) et sa composante ζ sont appelés respectivement la **partie spontanée** et le **schéma de commande spontané**, du plan, tandis que **u** en est appelé le **schéma de contrôle** (alinéa 3.3.B).

(E) Les structures à contrôles spécifiés vont jouer dans la suite un rôle essentiel, entre autres en ce qui concerne les procédures d'exploitation par **simulation** (§ 3.14), lesquelles reposent sur la condition d'univocité qui consiste en ce que, lorsque l'état initial est donné, le schéma de contrôle suffit à déterminer le plan, i.e. son schéma de commande spontané (§ 3.13), ce qui a lieu si la structure à contrôles spécifiés est suffisamment resserrée pour que son noyau soit une stratégie. En particulier, lorsque la structure en cause est à anticipations, on obtient ainsi les liens annoncés entre simulation et anticipation (alinéa 3.14.K), si le protocole d'anticipation est suffisamment serré pour que cette condition soit satisfaite (alinéa 3.13.E).

(F) Dans le cas où le jeu de données de base est sans contrôle (alinéa 3.2.B), cas où l'ensemble U est un singleton, les structures Σ et Σ^u sont d'utilisations équivalentes et le cadre naturel est celui de la structure Σ^u ([3s]). En particulier, un plan est alors réduit à sa partie spontanée (alinéa 3.4.D).

(G) On désigne : par $\Pi(\Delta,\tau)$ ou seulement $\Pi(\tau)$ l'ensemble $\prod_{s \in S^\theta} E_s \times D_s \times U_s$ des plans relatifs à la structure de base $\Sigma_b(\Delta,\tau)$ et par $\Pi^\circ(\Delta)$ ou seulement Π° l'ensemble $\prod_{s\in S^\theta} E_s\times D_s$ des parties spontanées de ces plans ; par $\Pi_v(\Delta,\tau,e°)$ ou seulement $\Pi_v(e°)$ [resp. par $\Pi_v^u(\Delta,\tau,e°)$ ou seulement $\Pi_v^u(e°)$] l'ensemble des plans viables issus de l'état initial e° pour cette structure [resp. pour la structure $\Sigma_b^u(\tau)$, à contrôles spécifiés par **u**, associée à cette structure] ([3u]).

§ 3.5 - CHEMINEMENTS

(A) Afin de présenter, comme suite au § 3.4, les cheminements (alinéa 3.5.B), relatifs à la structure de contrôle à commandes doubles $\boldsymbol{\Sigma}$ = (X, Y, G, F), on complète comme suit les notations de l'alinéa 3.3.B en ce qui concerne un chemin $\mathbf{s} = (\mathbf{s}(t),\ t\in T^\theta)$ (alinéa 2.1.E). On désigne d'abord par $\Omega(\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{s})$ l'ensemble des couples (**e**, **d**) tel que les termes **e** et **d** sont des suites $(\mathbf{e}(t),\ t\in T^\theta)$ et $(\mathbf{d}(t),\ t\in T^\theta)$ dont les **composantes** **e**(t) et **d**(t) $(t\in T^\theta)$ vérifient,

(3.13) pour tout $t\in T^\theta$, (a) $\mathbf{e}(t) \in E_{\mathbf{s}(t)}$, (b) $\mathbf{d}(t) \in D_{\mathbf{s}(t)}$.

On désigne ensuite par $\mathbf{U}_\mathbf{s}$ l'ensemble des suites $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{u}}(t),\ t\in T^\theta)$ telles que,

(3.14) pour tout $t\in T^\theta$, (a) $\hat{\mathbf{u}}(t) \in U_{\mathbf{s}(t)}$,

et, si $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s,\ s\in S^\theta)$ est un schéma de contrôle, par $\mathbf{u}_\mathbf{s}$ l'élément de $\mathbf{U}_\mathbf{s}$ tel que,

(3.15) pour tout $t\in T^\theta$, (a) $\mathbf{u}_\mathbf{s}(t) = \mathbf{u}_{\mathbf{s}(t)}$.

(B) Un **cheminement**, sur le chemin $\mathbf{s} = (\mathbf{s}(t),\ t\in T^\theta)$, relatif à la structure à commandes doubles $\boldsymbol{\Sigma}$, est, par définition (alinéa 2.4.A), un triplet (**e**, **d**, $\hat{\mathbf{u}}$) tel que $(\mathbf{e},\mathbf{d}) \in \Omega(\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{s})$ et $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}_\mathbf{s}$. Ce cheminement est **viable** si :

(3.16) pour tout $t\in T^\theta$, $(\mathbf{e}(t),\mathbf{d}(t),\hat{\mathbf{u}}(t)) \in G_{\mathbf{s}(t)}$,

(3.17) pour tout $t\in T^\theta$, $\mathbf{e}(t+1) = F_{\mathbf{s}(t+1)}(\mathbf{e}(t),\mathbf{d}(t),\hat{\mathbf{u}}(t))$, si $t < \theta$.

Un **cheminement**, sur le chemin $\mathbf{s} = (\mathbf{s}(t),\ t\in T^\theta)$, relatif à la structure à contrôles spécifiés $\boldsymbol{\Sigma}^\mathbf{u}$, est un couple $(\mathbf{e},\mathbf{d}) \in \Omega(\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{s})$. Le triplet (**e**, **d**, $\mathbf{u}_\mathbf{s}$) est alors un cheminement, sur le chemin **s**, relatif à la structure $\boldsymbol{\Sigma}$, et on a :

(3.18) pour que, sur le chemin **s**, le triplet (**e**, **d**, $\mathbf{u}_\mathbf{s}$) soit un cheminement viable pour la structure à commandes doubles $\boldsymbol{\Sigma}$, il faut et il suffit que le couple (**e**, **d**) soit un cheminement viable pour la structure $\boldsymbol{\Sigma}^\mathbf{u}$ à contrôles spécifiés par le schéma de contrôle **u**.

Dans le cadre du modèle correspondant à la structure de contrôle à commandes doubles $\boldsymbol{\Sigma}$, une **prévision**, relative à l'hypothèse de scénario définie par le chemin **s** (alinéa 3.1.F), est représentée par un cheminement (**e**, **d**, $\hat{\mathbf{u}}$), sur le chemin **s**, relatif à la structure $\boldsymbol{\Sigma}$. La démarche de prévision, i.e. la détermination de cheminements représentant les prévisions, ne sera abordée ici que dans le mesure où elle est liée à la détermination de plans, avant les cheminements qu'ils induisent (alinéas 3.5.C et 3.14.F).

(C) Soit ($\boldsymbol{\zeta}$, **u**) un schéma de commande viable relativement à l'état initial e° (alinéas 2.3.B et 3.4.D). Pour chaque chemin $\mathbf{s}\in\mathbf{S}$, le cheminement $\mathbf{c}_\mathbf{s}(\boldsymbol{\Sigma},e°,\boldsymbol{\zeta},\mathbf{u})$ **induit** par ce schéma de commande, sur ce chemin **s**, à partir de l'état initial e° (alinéa 2.4.D) est l'unique cheminement viable (**e**, **d**, $\hat{\mathbf{u}}$), sur **s**, relatif à la structure, issu de l'état initial e° et tel que,

(3.19) pour tout $t\in T^\theta$, (a) $\mathbf{d}(t) = \zeta_{\mathbf{s}(t)}$, (b) $\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}_{\mathbf{s}(t)}$.

Ce cheminement représente le déroulement du plan correspondant à l'hypothèse de scénario externe définie par le chemin **s** (alinéas 2.1.E,H et 3.1.F).

Les premières procédures d'exploitation par **simulation**, à partir d'une schéma de commande ou d'une stratégie (alinéas 2.4.D et 2.9.C), peuvent être appliquées telles quelles ici, aux schémas de commande ou stratégies des structures à commandes doubles. Cependant, ces procédures sont surtout à envisager dans le cas où, la condition d'univocité étant satisfaite (alinéa 3.4.E et § 3.13), elle rejoignent celles qui font l'objet du § 3.14.

§ 3.6 - ANTICIPATIONS

(A) On appelle **anticipation**, de **profondeur** τ, après l'événement $s \epsilon S^{\theta}$ (^{3t}), relativement au jeu de données de base Δ, tout couple (ε, δ) où les termes $\varepsilon = (\varepsilon_{\sigma}, \sigma \epsilon [s,\tau])$ et $\delta = (\delta_{\sigma}, \sigma \epsilon [s,\tau])$ sont des multiplets - indexés par les événements $\sigma \epsilon [s,\tau]$ - tels que,

(3.20) pour tout $\sigma \epsilon [s,\tau]$, (a) $\varepsilon_{\sigma} \in E_{\sigma}$, (b) $\delta_{\sigma} \in D_{\sigma}$.

On désigne par $A_s(\Delta,\tau)$, ou seulement $A_s(\tau)$ voire A_s, l'ensemble des anticipations, de profondeur τ, après s, i.e. l'ensemble produit défini par,

(3.21) $$A_s(\Delta,\tau) = \prod_{\sigma \epsilon [s,\tau]} E_{\sigma} \times \prod_{\sigma \epsilon [s,\tau]} D_{\sigma}.$$

On note que la définition des anticipations, i.e. des ensembles $A_s(\Delta,\tau) (s \epsilon S^{\theta})$, ne dépend que des données extensives de base et de la profondeur τ. En particulier, on a $A_s(\Delta,0) = E_s \times D_s$, i.e. une anticipation en $s \epsilon S^{\theta}$ de profondeur nulle est seulement un couple $(e,d) \in E_s \times D_s$.

On note aussi que l'anticipation (ε, δ), après l'événement $s \epsilon S^{\theta}$, peut être identifiée au multiplet $(\varepsilon_{\sigma}, \delta_{\sigma}, \sigma \epsilon [s,\tau])$, en vertu de la bijection canonique entre l'ensemble $A_s(\Delta,\tau)$ et l'ensemble produit $\prod_{\sigma \epsilon [s,\tau]} E_{\sigma} \times D_{\sigma}$.

(B) En un premier temps, on peut interpréter une anticipation comme un plan partiel des acteurs décentralisés du système macroéconomique en cause (alinéa 3.1.D,E). Plus précisément, une «anticipation de profondeur τ après l'événement s» est comparable, en tant qu'être mathématique dans le cadre du formalisme introduit dans ce texte, à un plan d'une structure à contrôles spécifiés (alinéa 3.4.C), mais un plan partiel, puisqu'il n'est défini que sur le sous-arbre $[s,\tau]$, et un plan spontané, puisqu'il ne concerne directement que les acteurs décentralisés, via les états et les dynamiques.

Ainsi, au niveau de généralité de l'exposé, où les divers acteurs décentralisés ne sont pris en compte que comme un tout (alinéa 3.2.C), leurs anticipations, après un événement élémentaire s, sont aussi représentées comme un tout, un complexe, appelé anticipation après s. Ce complexe n'est pas analysé ici (alinéa 3.1.B), mais doit l'être lors de la spécification d'un modèle (§ 4.2, 4.10, 5.2, 5.3), éventuellement en termes des anticipations individuelles des acteurs en interaction (alinéa 3.18.B).

(C) Conformément à l'orientation méthodologique qui consiste à privilégier l'interprétation directe (alinéas 1.3.D,E), on ne cherche pas à fonder le concept d'anticipation introduit ici en le reliant directement, d'entrée, aux travaux d'économie théorique faisant intervenir des anticipations, en particulier ceux sur les anticipations rationnelles et ceux sur l'équilibre général intertemporel (^{3v}). Ce lien, assez indirect, est envisagé aux alinéas 3.8.A et 3.10.E-G, mais seulement de façon allusive. Il est à approfondir en même temps que celui entre la représentation de l'incertitude utilisée ici (§ 2.1) et celle de la théorie des processus stochastiques (alinéas 2.1.H, 2.16.A, 3.18.A,B).

Par ailleurs, une anticipation n'est pas à confondre avec une prévision, même une prévision des acteurs décentralisés, ainsi que le montre le rapprochement formel d'une anticipation avec un plan (alinéa 3.6.B), alors qu'une prévision est un cheminement (alinéa 3.5.B) ([3w]).

§ 3.7 - PROTOCOLES D'ANTICIPATION

(A) On appelle **protocole d'anticipation**, de **profondeur** τ, relatif au jeu de données de base Δ, un multiplet $B = (B_s,\ s \in S^\theta)$ tel que,

(3.22) pour tout $s \in S^\theta$,

(a) B_s est une correspondance de $E_s \times U_s(\tau)$ dans $A_s(\tau)$,

(b) pour tous $e \in E_s$, $\underline{u} \in U_s(\tau')$ et $(\varepsilon,\ \delta) \in B_s(e,\underline{u})$, (b1) $\varepsilon_s = e$.

Pour chaques $s \in S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in U_s$, l'ensemble $B_s(e,\underline{u})$ est appelé le **domaine** en s du protocole d'anticipation B, relativement à l'état e et au schéma de contrôle $\underline{u}$ en s. La relation $(\varepsilon,\ \delta) \in B_s(e,\underline{u})$, entre les termes ε, δ, e et $\underline{u}$, représente, en extension, les mécanismes qui conditionnent, dans le comportement spontanée du système, le choix d'une anticipation, issue de l'état e et compatible avec le schéma de contrôle $\underline{u}$ en s, choix dont découlent ses possibilités d'évolution (§ 3.9). Dans le cas standard (alinéa 3.2.B), cette relation, ce comportement, est définie par un système de contraintes prenant des formes diverses selon les situations modélisées (alinéa 3.7.D-F, § 3.8, 4.10, 5.3).

(B) Le confinement des événements $s \in S$ au sous-arbre S^θ - en particulier dans la définition des schémas de contrôle et des protocoles d'anticipation - vise à faire en sorte que, en vertu de la condition (3.3) qui entraîne que $\theta + \tau < T$, les sous-arbres $[s,\tau]$ portant les anticipations aient la même profondeur τ pour tous les événements $s \in S^\theta$ considérés, la fin de l'arbre, i.e. les ensembles S_t pour $t > \theta$, servant alors seulement à alimenter en données externes les dernières anticipations, celles concernant les dates $t > \theta - \tau$ ([3y]). Ces complications pourraient être évitées en prenant un arbre S de profondeur infinie, i.e. en prenant $\mathbf{T} = \mathbf{N}$, mais au prix des autres complications dues au caractère infini et sans avantage opérationnel, à cause du rôle de l'horizon fini dans la problématique d'économie régulée (alinéas 2.1.G et 3.1.D-F).

Par exemple, une option de limitation des anticipations au moyen terme conduit à prendre une profondeur τ petite devant θ : τ de 1 à 4 et θ de 10 à 30, pour une durée de la période élémentaire de 10 ans (alinéas 5.4.C,G).

(C) Un protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s \in S^\theta)$ de profondeur τ peut être considéré canoniquement, par restriction de composantes, comme un protocole d'anticipation de profondeur $\tau' > \tau$: il suffit d'associer, au protocole B, un protocole $B' = (B'_s,\ s \in S^\theta)$ de profondeur τ' défini en posant,

(3.23) pour tous $s \in S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in U_s(\tau')$,

(a) $B'_s(e,\underline{u}) = \{\ \alpha \in A_s(\tau')\ \mid\ \Pi^A_s(\alpha) \in B_s(e,\Pi^U_s(\underline{u}))\}$,

où Π^A_s et Π^U_s désignent respectivement la projection canonique de $A_s(\tau')$ sur $A_s(\tau)$ et celle de $U_s(\tau')$ sur $U_s(\tau)$. En particulier, tout protocole d'anticipation de profondeur zéro peut être considéré comme un protocole de profondeur $\tau > 0$.

(D) On appelle **resserrement** d'un protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s\epsilon S^\theta)$ tout protocole d'anticipation $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{B}}_s,\ s\epsilon S^\theta)$ de même profondeur τ et tel que :

(3.24) pour tous $s\epsilon S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in U_s$, $\underline{\underline{B}}_s(e,\underline{u}) \subset B_s(e,\underline{u})$.

Un resserrement d'un protocole d'anticipation s'obtient en ajoutant des contraintes à celles qui définissent ses domaines (alinéa 3.7.A). On indique ci-après deux types de telles contraintes qui correspondent à des procédés standards de construction de resserrements d'un protocole : l'optimisation locale (alinéa 3.7.E) et les conditions finales (alinéa 3.7.F).

(E) Le premier procédé consiste à définir les nouveaux domaines comme argument max des anciens, i.e à définir le resserrement $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{B}}_s,\ s\epsilon S^\theta)$ du protocole de référence $B = (B_s,\ s\epsilon S^\theta)$ par les relations,

(3.25) pour tous $s\epsilon S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in U_s$,

(a) $(\varepsilon,\ \delta) \in \underline{\underline{B}}_s(e,\underline{u})$, si et seulement si,

(b) $(\varepsilon,\ \delta) \in B_s(e,\underline{u})$ et

(c) $J_s(\varepsilon,\ \delta,\ \underline{u}) = \text{Sup}\ \{\ J_s(\varepsilon',\ \delta',\ \underline{u})\ |\ (\varepsilon',\ \delta') \in B_s(e,\underline{u})\ \}$,

où le multiplet $J = (J_s,\ s\epsilon S^\theta)$, appelé **fonction objectif d'anticipation**, est donné tel que, pour chaque $s\epsilon S^\theta$, J_s est une fonction numérique, sur l'ensemble $A_s \times U_s$, appelée **fonction objectif locale d'anticipation** en s. Le protocole d'anticipation $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{B}}_s,\ s\epsilon S^\theta)$ ainsi défini est dit de **type argument max**, relativement à la fonction objectif d'anticipation J et au **protocole de référence** B.

(F) Le second procédé consiste à introduire, comme contraintes supplémentaires, des **conditions finales**, i.e à définir le resserrement $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{B}}_s,\ s\epsilon S^\theta)$ du protocole de référence $B = (B_s,\ s\epsilon S^\theta)$ par les relations,

(3.26) pour tous $s\epsilon S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in U_s$, $\underline{\underline{B}}_s(e,\underline{u})$ est l'ensemble des anticipations $(\varepsilon,\ \delta)$, de profondeur τ, après s, telles que,

(a) $(\varepsilon,\ \delta) \in B_s(e,\underline{u})$ et (b) pour tout $\sigma\epsilon[s,\tau]^*$, $(\varepsilon_\sigma,\ \delta_\sigma) \in \Phi_{s,\sigma}(\underline{u}_\sigma)$,

où le multiplet $\Phi = (\Phi_{s,\sigma},\ s\epsilon S^\theta,\ \sigma\epsilon[s,\tau]^*)$, appelé **protocole de conditions finales d'anticipation**, de profondeur τ, est donné tel que,

(3.27) pour tous $s\epsilon S^\theta$ et $\sigma\epsilon[s,\tau]^*$,

(a) $\Phi_{s,\sigma}$ est une correspondance de U_σ dans $E_\sigma \times D_\sigma$.

Le protocole d'anticipation $\underline{\underline{B}}$ défini par la relation (3.26) est dit **engendré**, par le protocole de conditions finales d'anticipation Φ, à partir du protocole de référence B, les contraintes (3.26b) étant les **conditions finales** en cause. En fait, ces contraintes (3.26b) ne constituent qu'un type de conditions finales parmi d'autres, par exemple concernant plusieurs périodes de l'anticipation alors que les contraintes (3.26b) ne concerne que la période finale $\underline{t}_s+\tau$.

Par ailleurs, ce procédé peut évidemment être conjugué avec le précédent en définissant un premier resserrement par des conditions finales, puis en prenant un protocole de type argument max relativement à ce dernier. Les protocoles d'anticipation du modèle présenté aux chapitres 4 et 5 seront définis ainsi, comme protocoles conformes (alinéa 3.8.C).

(G) On souligne, en liaison avec la question téléologique (§ 3.16), que les contraintes précédentes - tant l'optimisation locale (alinéa 3.7.E) que les conditions finales (alinéa 3.7.F) - portent sur une anticipation et non sur un plan ou un cheminement. Ainsi, du point de vue méthodologique, ces contraintes peuvent être justifiées, comme exprimant une démarche prospective des acteurs décentralisés, alors qu'elles seraient problématiques si elles concernaient, en tant que contraintes d'exploitation, directement un plan (alinéa 3.16.D), eu égard aux impératifs d'économie libérale dont participent les systèmes macroéconomiques en cause (alinéas 3.1.D,E).

§ 3.8 - PROTOCOLES D'ANTICIPATION CONFORMES

(A) Les premiers exemples de protocoles d'anticipation sont ceux dont les domaines sont cernés, comme ensembles d'anticipations, par les contraintes d'admissibilité et d'évolution canoniquement associées aux données fonctionnelles de base, i.e. à la structure de base. Les anticipations correspondantes sont liées à la théorie des anticipations rationnelles, mais seulement de façon indirecte, comme on le verra au § 3.10 (alinéas 3.10.E-G). En conséquence, on qualifie ces protocoles de "conformes" plutôt que de "rationnels" ([3z]). On les définit ci-après (alinéa 3.8.B), puis on envisage certaines modalités de leur construction comme resserrements (alinéa 3.8.C).

(B) On appelle **protocole (d'anticipation) conforme de base**, de **profondeur** τ, relativement au jeu de données de base Δ, le protocole d'anticipation $\underline{A}(\Delta,\tau)$, noté aussi $\underline{A}(\tau)$ ou seulement $\underline{A}$, dont les domaines, appelés **domaines conformes de base** et notés $\underline{A}_s(\Delta,\tau,e,\underline{u})$, ou seulement $\underline{A}_s(\tau,e,\underline{u})$ voire $\underline{A}_s(e,\underline{u})$ ($s \in S^\theta$, $e \in E_s$, $\underline{u} \in \mathbf{U}_s(\tau)$), sont définis par :

(3.28) pour tous $s \in S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in \mathbf{U}_s(\tau)$, $\underline{A}_s(\tau,e,\underline{u})$ est l'ensemble des anticipations (ε, δ), de profondeur τ, après s, telles que,

$$\text{(a)} \quad \varepsilon_s = e \quad \text{et} \quad \text{(b)} \quad \text{pour tout } \sigma \in [s,\tau],$$

$$\text{(b1)} \quad \delta_\sigma \in g_\sigma(\varepsilon_\sigma,\underline{u}_\sigma),$$

$$\text{(b2)} \quad \varepsilon_\sigma = f_\sigma(\varepsilon_{\sigma-},\delta_{\sigma-},\underline{u}_{\sigma-}), \text{ si } \sigma \neq s.$$

Cela étant, on dit qu'un protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s \in S^\theta)$, de profondeur τ, est **conforme** s'il est un resserrement du protocole conforme de base de profondeur τ, i.e. si :

(3.29) pour tous $s \in S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in \mathbf{U}_s(\tau)$, $B_s(e,\underline{u}) \subset \underline{A}_s(\tau,e,\underline{u})$.

On note que, si la profondeur τ est nulle, la notion perd de son intérêt spécifique, car un protocole conforme de profondeur nulle définit seulement, via les relations (3.28b1) et (3.29), un resserrement des correspondances d'admissibilité de base g_s ($s \in S^\theta$), i.e. un resserrement (de profondeur nulle) de la structure de base $\mathbf{\Sigma}_b(\Delta,0)$ (alinéas 3.3.E et 3.12.E).

(C) Les protocoles conformes sont construits, en tant que resserrements du protocole conforme de base, en ajoutant des contraintes à celles qui définissent les domaines de ce dernier, en particulier, par les procédés standards basés sur l'optimisation locale ou l'adjonction de conditions finales (alinéas 3.7.E,F).

Les protocoles d'anticipation du modèle présenté aux chapitres 4 et 5 seront définis ainsi (§ 4.10 et alinéa 5.4.G), en conjuguant ces deux procédés (alinéa 3.7.F), mais relativement à des conditions finales concernant seulement la stationnarité de certaines images de l'état à la période finale de l'anticipation (alinéas 4.10.A,B,E et 5.4.G). Ces conditions sont exprimées par la relation

(3.26) (alinéa 3.7.B) en y remplaçant, pour chaques $s \in S^\theta$ et $\underline{u} \in \mathbf{U}_s$, la relation (3.26b), par la relation,

(3.30) pour tous $\sigma \in [s,\tau]^*$ et $\hat{\sigma} \in \sigma+$, $\kappa_\sigma(\mathcal{E}_\sigma) = \kappa_{\hat{\sigma}}(f_{\hat{\sigma}}(\mathcal{E}_\sigma,\ \delta_\sigma,\ \underline{u}_\sigma))$,

où le multiplet $\kappa = (\kappa_s,\ s \in S)$ est tel que, pour chaque $s \in S$, κ_s est une application donnée de l'ensemble d'états E_s sur un ensemble $\underline{E}_s$ convenable [3A]. L'exemple courant de tel multiplet $\kappa = (\kappa_s,\ s \in S)$, dans le cas standard (alinéa 3.2.B), est celui où, pour chaque $s \in S$ et de façon cohérente, $\underline{E}_s$ est un espace facteur de E_s et κ_s la projection canonique de E_s sur $\underline{E}_s$.

§ 3.9 - DEPLOIEMENTS DE PLANS

(A) On aborde ici l'étude des modes de conditionnement d'un plan par un protocole d'anticipation, étude qui constitue un des objectifs principaux de ce chapitre. Dans ce sens, on envisage deux tels modes : d'une part un mode lâche dans lequel les anticipations peuvent comporter une certaine autonomie par rapport à la réalisation du plan, d'autre part un mode intégré dans lequel les anticipations sont intégrées à la réalisation du plan, en constituent en quelque sorte des segments, ce qui donne un conditionnement plus fort que le précédent [3B].

Dans la suite du présent § 3.9, on étudie, comme préliminaire, les multiplets d'anticipations, dits déploiements, en termes desquels les deux modes de conditionnement en cause sont définis formellement au § 3.10. Puis, au § 3.11, on associe au premier de ces modes une structure de contrôle à anticipations.

Dans ce § et les deux suivants, on suppose donné, outre le jeu de données de base Δ (alinéa 3.2.E), un protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s \in S^\theta)$, de profondeur τ, relatif à ce jeu (alinéa 3.7.A).

(B) On appelle **déploiement (d'anticipations)**, de profondeur τ, relatif au jeu de données de base Δ, tout élément de l'ensemble produit $\prod_{s \in S^\theta} A_s(\Delta,\tau)$, qui est noté $\mathbf{De}(\Delta,\tau)$ ou seulement $\mathbf{De}$, i.e. tout multiplet $\alpha = (\varepsilon^s,\ \delta^s,\ s \in S^\theta)$ tel que, pour tout $s \in S^\theta$, $(\varepsilon^s,\ \delta^s)$ est une anticipation de profondeur τ après s, multiplet qui peut aussi s'écrire $(\varepsilon^s_\sigma,\ \delta^s_\sigma,\ s \in S^\theta,\ \sigma \in [s,\tau])$. Cela étant, un plan $(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$, relatif à la structure de base $\boldsymbol{\Sigma}_b(\Delta,\tau)$, est dit **associé** au déploiement $\alpha = (\varepsilon^s,\ \delta^s,\ s \in S^\theta)$ s'il vérifie :

(3.31) pour tout $s \in S^\theta$, (a) $\xi_s = \varepsilon^s_s$, (b) $\zeta_s = \delta^s_s$.

Inversement, le multiplet α est alors dit **déploiement du plan** $(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$. On note que le plan associé est entièrement déterminé par le schéma de contrôle $\mathbf{u}$ et le déploiement α en cause. On désigne ce plan par $\mathbf{pa}(\alpha,\mathbf{u})$ et par $\xi^\circ(\alpha)$ son état initial $\varepsilon^{s^\circ}_{s^\circ}$. Par contre, au moins si la profondeur τ des anticipations est > 0, un même plan peut être associé à divers déploiements, en particulier en ce qui concerne leur partie finale (alinéas 3.9.D).

Le déploiement $(\varepsilon^s,\ \delta^s,\ s \in S^\theta)$ est dit **admissible**, relativement au schéma de contrôle $\mathbf{u}$, si le plan associé, de schéma de contrôle $\mathbf{u}$, est admissible pour la structure de base $\boldsymbol{\Sigma}_b(\Delta,\tau)$, i.e. si :

(3.32) pour tout $s \in S^\theta$, (a) $(\varepsilon^s_s, \delta^s_s, \mathbf{u}_{s,s}) \in \mathcal{G}_s$.

Il est dit **conditionné** par le protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s \in S^\theta)$, relativement au schéma de contrôle $\mathbf{u}$, si :

(3.33) pour tout $s \in S^\theta$, (a) $(\varepsilon^s,\ \delta^s) \in B_s(\varepsilon^s_s, \mathbf{u}_s)$.

Il est dit **intégré** s'il vérifie les **conditions d'intégration** [3B] :

(3.34) pour tous $s' \in S^{\theta}$, $s'' \in S^{\theta}$ et $\sigma \in [s',\tau] \cap [s'',\tau]$,

$$\text{(a)} \quad \varepsilon_{\sigma}^{s'} = \varepsilon_{\sigma}^{s''}, \qquad \text{(b)} \quad \delta_{\sigma}^{s'} = \delta_{\sigma}^{s''}.$$

(C) Si $(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$ est un plan associé à un tel déploiement intégré, on a :

(3.35) pour tous $s \in [s°,\theta-\tau])$ et $\sigma \in [s,\tau]$, (a) $\varepsilon_{\sigma}^{s} = \xi_{\sigma}$, (b) $\delta_{\sigma}^{s} = \zeta_{\sigma}$.

Autrement dit [**propriété de rigidité d'un déploiement intégré**] :

(3.36) la restriction, $(\varepsilon^{s},\ \delta^{s},\ s \in [s°,\theta-\tau])$, du déploiement intégré $(\varepsilon^{s},\ \delta^{s},\ s \in S^{\theta})$, au sous-arbre $[s°,\theta-\tau])$, est entièrement déterminée, via la relation (3.35), par le plan associé $(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$.

Cette propriété exprime comment, dans le cas d'un déploiement intégré, ses diverses anticipations sont intégrées au plan, alors que, dans le cas d'un déploiement quelconque, elles peuvent être relativement autonomes (alinéa 3.9.A), vu la faible contraignance de la relation générale (3.31).

(D) On note que, sous les conditions (3.34), les relations (3.35a,b) sont en fait vérifiées pour tous $s \in S^{\theta}$ et $\sigma \in [s,\tau] \cap S^{\theta}$. On note aussi, dans le même sens, que ces conditions, qui caractérisent un déploiement intégré, peuvent donner lieu à diverses variantes en ce qui concerne les aléas s voisins des feuilles du sous-arbre S^{θ}, en ce sens que $\theta-\tau+1 \leq \underline{t}_s \leq \theta$ [3t]. La variante (3.34), qui est la plus contraignante, n'est pas nécessaire pour assurer la propriété de rigidité (3.36) d'un déploiement intégré, vu qu'elle permet de prolonger la définition (3.35) du plan au sous-arbre $[s°,\theta+\tau]$. La variante, la moins contraignante, qui suffit pour assurer cette propriété, consiste à remplacer, dans les conditions (3.34), le sous-arbre $S^{\theta} = [s°,\theta]$ par le sous-arbre $[s°,\theta-\tau]$ [3C].

(E) On note aussi que tout ce qui précède est valable dans le cas où le jeu de données de base est sans contrôle (alinéa 3.2.B) : un plan est alors réduit à sa partie spontanée $(\xi,\ \zeta)$ et la mention du schéma de contrôle peut être omise.

§ 3.10 - PLANS ET PROTOCOLES D'ANTICIPATION

(A) A la suite du § 3.9 (alinéa 3.9.A), on définit ici les deux **modes de conditionnement** d'un plan par un protocole d'anticipation (alinéas 3.10.B-C), puis on indique comment le second est lié à la conception des anticipations qui est sous-jacente à la théorie des anticipations rationnelles (alinéa 3.10.E-G).

(B) On dit qu'un plan $(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$, relatif à la structure de base $\mathbf{\Sigma}_b(\Delta,\tau)$, est **(simplement) conditionné** [resp. **fortement conditionné**] par le protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s \in S^{\theta})$ si ce plan est associé à un déploiement [resp. à un déploiement intégré] qui est conditionné par le protocole d'anticipation B, relativement au schéma de contrôle $\mathbf{u}$ du plan.

En vertu de cette définition, il est clair que :

(3.38) un plan fortement conditionné par le protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s \in S^{\theta})$ est aussi (simplement) conditionné par ce protocole.

De plus, la propriété (3.36) laisse entendre que les deux modes de conditionnement ne sont pas, en général, équivalents : dans le cas du conditionnement simple, les diverses anticipations du déploiement ne sont liées au plan que par les relations (3.31), alors que dans celui du conditionnement fort, elles sont pratiquement intégrées au plan.

(C) Les propriétés, pour un plan, d'être conditionné, simplement ou fortement, par un protocole d'anticipation sont à situer par rapport aux propriétés d'admissibilité ou de viabilité pour la structure de base $\boldsymbol{\Sigma}_b(\Delta,\tau)$. Dans ce sens, on note d'abord le lien suivant, qui résulte directement des définitions :

(3.39) lorsque (a) le protocole d'anticipation est conforme et de profondeur $\tau > 0$, un plan relatif à la structure de base $\boldsymbol{\Sigma}_b(\Delta,\tau)$ est admissible (resp. viable) pour cette structure dès qu'il est simplement (resp. fortement) conditionné par ce protocole.

De plus, toujours lorsque le protocole est conforme et de profondeur $\tau > 0$, d'une part (C1) un plan (seulement) simplement conditionné peut ne pas être viable, d'autre part l'énoncé (3.39) n'admet pas de réciproque, en ce sens que la propriété d'être conditionné, même simplement, par un protocole peut être beaucoup plus contraignante que l'admissibilité par rapport à la structure de base. Enfin, dans le cas général, i.e. pour un protocole d'anticipation non conforme, les propriétés des deux types sont relativememt indépendantes. En fait, dans le prolongement de la convention 3.3.D1, le conditionnement par un protocole d'anticipation convenable, d'un plan relatif à la structure de base, va compléter les contraintes de base pour aboutir à la définition des structures à anticipations comme resserrements de la structure de base (§ 3.11).

(D) Si un plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ est fortement conditionné par le protocole d'anticipation $B = (B_s, s\epsilon S^\theta)$, les conditions (3.33a) concernant les aléas $s\epsilon[s^\circ,\theta-\tau]$ s'expriment directement en termes du plan, sous la forme,

(3.40) pour tout $s\epsilon[s^\circ,\theta-\tau]$, (a) $(\xi_\sigma, \zeta_\sigma, \sigma\epsilon[s,\tau]) \in B_s(\xi_s,\mathbf{u}_s)$,

puisque, si $(\varepsilon^s, \delta^s, s\epsilon S^\theta)$ est le déploiement intégré du plan, les relations (3.35) s'écrivent aussi, comme égalités entre anticipations,

(3.41) pour tout $s\epsilon[s^\circ,\theta-\tau]$, (a) $(\varepsilon^s, \delta^s) = (\xi_\sigma, \zeta_\sigma, \sigma\epsilon[s,\tau])$.

(E) La relation (3.40) est la généralisation, dans le présent cadre formel, de l'équation fondamentale de la théorie des anticipations rationnelles, i.e. de l'"équation de Muth" : $y_t = aE_t(y_{t+1}) + z_t$, $t \in \mathbf{N}$ [3E]. La généralisation est en fait multiple. Entre autres : d'une part la profondeur d'anticipation τ est ici quelconque, contre $\tau = 1$ dans l'équation de Muth ; d'autre part la relation de conditionnement n'est pas singularisée, mais est prise en compte en extension, en même temps que l'équation elle même, par la relation (3.40a) d'appartenance de l'anticipation au domaine du protocole. Par ailleurs, elle couvre à la fois le cas stochastique et le cas déterministe [3F].

(F) La généralisation proposée met en évidence une indépendance entre deux hypothèses de la théorie des anticipations rationnelles qui sont souvent mélées : d'une part l'intégration des anticipations dans le plan, qu'exprime ici le conditionnement fort par le protocole d'anticipation, d'autre part, éventuellement, la propriété de ce dernier d'être conforme (alinéa 3.8.B). Ces deux hypothèses jouent des rôles, aussi bien conceptuels que formels, différents : la première concerne le mode de conditionnement du plan par le protocole d'anticipation, alors que la seconde n'est qu'une propriété de ce dernier.

(G) Cette indépendance formelle va, en fait, jouer un rôle méthodologique important, presque politique, dans les applications et dans la structure des modèles envisagés, en ce sens que seule la seconde hypothèse, le caractère conforme des protocole d'anticipation, va y êtrè retenue. En effet, la théorie des anticipations rationnelles est fortement marquée par le courant de doctrine libérale qui suppose l'existence d'équilibres ou d'évolutions "naturels", donc privilégie les modèles donnant lieu à unicité de l'équilibre ou de l'évolution. Ainsi, la première hypothèse peut être considérée comme liée à la recherche de l'unicité en question par rigidification du modèle ([3G]). Par contre, le mode de conditionnement simple convient mieux à la problématique de prospective comportementale en économie régulée qui motive ce travail (alinéas 3.1.E,F), grâce à l'autonomie des anticipations qu'il permet. C'est pourquoi ce mode sera privilégié dans la suite (alinéas 3.11.A,F et 3.12.D).

§ 3.11 - STRUCTURES DE CONTROLE A ANTICIPATIONS

(A) Afin de relier les modes de conditionnement d'un plan par un protocole d'anticipation (§ 3.10) à l'appareil de théorie du contrôle, il faut leur associer des structures de contrôles à commandes doubles. On le fait ci-après (alinéas 3.11.B-E) pour le mode de conditionnement simple qui seul intervient dans la suite (alinéa 3.11.F).

(B) Au jeu de données de base Δ et au protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s\epsilon S^\theta)$, on associe la structure de contrôle à commandes doubles $\underline{\Sigma} = (E,\ Y,\ \underline{G},\ \underline{F})$, dont le multiplet $\underline{G} = (\underline{G}_s,\ s\epsilon S^\theta)\ S^\theta)$ des correspondances d'admissibilité est défini par les relations :

(3.42) pour tout $s\epsilon S^\theta$, (a) $\underline{G}_s$ est l'ensemble des triplets $(e,d,\underline{u}) \in E_s{\times}D_s{\times}U_s$ pour lesquels,

(b) $(e,d,\underline{u}_s) \in g_s$,

(c) il existe une anticipation $(\varepsilon,\ \delta)$ après s telle que,
(c1) $(\varepsilon,\ \delta) \in B_s(e,\underline{u})$, (c2) $d = \delta_s$.

Ces relations définissent sans ambiguïté la structure $\underline{\Sigma}$ en cause, puisque, d'une part son multiplet des espaces d'états est le multiplet de base $E = (E_s,\ s\epsilon S^\theta)$, d'autre part son multiplet $\underline{F} = (\underline{F}_s,\ s\epsilon S^\theta)$ des fonctions d'évolution de l'état est défini par les relations (3.6), une fois que les correspondances d'admissibilité le sont. Cette structure est désignée par $\underline{\Sigma}(\Delta,\tau,B)$ ou seulement $\underline{\Sigma}(\tau,B)$, voire $\underline{\Sigma}(B)$. Elle est appelée structure de contrôle (à commandes doubles) **(simplement) conditionnée** par le protocole d'anticipation B ou, plus brièvement, **structure de contrôle à anticipations**.

(C) On note comment la relation (3.42) exprime que, pour chaque $s\epsilon S^\theta$, les dynamiques $d \in D_s$ admissibles par rapport à l'état e en s et au schéma de contrôle $\underline{u}$ en s (alinéas 2.2.B et 3.3.D), sont déterminées, conformément à la relation (3.42c2), par l'intermédiaire d'une anticipation $(\varepsilon,\ \delta)$ après s, conditionnée par le protocole B, i.e. appartenant au domaine $B_s(e,\underline{u})$, donc issue de l'état e, conformément aux relations (3.42c1) et (3.22b1).

Ce mode de détermination des correspondances $\underline{G}_s$ $(s\epsilon S^\theta)$, via des anticipations, constitue l'expression, en termes d'une structure de contrôle à commandes doubles, de la définition d'un plan simplement conditionné (alinéa 3.10.B,C), ainsi que le laisse entendre l'interprétation ci-dessus et que le précise la caractérisation (3.44) ci-après (alinéa 3.11.D).

(D) On note que la structure à anticipations $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ peut ne pas être consistante, en ces sens que rien n'assure a priori, en particulier pour ce qui est du protocole d'anticipation B, que les ensembles $\underline{G}_s$ ($s \epsilon S^\theta$) définis par les relations (3.42) sont tous non vides. Dans ce sens, on dit que le protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s \epsilon S^\theta)$ est **consistant** (relativement au jeu de données de base Δ) s'il est tel que la structure $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ est consistante, ce qui équivaut à :

(3.43) pour tout $s \epsilon S^\theta$, il existe un triplet $(e,d,\underline{u}) \in E_s \times D_s \times \boldsymbol{U}_s$ et une anticipation $(\varepsilon,\ \delta)$ après s tels que,

(a) $(e,d,\underline{u}_s) \in g_s$ et (b) $(\varepsilon,\ \delta) \in B_s(e,\underline{u})$.

Cela étant, la caractérisation (3.44) de la structure $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ - dont une démonstration figure dans l'Annexe (§ A.5) - précise formellement le lien entre cette structure et le mode de conditionnement simple des plans :

(3.44) Si le protocole d'anticipation B est est consistant, alors la structure à anticipations $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$, qui est alors consistante, est l'unique structure de contrôles à commandes doubles $\boldsymbol{\Sigma}$ telle que, d'une part (a) le multiplet des espaces d'états est le multiplet de base $E = (E_s,\ s \epsilon S^\theta)$, d'autre part (b) pour qu'un plan de la structure de base $\boldsymbol{\Sigma}_b(\Delta,\tau)$ soit admissible pour cette structure et simplement conditionné par le protocole d'anticipation B, il faut et il suffit que ce plan soit admissible pour la structure $\boldsymbol{\Sigma}$.

(E) Le lien annoncé (alinéas 1.2.B) entre simulation et anticipation réside (alinéa 3.14.K) dans la considération de simulations (alinéa 3.5.C) - en particulier de celles associées aux stratégies (alinéa 2.9.C et 3.13.C.D) - relatives aux structures de contrôle à anticipations ci-dessus (alinéas 3.11.A-D).

(F) La définition, parallèlement à celle des structures $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$, de structures de contrôle $\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}(\Delta,\tau,B)$ relatives au mode de conditionnement fort serait sans doute utile pour l'approfondissement des liens entre les développements de ce chapitre et la théorie des anticipations rationnelles (alinéas 3.10.E-G). On n'aborde pas ici les questions que soulève cette définition (alinéa A.5.F), car les structures $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ suffisent au propos de ce texte (alinéa 3.10.G).

§ 3.12 - <u>PROCEDURES D'EXPLOITATION</u> (I) : <u>GENERALITES</u>

(A) Les diverses procédures d'exploitation, des structures de contrôle, envisagées de façon générale au § 2.14, peuvent être appliquées, dans le cadre des structures à commandes doubles, selon deux **modes d'exploitation** complémentaires, qui diffèrent par la structure opérationnelle en cause, le mode total, où le schéma de contrôle est variable, et le mode à contrôles spécifiés, où le schéma de contrôle est donné. La complémentarité de ces deux modes est un aspect fondamental de l'exploitation des structures de contrôle à commandes doubles.

Supposant toujours fixé un jeu de données de base Δ (alinéa 3.2.G) auquel sont relatives les diverses structures à commandes doubles considérées, on envisage, dans la suite du présent § 3.12, puis dans les § 3.13 et 3.14, certains aspects spécifiques de ces deux modes d'exploitation et de leur complémentarité dans le cadre général de la prospective exploratoire (alinéa 3.1.F) [3q] : structures primaires, structures opérationnelles, fonctions objectif et procédures générales d'exploitation ci-après, puis simulations aux § 3.13 et 3.14. On envisage ensuite, au § 3.15, le problème de la détermination de plans optimums dans le cas des structures de contrôle à anticipations. Enfin, on revient sur la question téléologique aux § 3.16 et 3.17.

(B) On suppose que la procédure primaire (alinéa 2.14.B) conduit d'abord à une structure de contrôle à commandes doubles Σ = (X, Y, G, F) (§ 3.3), dite **structure (opérationnelle) totale**, structure engendrée, à partir d'une **structure primaire** $\mathring{\Sigma} = (\mathring{X}, Y, \mathring{G}, \mathring{F})$, à commandes doubles, relativement au jeu de données de base Δ, par un **protocole de resserrement d'exploitation** $\Gamma = (\Gamma_s,\ s \epsilon S^{\theta})$ relatif à cette structure primaire. Ainsi, la structure primaire $\mathring{\Sigma}$ et le protocole de resserrement Γ constituent les **données opérationnelles**. Quelques types importants de telles données opérationnelles sont envisagés aux alinéas 3.12.D,E ci-après.

Dans le **mode total**, les procédures d'exploitation sont appliquées à la structure opérationnelle totale Σ elle-même, tandis que, dans le **mode à contrôles spécifiés**, elles le sont aux structures à contrôles spécifiés $\Sigma^{\mathbf{u}}$ associées à la précédente et à des schémas de contrôle $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ (alinéa 3.4.B), les fonctions objectif voulues étant adaptées à ces diverses structures (alinéa 3.12.H) (3H).

(C) Ainsi, l'**exploitation pratique** (alinéa 2.14.C) consiste en la détermination, relativement à la structure totale Σ, de plans $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ viables et issus d'un état initial donné, cela avec la distinction consistant en ce que, dans le mode total, le schéma de contrôle $\mathbf{u}$ est inconnu, est à déterminer en même temps que la partie spontanée (ξ, ζ) du plan, tandis que, dans le mode à contrôles spécifiées seule cette dernière est à déterminer, le schéma de contrôle $\mathbf{u}$ étant alors donné [propriété (3.12)]. En fait, cette formulation générale couvre, tant formellement que du point de vue de l'interprétation, diverses variantes de prospective exploratoire (alinéa 3.1.F), variantes qui concernent le procédé de détermination en cause : déterminations par optimisation ou déterminations par simulation. Ces variantes font l'objet des alinéas 3.12.D-H ci-après de ce §, puis des § suivants où sont envisagés, d'une part la pertinence des plans ou cheminements obtenus (§ 3.13, 3.14 et 3.16), d'autre part les problèmes que posent ces détermination (§ 3.15 et 3.17).

(D) On distingue **deux types** de structures primaires, selon qu'il y a ou non anticipations. Le **premier type**, qui est privilégié, comprend les structures conditionnées par les protocoles d'anticipation B (alinéa 3.11.B), structures parmi lesquelles on privilégie celles, $\underline{\Sigma}(\tau, B)$, qui sont simplement conditionnées, dites seulement **à anticipations**, et plus particulièrement celles qui sont simplement conditionnées par un protocole d'anticipation de type argument max (alinéa 3.7.E), dites **à anticipations de type argument max** (3I). Le **second type, sans anticipation**, va intervenir dans l'exploitation par optimisation comportementale (alinéa 2.14.F et § 3.16). Il comprend la structure de base de profondeur nulle $\Sigma_b(\Delta, 0)$ (alinéa 3.3.E) et certains de ses resserrements.

(E) Les **protocoles de resserrement d'exploitation** Γ les plus courants sont ceux qui sont déduits d'un protocole de resserrement de profondeur nulle Γ°. Plus précisément, un protocole de resserrement $\Gamma = (\Gamma_s,\ s \epsilon S^{\theta})$ est dit **de profondeur nulle** ou **sans anticipation** s'il est de la forme,

$$(3.45) \quad \text{pour tout } s \epsilon S^{\theta}, \quad \Gamma_s = \{ (e,d,\underline{u}) \in E_s \times D_s \times U_s \mid (e,d,\underline{u}_s) \in \Gamma^{\circ}_s \},$$

où le multiplet $\Gamma^\circ = (\Gamma^\circ_s,\ s\epsilon S^\theta)$, est donné tel que,

(3.46) pour tout $s\epsilon S^\theta$, $\Gamma^\circ_s \subset E_s \times D_s \times U_s$.

On note que ces protocoles peuvent être associés, comme données primaires, aux structures primaires des deux types envisagés ci-dessus (alinéa 3.12.D).

De plus, parmi ces protocoles de resserrement d'exploitation, les **protocoles de conditions finales** (alinéa 2.6.C) jouent un rôle important. Outre cette importance, on les cite ici pour souligner la différence méthodologique, de rôle dans le processus de modélisation, entre un tel protocole et un **protocole de conditions finales d'anticipation**, lorsque la structure de contrôle primaire $\mathring{\Sigma}$ est à anticipations (alinéas 3.7.G et 3.12.D).

(F) L'exploitation relevant du contrôle optimal peut concerner les structures opérationnelles relatives aux deux modes d'exploitation (alinéas 3.12.A,B). On envisage ci-après les fonctions objectif correspondantes, puis leurs interprétations (alinéas 3.12.G,H).

On appelle ici **fonction objectif**, relative au jeu de données de base Δ et à la profondeur τ, toute fonction numérique Q, $(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u}) \longrightarrow Q(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$, sur l'ensemble $\Pi(\Delta,\tau)$ des plans $(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$ relatifs à la structure de base $\Sigma_b(\Delta,\tau)$ (alinéa 3.4.G). De plus, une telle fonction est dite **de profondeur nulle** ou **sans anticipation** si elle coïncide sur l'ensemble $\Pi(\Delta,\tau)$ avec une fonction objectif relative à la profondeur nulle. Cela étant, désignant toujours par Σ la structure opérationnelle totale (alinéa 3.12.B), la restriction d'une fonction objectif Q à l'ensemble $P_v(\Sigma)$ - qui est contenu dans l'ensemble $\Pi(\Delta,\tau)$ - induit une fonction objectif sous forme réduite pour cette structure (alinéa 2.10.B) ([3K]). De plus, pour chaque schéma de contrôle $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, la fonction partielle $Q^{\mathbf{u}}$, $(\xi,\ \zeta) \longrightarrow Q(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$, induit une fonction objectif sous forme réduite, dite **à contrôles spécifiés**, pour la structure $\Sigma^{\mathbf{u}}$ à contrôles spécifiés par le schéma de contrôle $\mathbf{u}$. Ainsi, la donnée opérationnelle d'optimisation est toujours une fonction objectif correspondant au mode total.

(G) Une fonction objectif Q peut donner lieu à deux types d'interprétations, le type normatif et le type comportemental, qui correspondent, pour elle, aux deux rôles différents de l'optimisation dans le processus de modélisation qui sont envisagés aux alinéas 2.14.D et 2.14.F.

Dans l'interprétation de **type normatif**, la valeur $Q(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$ de la fonction pour un plan $(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$ représente, mesure, une utilité collective ([3L]), globale, dont la maximisation exprime une option des instances régulatrices pour l'exploitation de la structure opérationnelle totale en cause, la donnée de cette fonction faisant partie du protocole d'exploitation, conformément au schéma d'exploitation standard en théorie du contrôle optimal (alinéa 2.14.D). Par contre, dans l'interprétation de **type comportemental** cette valeur $Q(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$ vise à représenter une résultante intertemporelle d'utilités individuelles dont la maximisation exprime une tendance spontanée, un comportement des acteurs décentralisés, du système, la donnée de la fonction objectif faisant alors partie de la représentation de ce dernier (alinéa 2.14.F). On souligne la précaution "vise à représenter" mise, dans l'énoncé ci-dessus de la seconde interprétation : elle annonce les difficultés de justification de cette interprétation qui sont à la base de la question téléologique sur laquelle on revient au § 3.16.

(H) Dans le cadre de la prospective comportementale (alinéa 3.1.F), selon la procédure d'exploitation relevant du contrôle optimal (alinéa 2.14.D), les fonctions objectif (d'interprétation) de type normatif sont plutôt associées aux structures opérationnelles totales qui sont engendrées par une structure primaire à anticipations, tandis que les fonctions objectif de type comportemental le sont plutôt aux structures opérationnelles qui sont engendrées par une structure primaire sans anticipation (alinéas 3.12.B,D) : on verra aux § 3.14 et 3.16 ci-après comment le premier cas correspond à une exploitation par simulation sous contraintes (alinéa 3.14.H), le second à une exploitation par optimisation comportementale (alinéas 2.14.F et 3.16.D) [3M].

§ 3.13 - CONDITION D'UNIVOCITE

(A) Comme préalable à l'étude des procédures d'exploitation par simulation au § 3.14, on introduit ici leur fondement qu'est la condition d'univocité, condition qui est sous-jacente au principe de causalité dans le cadre de la prospective comportementale (alinéas 3.1.F et 3.14.C). On présente d'abord cette condition de façon générale (alinéa 3.13.B), puis on en donne des conditions suffisantes de type local (alinéa 3.13.C,D), en particulier, dans le cas des structures à anticipations, en termes du protocole d'anticipation (alinéa 3.13.E).

(B) La donnée de départ, sur laquelle porte la condition en cause, est celle des procédures d'exploitation par simulation qui font l'objet du § 3.14 (alinéa 3.14.A) : dans le cadre fixé par un jeu de données de base Δ (alinéas 3.2.G et 3.12.A), cette donnée de départ est une structure de contrôle à commandes doubles $\mathbf{\Sigma} = (X, Y, G, F)$, qui est généralement la structure primaire en cause (alinéa 3.12.B), mais qui est ici a priori quelconque. Cela étant, pour chaque $e^\circ \in X_{s^\circ}$, on appelle **domaine de viabilité univoque**, de la structure $\mathbf{\Sigma}$, en l'état initial e°, et on désigne par $\mathbf{U}_\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e^\circ)$, ou seulement par $\mathbf{U}_\mathbf{v}(e^\circ)$, l'ensemble des schémas de contrôle $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ vérifiant la **condition d'univocité** $B0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$:

(3.48) $[B0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})]$ il existe, relativement à la stucture $\mathbf{\Sigma}^\mathbf{u}$, un plan viable et un seul issu de e°.

De plus, on désigne par $\mathbf{E}^\circ_\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma})$ [resp., pour chaque $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, par $\mathbf{E}_\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$], le sous-ensemble de X_{s° formé des états initiaux e°, dits **univoquement viables** ou **1-viables** [resp. **univoquement viables ou 1-viables relativement au schéma de contrôle u**] qui sont tels que l'ensemble $\mathbf{U}_\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e^\circ)$ n'est pas vide [resp. tels que $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e^\circ)$]. Enfin, pour chaques $e^\circ \in \mathbf{E}^\circ_\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma})$ et $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e^\circ)$, l'unique plan viable introduit par la propriété $B0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$ est noté $\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$, ou seulement $\mathbf{v}(e^\circ,\mathbf{u})$, et dit **engendré** par le schéma de contrôle $\mathbf{u}$ à partir de l'état initial e°, tandis que le cheminement induit par ce plan sur le chemin $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ (alinéas 2.4.D et 3.5.B,C) est noté $\mathbf{v_s}(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$ ou $\mathbf{v_s}(e^\circ,\mathbf{u})$. On s'intéresse ici seulement aux états initiaux univoquement viables, donc aux structures $\mathbf{\Sigma}$, dites aussi **univoquement viables** ou **1-viables**, pour lesquelles l'ensemble $\mathbf{E}^\circ_\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma})$ n'est pas vide.

La condition de 1-viabilité de la structure $\mathbf{\Sigma}$ exprime, pour un état initial donné, la rigidité du lien entre un plan viable et son schéma de contrôle, conformément à la démarche de la prospective comportementale, mais cela sans préjuger de la multiplicité des schémas de contrôle possibles, i.e. en stipulant seulement une rigidité à contrôles spécifiés.

(C) Afin de faire apparaître le lien des structures 1-viables avec les stratégies, on considère, pour chaque état initial 1-viable e° et chaque schéma de contrôle $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, en amont de la condition d'univocité $B0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$, les conditions $C0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$, $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ et $C2(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ définies par les relations (3.49) à (3.51) ci-après, où $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}^{\mathbf{u}} = (\underline{\underline{X}}^{\mathbf{u}}, D, \underline{\underline{G}}^{\mathbf{u}}, \underline{\underline{F}}^{\mathbf{u}})$ désigne le noyau de viabilité de la structure à contrôles spécifiés $\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{u}} = (X, D, G^{\mathbf{u}}, F^{\mathbf{u}})$ (aliñéa 3.4.B) :

(3.49) [$C0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$] la structure à contrôles spécifiés $\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ est ponctuellement viable en e° ;

(3.50) [$C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$] pour tout $s \in S^\theta$ et tout $e \in X_s$,
(a) l'ensemble $G_s^{\mathbf{u}}(e)$ a au plus un élément ;

(3.51) [$C2(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$] le noyau de viabilité $\underline{\underline{\mathbf{\Sigma}}}^{\mathbf{u}}$ de la structure $\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ est une stratégie.

On souligne le caractère local de la condition $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$, qui, de ce fait, est dite **condition d'univocité locale**, relative aux termes $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{u}$. Ces conditions sont liées, pour chaque schéma de contrôle $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, à la condition d'univocité $B0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$, par les propriétés (3.52) et (3.53) ci-après qui résultent directement des définitions :

(3.52) pour tout $e^\circ \in X_{s^\circ}$, si la condition $C0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$ est vérifiée, alors,

(a) $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ [resp. (b) $C2(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$] entraîne $B0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$;

(3.53) si la structure $\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ est viable, alors,

(a) $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ entraîne $C2(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ et $\mathbf{E}_v(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u}) = \underline{\underline{X}}^{\mathbf{u}}$.

(D) Le principal intérêt de ces propriétés est d'ordre théorique : il réside dans le lien qu'elles fournissent entre la condition d'univocité et le concept de stratégie, même si les conditions suffisantes qu'elles expriment ne sont pas nécessaires ([3N]). Ce lien apparaît explicitement dans la propriété (3.52b) qui exprime que, sous la condition de viabilité simple $C0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$, la condition, en termes de stratégie, $C2(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ est suffisante pour que la condition d'univocité $B0(\mathbf{\Sigma},e^\circ,\mathbf{u})$ soit vérifiée. Mais il est aussi implicite dans les propriétés (3.52a) et (3.53), la condition $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ qui y figure étant plus maniable que la condition $C2(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$, quoique également locale (alinéa 3.13.E). Du point de vue pratique, c'est surtout la conditions $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ qui est utilisée (alinéa 3.14.K), mais l'intérêt de ces propriétés, pour montrer que la condition d'univocité est vérifiée ou pour déterminer l'ensemble des états initiaux 1-viables, est limité par le caractère pratiquement peu accessible du noyau de viabilité.

(E) Lorsque la structure de départ $\mathbf{\Sigma}$ (alinéa 3.13.B) est à anticipations, i.e. coïncide avec la structure $\underline{\mathbf{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ (simplement) conditionnée par un protocole d'anticipation $B = (B_s, s \in S^\theta)$ (alinéas 3.11.B et 3.12.D), on va déduire la condition d'univocité d'une condition portant sur ce dernier et de type local, cela, en s'appuyant, via la propriété (3.52a), sur la condition d'univocité locale $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$. Dans ce sens, un protocole d'anticipation B est dit **univoque** s'il vérifie la condition d'univocité locale,

(3.54) pour tous $s \in S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in U_s$, (a) le domaine $B_s(e,\underline{u})$ a au plus un élément.

Dès lors, il résulte directememt des définitions que :

(3.55) si le protocole d'anticipation B est univoque, alors la structure de contrôle à anticipations $\mathbf{\Sigma} = \underline{\mathbf{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ vérifie la condition d'univocité locale $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ quelque soit le schéma de contrôle $\mathbf{u}$.

Ainsi, en conjuguant cette propriété avec la propriété (3.52a) :

(3.56) si le protocole d'anticipation B est univoque, alors la structure de contrôle à anticipations $\mathbf{\Sigma} = \underline{\mathbf{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ vérifie la condition d'univocité $B0(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$ pour tout couple $(e^{\circ},\mathbf{u})$ vérifant la condition $C0(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$.

En pratique, un procédé usuel de construction de protocoles d'anticipation univoques consiste à resserrer un protocole de type argument max au moyen d'un procédé de sélection d'un argument max [3Q]. En particulier, les protocoles du modèle présenté aux chapitres 4 et 5 relèvent de ce procédé (alinéas 4.10.A,E) et la condition d'univocité que requiert l'exploitation par simulation présentée au chapitre 5 résulte de la propriété (3.56) (alinéas 5.2.F et 5.6.B).

§ 3.14 - PROCEDURES D'EXPLOITATION (II) : SIMULATIONS

(A) Le lien annoncé (alinéas 1.2.B, 3.5.C, 3.11.E) entre simulation et anticipation est présenté ici en analysant les diverses procédures d'exploitation par simulation des modèles de prospective comportementale (alinéas 3.1.F) : simulations libres qui fournissent, par projections dynamiques à contrôles spécifiés, des cheminements spontanés, conformes au principe de causalité ; simulations sous contraintes qui visent à déterminer, de façon normative, les schémas de contrôle qui sont ensuite appliqués aux simulations libres. Ces procédures sont d'abord envisagées de façon générale, respectivement aux alinéas 3.14.B-D et 3.14.H-J, à partir de leur fondement commun qu'est la condition d'univocité (§ 3.13). Dès lors, on obtient le lien entre simulation et anticipation en appliquant les procédures générales au cas où la structure en cause est à anticipations (alinéa 3.14.K).

Conformément au § 3.12 (alinéa 3.12.B), la donnée de départ des procédures en cause est une structure à commandes doubles $\mathbf{\Sigma} = (X, Y, G, F)$ qui est a priori seulement supposée univoquement viable (alinéa 3.13.B), mais qui est généralement la structure primaire.

(B) La procédure d'exploitation par **simulation libre**, du modèle représenté par la structure, à commandes doubles, univoquement viable $\mathbf{\Sigma}$ (alinéa 3.14.A), consiste - simplement - en la détermination du plan viable $\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$, à partir de l'état initial e° et du schéma de contrôle $\mathbf{u}$, supposés donnés tels que la condition d'univocité $B0(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$ [relation (3.48)] soit satisfaite, ce qui réclame en particulier que l'état initial e° soit univoquement viable (alinéa 3.13.B). Ce plan $\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$ est dit **obtenu par** ou **inhérent à** la simulation, pour la structure $\mathbf{\Sigma}$. En pratique, ce sont plutôt les cheminements $\mathbf{v_s}(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$ qui sont déterminés, pour certains chemins $\mathbf{s}\in\mathbf{S}$ considérés comme pertinents (alinéa 3.14.D,E).

(C) Le procédé de détermination du plan viable $\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$ ou de ces cheminements $\mathbf{v_s}(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$ importe moins ici (alinéa 3.14.K) que leur **pertinence**, laquelle repose sur la **justification méthodologique** de la démarche prospective qui y conduit (alinéa 1.3.A). Le fondement de cette démarche réside dans la conjonction, la complémentarité, des deux conditions opératoires que constituent, d'une part (C1) la condition que $\mathbf{\Sigma}$ est une **structure primaire**, i.e. ne comporte pas de protocole de resserrement d'exploitation, d'autre part (C2) la **condition d'univocité** $B0(\mathbf{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$. La condition de primarité C1 signifie que la structure à contrôles spécifiés $\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ ne prend en compte que des **mécanismes (de dynamique) spontanés** du système représenté [3R] ; la condition d'univocité C2 vient compléter la condition C1 en signifiant que la représentation de ces mécanismes n'est pas sous-déterminée. Ce fondement, que constituent les conditions C1 et C2, est celui du **principe de causalité** dans le cadre des modèles intertemporel en cause ([1e]). Il marque la différence entre l'exploitation par simulation libre et celle par optimisation intertemporelle ou sous contraintes d'exploitation (alinéas 2.14.F, 3.14.H-J, 3.16.D-H).

(D) C'est sur ce fondement que repose, dans le cadre de la **prospective comportementale** (alinéas 3.1.F et 3.14.A), la **pertinence** des cheminements obtenus par simulation libre au moyen du modèle correspondant à la structure $\mathbf{\Sigma}$. Plus précisément, on introduit, dans ce cadre, la **règle d'inférence (des simulations libres)** ([3S]) : (D1) sous les conditions 3.14.C1,C2, le terme $\mathbf{v}_s(\mathbf{\Sigma}, e°, \mathbf{u})$ représente le **cheminement inféré** par le modèle, sur le chemin $s \epsilon \mathbf{S}$, à partir de l'état initial $e° \epsilon \mathbf{E}^{o}_{\mathbf{V}}(\mathbf{\Sigma})$ et sous l'effet du schéma de contrôle $\mathbf{u} \epsilon \mathbf{U}_{\mathbf{V}}(\mathbf{\Sigma}, e°)$.

Cette règle d'inférence joue un rôle central dans le propos méthodologique de ce chapitre en ce qui concerne les procédures d'exploitation des modèles basés sur les structures à commandes doubles ([3T]). On en envisage certains des tenants et aboutissants aux les alinéas 3.14.E-G, puis 3.14.J, ci-après.

(E) Dans l'expression "cheminement inféré" introduite par la règle 3.14.D1, le qualificatif "inféré" signifie : (E1) "proposé comme inférence, comme résultat, raisonnable de l'exploitation prospective du modèle".

On souligne que ce qualificatif ne doit pas être considéré comme synonyme de "valide", cela, d'une part car il s'agit de prospective, d'inférence sur l'avenir, et non de confrontation avec des observations (alinéa 3.1.F), d'autre part car la règle d'inférence 3.14.D1 ne préjuge rien concernant, l'état initial e°, le schéma de contrôle **u** ou le chemin **s**, si ce n'est qu'ils y sont donnés tels que la condition B0($\mathbf{\Sigma}$,e°,**u**) soit satisfaite par les deux premiers : rien, ni concernant leur pertinence, ni concernant leur détermination préalable. La pertinence de l'état initial fait partie de la pertinence de base du modèle, au même titre que ses données de base ou ses protocoles d'anticipation (alinéas 3.2.F, 3.7.A, 3.11.B, 3.13.E). La détermination du schéma de contrôle fait l'objet de la procédure de simulation sous contraintes (alinéas 3.14.H-J). Elle dépend des options d'exploitation, comme le choix du chemin **s** en cause.

(F) A la suite de la remarque précédente, on souligne que, vu son caractère conditionnel vis-à-vis du schéma de contrôle **u**, le cheminement inféré $\mathbf{v}_s(\mathbf{\Sigma}, e°, \mathbf{u})$ ne peut pas sans précaution être considéré comme une **prévision** (alinéa 3.1.F), même si, formellement, en tant qu'être mathématique, il est de même nature et si, phénoménologiquement, son interprétation est analogue (alinéa 3.5.B). De même, le rôle du schéma de contrôle dans la procédure de simulation libre, en particulier via la détermination de ce dernier par simulation sous contraintes (alinéa 3.14.H), réclame de distinguer cette procédure de la démarche de la **théorie de la viabilité** (alinéa 2.14.E), même si, d'une part, formellement, la condition d'univocité sur laquelle repose la première peut être induite par les stratégies que recherche la seconde (alinéa 3.13.C,D), d'autre part, méthodologiquement, la règle d'inférence 3.14.D1 est compatible avec l'esprit de cette théorie (alinéa 2.14.B).

Par ailleurs, on note que le **plan** $\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma}, e°, \mathbf{u})$, qui constitue le résultat complet de la simulation libre, en amont des cheminements inférés, est dit inhérent à cette simulation et non "inféré" par elle, vu le caractère potentiel du plan, qui consiste en la prise en compte de toutes les éventualités $s \in S^{\theta}$ et pas seulement celle d'un chemin (alinéa 2.3.D).

(G) Tel qu'elle est énoncée, la règle d'inférence 3.14.D1 est à distinguer de la **règle d'exclusivité (des simulations libres)** qui en est une réciproque, règle selon laquelle : (G1) les seuls cheminements susceptibles d'être inférés, dans le cadre du modèle en cause, sont ceux qui sont obtenus par simulation libre, sous les conditions 3.14.C1,C2. En particulier, eu égard à la condition 3.14.C1, cette règle G1 rend douteux les plans ou cheminements obtenus à partir de structures comportant des contraintes d'exploitation, au moins ceux obtenus directement (alinéa 3.14.J). Bien qu'il fasse partie de la conception méthodologique qui est sous-jacente à ce texte et qui motive la perplexité qu'exprime la question téléologique (alinéas 1.1.D, 1.4.A, 1.5.A, 2.14.F, 3.16.D), on évite le plus possible de se référer à la règle G1, cela par une certaine prudence épistémologique qui conduit à privilégier l'approche, constructive, consistant à chercher des justifications indirectes - basées sur la seule règle d'inférence 3.14.D1, via des équivalences mathématiques - plutôt que des arguments en défaveur d'une justification directe (alinéa 3.16.D), arguments au premier rang desquels figurerait évidemment la règle d'exclusivité G1.

(H) La procédure d'exploitation par **simulation sous contraintes (d'exploitation)**, du modèle correspondant à la structure, à commandes doubles, univoquement viable $\mathbf{\Sigma}$ et à l'état initial univoquement viable $e°$ de $\mathbf{\Sigma}$ (alinéas 3.13.B et 3.14.A), vise à (H1) la détermination d'un schéma de contrôle $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\mathbf{V}}(\mathbf{\Sigma},e°)$ tel que le plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u}) = \mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e°,\mathbf{u})$, inhérent à la simulation libre à partir de ce schéma de contrôle, satisfasse les conditions d'exploitation,

(3.57) pour tout $s \in S^{\theta}$, $(\xi_s, \zeta_s, \mathbf{u}_s) \in \Gamma_s$,

où $\Gamma = (\Gamma_s,\ s \in S^{\theta})$ est un **protocole de resserrement d'exploitation** donné, relativement à la structure $\mathbf{\Sigma}$. On désigne ici par $\bar{\mathbf{\Sigma}}$ la structure à commandes doubles engendrée par ce protocole de resserrement Γ à partir de la structure de départ $\mathbf{\Sigma}$. Cela étant, la détermination H1 ci-dessus équivaut à celle d'un plan viable pour cette structure resserrée $\bar{\mathbf{\Sigma}}$ et issu de l'état initial $e°$, conformément à la propriété (3.58) ci-après qui résulte directement de la définition de la structure $\bar{\mathbf{\Sigma}}$ et de la condition d'univocité $B0(\mathbf{\Sigma},e°,\mathbf{u})$:

(3.58) pour qu'un plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$, de la structure de départ $\mathbf{\Sigma}$, issu de l'état initial $e°$, soit viable pour la structure resserrée $\bar{\mathbf{\Sigma}}$, il faut et il suffit que sa partie spontanée (ξ, ζ) coïncide avec le plan $\mathbf{v}(\mathbf{\Sigma},e°,\mathbf{u})$ et vérifie les conditions d'exploitation (3.57).

Ainsi, la procédure d'exploitation par simulation sous contraintes est ramenée à l'exploitation pratique, en mode total, de la structure opérationnelle $\bar{\mathbf{\Sigma}}$ qui joue le rôle de structure opérationnelle totale, i.e. à la détermination de plans viables pour cette structure (alinéa 3.12.C) (^{3U}). En particulier, cette exploitation peut consister en la recherche d'un plan optimum, relativement à cette structure $\bar{\mathbf{\Sigma}}$ et à une fonction objectif de type normatif $\underline{Q}$, laquelle est alors une donnée d'exploitation venant compléter celle que constitue le protocole d'exploitation Γ (alinéa 3.12.G) (^{3W}).

(I) Cependant, la difficulté de la résolution numérique du problème d'optimisation correspondant à la recherche précédente (alinéa 3.15.F, 4.12.F, 5.6.C) limite, au moins pour l'heure, la portée pratique, de cette exploitation par simulation sous contraintes et amène à la remplacer par des procédures auxiliaires, indirectes, comportant des approximations non contrôlées, par exemple en ce qui concerne les contraintes d'exploitation (3.57). Un exemple de telle procédure est présenté au chapitre 5 (§ 5.9). On souligne seulement ici que ces procédures auxiliaires, ne sont que des instruments, palliatifs, de calcul, dont une éventuelle interprétation est a priori douteuse, au moins dans l'état actuel de leur compréhension (alinéa 5.11.C).

(J) La propriété (3.58) ci-dessus, peut aussi être exprimée comme suit en termes du lien entre les deux types de simulation : (J1) si le schéma de contrôle **u** est déterminé par simulation sous contraintes, comme schéma de contrôle d'un plan viable (ξ, ζ, **u**) de la structure resserrée $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$, i.e. en imposant les contraintes d'exploitation (3.57), alors la partie spontanée (ξ, ζ) de ce plan coïncide avec le plan $\mathbf{v}(\boldsymbol{\Sigma},e°,\mathbf{u})$ inhérent à la simulation libre, lequel vérifie ainsi ces contraintes "spontanément", sans les imposer.

Cette formulation fournit une justification à posteriori, via la condition d'univocité et la règle d'inférence 3.14.D3, d'un plan (ξ, ζ, **u**) déterminé par simulation sous contraintes : elle fait apparaître ce dernier comme pouvant être inféré par l'exploitation du modèle, bien qu'il soit déterminé à partir d'une structure comportant des contraintes d'exploitation, donc tombant sous le coup de la règle d'exclusivité 3.14.G1. Cet argument sera utilisé au § 3.16, comme un des éléments de la réponse constructive à la question téléologique, pour traiter la question de type 2 (alinéas 2.15.B et 3.16.E-G) ([3X]).

(K) Lorsque la condition d'univocité $B0(\boldsymbol{\Sigma},e°,\mathbf{u})$ que réclame la simulation (alinéa 3.14.B) est déduite, via la propriété (3.52a), de la condition de viabilité simple $C0(\boldsymbol{\Sigma},e°,\mathbf{u})$ et de la condition d'univocité locale $C1(\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{u})$, le plan ($\xi$, ζ, **u**) = $v(\boldsymbol{\Sigma},e°,\mathbf{u})$, inhérent à la simulation, peut être déterminé simplement par récurrence descendante dans l'arbre des aléas $s \epsilon S^{\theta}$, via la détermination, pour chaque $s \epsilon S^{\theta} \backslash S_{\theta}$ et chaque $\sigma \epsilon s+$, d'abord de l'unique élément de l'ensemble $G^{\mathbf{u}}_{s}(\xi_s)$, qui constitue la dynamique ζ_s, puis de l'état ξ_σ via l'équation d'évolution $\xi_\sigma = f_\sigma(\xi_s,\zeta_s,\mathbf{u}_s)$ ([3Y]).

En particulier, lorsque la structure de départ $\boldsymbol{\Sigma}$ (alinéas 3.14.A) est à anticipations, plus précisément coïncide avec la structure $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ (simplement) conditionnée par un protocole d'anticipation univoque $B = (B_s,\ s \epsilon S^{\theta})$ (alinéas 3.11.B, 3.12.D, 3.13.E), on se trouve dans la situation précédente de détermination récursive, eu égard au caractère univoque du protocole d'anticipation B : la détermination, pour chaques $s \epsilon S^{\theta} \backslash S_{\theta}$, de la dynamique $\zeta_s \in G^{\mathbf{u}}_{s}(\xi_s)$, repose alors, d'abord sur celle de l'unique anticipation (ε, δ) après s appartenant à $B_s(\xi_s,\mathbf{u}_s)$, puis sur l'égalité $\zeta_s = \delta_s$.

Le **lien entre simulation et anticipation** (alinéa 3.14.A) réside dans cette procédure de détermination récursive, par simulation libre, d'un plan viable pour une structure à anticipations.

§ 3.15 - PROBLEMES A OPTIMISATIONS MULTIPLES

(A) On s'intéresse ici au problème de la détermination de plans viables ou optimums, pour les structures de contrôle à anticipations (alinéa 3.12.C,D). Pour cela, on particularise les données opérationnelles $\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}$ et Γ (alinéa 3.12.B) en supposant que, d'une part la structure primaire $\mathring{\mathbf{\Sigma}} = (\mathring{X}, Y, \mathring{G}, \mathring{F})$ est à anticipations, i.e. est la structure de contrôle $\underline{\mathbf{\Sigma}}(\tau, B)$ simplement conditionnée par un protocole d'anticipation $B = (B_s, s \epsilon S^{\theta})$ (alinéa 3.11.B), d'autre part le protocole de resserrement d'exploitation $\Gamma = (\Gamma_s, s \epsilon S^{\theta})$ est de profondeur nulle (alinéas 3.12.E). Dans ces conditions, on explicite d'abord (alinéas 3.15.B,C) le système de contraintes définissant un plan viable pour la structure opérationnelle totale $\mathbf{\Sigma} = (X, Y, G, F)$. On envisage ensuite (alinéa 3.15.D) le problème de contrôle optimal correspondant (§ 2.10). En particulier, lorsque le protocole d'anticipation B est de type argument max (alinéa 3.7.E), ce problème, à optimisations multiples, peut être considéré comme une généralisation du problème de la double optimisation (alinéas 3.15.E,F).

(B) La recherche d'un plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ admissible pour la structure $\mathbf{\Sigma}$ est équivalente à celle d'un déploiement α de ce plan, conditionné par le protocole d'anticipation B relativement au schéma de contrôle $\mathbf{u}$ (alinéa 3.9.B) : cela résulte, d'une part de ce que la structure opérationnelle totale $\mathbf{\Sigma}$ est un resserrement de la structure primaire $\mathring{\mathbf{\Sigma}} = \underline{\mathbf{\Sigma}}(\tau, B)$, d'autre part, de la caractérisation (3.44) de cette dernière. Plus précisément, désignant par $\mathbf{D_v}(\mathbf{u})$ l'ensemble des déploiements α conditionnés par le protocole d'anticipation B, relativement au schéma de contrôle $\mathbf{u}$, et tels que le plan associé $\mathbf{pa}(\alpha, \mathbf{u})$ soit viable pour la structure $\mathbf{\Sigma}$, on a, par définition :

(3.60) un plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ est viable pour la structure $\mathbf{\Sigma}$, si et seulement s'il existe un déploiement $\alpha \in \mathbf{D_v}(\mathbf{u})$ tel que $(\xi, \zeta, \mathbf{u}) = \mathbf{pa}(\alpha, \mathbf{u})$.

Autrement dit, le système de contraintes définissant un plan viable $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ pour la structure totale $\mathbf{\Sigma}$ comporte, comme variables auxiliaires, les anticipations $(\varepsilon^s, \delta^s)$ $(s \epsilon S^{\theta})$ du déploiement $\alpha = (\varepsilon^s, \delta^s, s \epsilon S^{\theta})$ de ce plan. Ainsi, ce système est constitué des relations (3.61) à (3.64) ci-après :

(3.61) pour tout $s \epsilon S^{\theta}$, (a) $\varepsilon^s_s = \xi_s$, (b) $\zeta_s = \delta^s_s$;

(3.62) pour tout $s \epsilon S^{\theta}$, (a) $(\varepsilon^s_s, \delta^s_s, u_{s,s}) \in g_s \cap \Gamma^{\circ}_s$;

(3.63) pour tout $s \epsilon S^{\theta}$, (a) $(\varepsilon^s, \delta^s) \in B_s(\varepsilon^s_s, u_s)$;

(3.64) pour tous $s \epsilon S^{\theta} \backslash S_{\theta}$ et $\sigma \epsilon s+$, (a) $\varepsilon^{\sigma}_{\sigma} = f_{\sigma}(\varepsilon^s_s, \delta^s_s, u_{s,s})$.

(C) Les contraintes (3.61) et (3.63) ne font que récaptituler respectivement les contraintes (3.31) et (3.33) ; les contraintes (3.62) expriment conjointement l'admissibilité relative à la structure de base $\mathbf{\Sigma}_b(\Delta, \tau)$ [relations (3.5)] et au protocole de resserrement Γ [relations (2.21)], compte tenu de la forme (3.45) de ce dernier ; les équations d'évolution (3.64) traduisent la compatibilité d'évolution avec cette même structure de base [conditions (3.6)].

On note le découplage formel par lequel les composantes spontanées ξ_s et ζ_s $(s \epsilon S^{\theta})$ du plan ne figurent que dans les contraintes (3.61), ce qui fait que le sous-système des contraintes (3.62) à (3.64) definit l'ensemble $\mathbf{D_v}(\mathbf{u})$ [3Z].

(D) Soit Q une fonction objectif, relative au jeu de données de base Δ (alinéa 3.12.F). On désigne par $\overline{Q}$ la fonction numérique sur l'ensemble $\mathbf{De}(\Delta, \tau) \times \mathbf{U}$, noté ici $\mathbf{DU}$, qui associe, au couple $(\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbf{DU}$, la valeur $\overline{Q}(\alpha, \mathbf{u}) = Q(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ de la fonction Q pour le plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u}) = \mathbf{pa}(\alpha, \mathbf{u})$ associé au déploiement α et de schéma de contrôle $\mathbf{u}$.

Cela étant, le problème de contrôle optimal, relatif à la structure opérationnelle totale $\mathbf{\Sigma}$, à l'état initial e° et à la fonction objectif (sous forme réduite, pour la structure Σ, induite par) Q est équivalent au problème d'optimisation (3.65) ci-après, dont le domaine est le sous-ensemble de **DU** défini par le système de contraintes (3.62) à (3.64) et dont $\overline{Q}$ est la fonction objectif :

(3.65) trouver un couple $(\alpha^*, \mathbf{u}^*) \in \mathbf{DU}$ tel que,

$$\text{(a)}\quad \xi^\circ(\alpha^*) = e^\circ, \qquad \text{(b)}\quad \alpha^* \in \mathbf{D_v}(\mathbf{u}^*)\ ,$$

$$\text{(c)}\quad \overline{Q}(\alpha^*, \mathbf{u}^*) = \text{Sup}\ \{\ \overline{Q}(\alpha, \mathbf{u})\ |\ (\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbf{DU},\ \xi^\circ(\alpha) = e^\circ \ \text{ et }\ \alpha \in \mathbf{D_v}(\mathbf{u})\ \}.$$

Pour chaque schéma de contrôle **u**, on traduit de même, en termes du système de contraintes (3.62) à (3.64) et de la fonction objectif conditionnelle $\overline{Q}^{\mathbf{u}}$, le problème de contrôle optimal, relatif à la structure opérationnelle à contrôles spécifiés $\Sigma^{\mathbf{u}}$, à l'état initial e° et à la fonction objectif conditionnelle $Q^{\mathbf{u}}$.

(E) Lorsque le protocole d'anticipation $B = (B_s,\ s\epsilon S^\theta)$ est de type argument max relativement à un protocole de référence $\mathring{B} = (\mathring{B}_s,\ s\epsilon S^\theta)$ et à une fonction objectif d'anticipation $J = (J_s,\ s\epsilon S^\theta)$ (alinéa 3.7.E), les contraintes (3.63a) équivalent, pour chaque $s\epsilon S^\theta$, eu égard aux contraintes (3.61a), aux contraintes (3.66a,b) ci-après :

(3.66) pour tout $s\epsilon S^\theta$,

$$\text{(a)}\quad (\varepsilon^s,\ \delta^s) \in \mathring{B}_s(\xi_s, \mathbf{u}_s),$$

$$\text{(b)}\quad J_s(\varepsilon^s, \delta^s, \mathbf{u}_s) = \text{Sup}\ \{\ J_s(\varepsilon, \delta, \mathbf{u}_s)\ |\ (\varepsilon,\ \delta) \in \mathring{B}_s(\xi_s, \mathbf{u}_s)\ \}.$$

On souligne la multiplicité des optimisations (3.66) qui sont réclamées, dans ce cas, par la recherche des couples $(\alpha,\mathbf{u})$ tels que $\alpha \in \mathbf{D_v}(\mathbf{u})$, i.e. vérifiant les contraintes (3.62) à (3.64), optimisations qui, bien que "de même rang", sont, en général, couplées par les contraintes (3.62) et (3.64). Ainsi, la résolution du système (3.62) - (3.65) apparaît alors comme un **problème à optimisations multiples** (alinéa A.6.F) et le problème d'optimisation (3.65) comme une généralisation des problèmes de double optimisation dans laquelle les optimisations (3.66) jouent un rôle analogue à celle de second rang (alinéas A.6.E,F).

(F) L'importance de ces problèmes résulte en particulier du rôle qu'ils jouent dans la procédure de simulation sous contraintes, via la propriété (3.58) (alinéas 3.14.H,K). Leur formulation, dans le cadre très général des structures de contrôle à commandes doubles, est un des aboutissements de ce chapitre. Leur étude - tant théorique (existence de solutions), que pratique (algorithmes de résolution) - réclame évidemment une particularisation de ce cadre général. Le petit modèle présenté aux chapitres 4 et 5 fournit une telle particularisation dont une des finalités est de motiver et de concrétiser ces études (alinéas 4.1.F, 4.9.C, 4.12.F, 5.6.C, 5.11.C,D) [3α].

§ 3.16 - RETOUR SUR LA QUESTION TELEOLOGIQUE

(A) On reprend ici la problématique de la question téléologique (§ 2.15), en l'adaptant au cadre des structures de contrôle à commandes doubles correspondant à la démarche de prospective comportementale (alinéas 3.1.F et 3.13.A,B), cela en se limitant toujours au cas de l'optimisation comportementale (alinéas 2.15.A et 3.18.B). Après l'appareil formel (alinéas 3.16.B,C), on présente les formulations en cause dans le même ordre qu'au § 2.15 et en s'appuyant sur les distinctions qui y sont faites : d'abord la formulation de départ, purement interrogative, dans le mode total (alinéa 3.16.D), puis une formulation constructive basée sur la problématique de comparaison 2.15.C1, en mode à contrôles spécifiés, et sur la règle d'inférence des simulations libres (alinéa 3.16.E-H), enfin divers compléments (alinéas 3.16.I-L).

(B) Supposant donné, outre le jeu de données de base Δ (alinéa 3.2.G), une profondeur $\tau \geq 0$, l'appareil formel comporte les termes suivants : d'une part ceux de l'optimisation comportementale, i.e. la structure (de contrôle à commandes doubles) de base $\check{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{\Sigma}_b(\Delta, \tau)$, de profondeur τ, une fonction objectif $\check{Q}$, relative au jeu de données Δ (alinéa 3.12.F), fonction de type comportemental relativement à laquelle l'interprétation de l'optimisation est problématique (alinéas 2.14.F, 3.12.G, 3.16.D), un état initial e° de la structure $\check{\mathbf{\Sigma}}$, enfin un protocole de resserrement d'exploitation $\Gamma = (\Gamma_s,\ s \in S^\theta)$ relatif à cette structure $\check{\mathbf{\Sigma}}$; d'autre part une classe $\mathfrak{R}$ de structures de contrôle, notées $\underline{\mathbf{\Sigma}}$, qui sont des resserrements comportementaux de la structure de base $\check{\mathbf{\Sigma}}$ (alinéa 2.6.D). L'exemple fondamental de telle classe $\mathfrak{R}$ est constitué de celle, notée $\mathfrak{R}°(\Delta, \tau)$, qui est formée des structures de contrôle à anticipations $\underline{\mathbf{\Sigma}}(B) = \underline{\mathbf{\Sigma}}(\Delta, \tau, B)$ simplement conditionnées par un protocole d'anticipation B relatif au jeu de données de base Δ (alinéa 3.11.B). Dans ce cas, pour chaque schéma de contrôle **u**, on désigne par $\underline{\mathbf{\Sigma}}^{\mathbf{u}}(B)$ la structure $\underline{\mathbf{\Sigma}}^{\mathbf{u}}$, à contrôles spécifiés par **u**, associée à la structure $\underline{\mathbf{\Sigma}} = \underline{\mathbf{\Sigma}}(B)$. On désigne de plus par $\bar{\check{\mathbf{\Sigma}}}$ le resserrement, de la structure $\check{\mathbf{\Sigma}}$, engendré par le protocole de resserrement Γ. Les motifs méthodologiques de cet appareil apparaîtront ci-après, en particulier aux alinéas 3.16.D-H.

(C) Dans ces conditions, les formulations de la question téléologique vont faire intervenir les propriétés (3.68) et (3.69) ci-après d'un plan (ξ, ζ, **u**) relatif à la structure de base $\check{\mathbf{\Sigma}}$:

(3.68) le plan (ξ, ζ, **u**) est optimum, pour la structure $\bar{\check{\mathbf{\Sigma}}}$, relativement à la fonction objectif $\check{Q}$ et à l'état initial e° ;

(3.69) la partie spontanée (ξ, ζ) du plan (ξ, ζ, **u**) est, d'une part (a) un plan optimum, pour la structure à contrôles spécifiés $\check{\mathbf{\Sigma}}^{\mathbf{u}}$, relativement à la fonction objectif $\check{Q}^{\mathbf{u}}$ et à l'état initial e°, d'autre part (b) un plan viable pour la structure à contrôles spécifiés $\bar{\check{\mathbf{\Sigma}}}^{\mathbf{u}}$.

On note qu'en vertu de la propriété (3.12), la propriété (3.69b) équivaut à ce que le plan (ξ, ζ, **u**) soit viable pour la structure $\bar{\check{\mathbf{\Sigma}}}$. Un lien entre les propriétés (3.68) et (3.69) est exprimé par l'énoncé suivant qui montre que, dans certaines conditions ($^{3\beta}$), la première implique la seconde :

(3.70) pour qu'un plan (ξ, ζ, **u**), relatif à la structure $\check{\mathbf{\Sigma}}$, vérifie la propriété (3.69), il suffit qu'il vérifie la propriété (3.68) et que le schéma de contrôle **u** vérifie la propriété (3.71) ci-après,

(3.71) relativement à la fonction objectif $\check{Q}^{\mathbf{u}}$ et à l'état initial e°,
(a) la structure $\check{\mathbf{\Sigma}}^{\mathbf{u}}$ admet au moins un plan optimum qui est viable pour la structure $\bar{\check{\mathbf{\Sigma}}}^{\mathbf{u}}$,
(b) la structure $\bar{\check{\mathbf{\Sigma}}}^{\mathbf{u}}$ admet au plus un plan optimum.

En effet, soient, d'une part (ξ, ζ, **u**) un plan vérifiant les propriétés (3.68) et (3.71), d'autre part (ξ', ζ') un plan optimum pour la structure $\check{\mathbf{\Sigma}}^{\mathbf{u}}$ [condition (3.71a)]. Alors, d'une part la partie spontanée (ξ, ζ) du plan (ξ, ζ, **u**) est un plan optimum pour la structure $\bar{\check{\mathbf{\Sigma}}}^{\mathbf{u}}$, d'autre part le plan ($\xi'$, ζ') est aussi optimum pour la structure $\bar{\check{\mathbf{\Sigma}}}^{\mathbf{u}}$, puique cette structure est un resserrement de la structure $\check{\Sigma}^u$. Donc $(\xi', \zeta') = (\xi, \zeta)$, d'après la condition (3.71b). D'où la propriété (3.69a), donc aussi la propriété (3.69), d'après la propriété (3.12).

(D) Cela étant, la **formulation de départ**, purement **interrogative**, de la **question téléologique**, relative à la prospective comportementale et à l'optimisation comportementale (alinéas 3.1.F et 3.18.B), concerne : (D0) la justification de (a) la détermination d'un plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ vérifiant la propriété (3.68). Ce type de détermination, via la propriété (3.68), est utilisé couramment - et avec des commentaires concernant les modalités du calcul plus que sa justification - dans les travaux appliqués à vocation opérationnelle, en particulier ceux concernant l'effet de serre ($^{3\gamma}$). Or une réponse positive à cette question, réponse donnant une justification directe de la pertinence d'un tel plan, semble des plus problématiques, au moins dans le cadre de la prospective comportementale en cause ici (alinéas 3.1.F et 3.16.A). En effet, cette question D0 relève, dans le mode total, de la question de type 1&2, avec $\check{\Sigma}$ comme structure de référence Σ (alinéa 2.15.B). Autrement dit, elle concerne à la fois l'optimisation comportementale et l'occurrence des contraintes d'exploitation représentées par le protocole Γ, ce qui fait que tous les motifs de doute sur la possibilité d'une telle réponse sont réunis et, de plus, renforcés par le mode total (alinéa 3.16.J) ($^{3\delta}$). A l'appui de ces motifs, on remarque que l'absence d'une finalité (ou d'une fatalité) globale, finalité à laquelle serait soumise l'évolution du système, via l'optimisation et les contraintes d'exploitation (alinéa 2.14.F), est cohérente, avec la perspective d'économie régulée, vu la place importante qu'y occupent la doctrine libérale et les mécanimes de marché, même s'il s'agit de les réguler (alinéa 3.1.D,E) ($^{3\varepsilon}$).

Cette perspective défavorable, concernant une justification directe d'une détermination D0a, milite, conformément à l'approche constructive proposée ici, en faveur de la recherche de justifications indirectes, i.e. de justifications basées sur des équivalences mathématiques avec des déterminations moins problématiques. Les développements qui occupent la suite de ce § vont dans ce sens.

(E) Dans la recherche de justifications indirectes, on commence par passer à l'optimisation en mode à contrôles spécifiés, en remplaçant la propriété (3.68) par la propriété (3.69), ce qui est motivé par la propriété (3.70) et conduit à poser la question concernant : (E0) la justification de (a) la détermination d'un plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ vérifiant la propriété (3.69). La différence principale entre cette détermination E0a et la détermination 3.16.D0a réside en ce que l'optimisation comportementale, ici à contrôles spécifiés, ne concerne plus le protocole de resserrement d'exploitation : la question 3.16.D0 est remplacée, dans son type 1&2, par la question E0 qui équivaut à la conjonction des questions (E1) de type 1 et (E2) de type 2, correspondant respectivement aux propriétés (3.69a) et (3.69b), toutes deux à contrôles spécifiés, avec respectivement $\check{\Sigma}^u$ et $\hat{\Sigma}^u$ comme structures de référence Σ (alinéa 2.15.B). Ainsi, la justification indirecte de la question 3.16.D0, qui est visée via la question E0, réclame, outre le lien mathématique entre les propriétés (3.68) et (3.69) qu'exprime la propriété (3.70) (alinéa 3.16.C), de répondre aux questions E1 et E2 précédentes (alinéas 3.16.F-H).

(F) La question 3.16.E1, qui concerne la justification de la détermination d'un plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ vérifiant la propriété (3.69a), va être envisagée en s'appuyant sur la problématique de comparaison 2.15.C1 appliquée, en mode à contrôle spécifié, à la structure de référence $\Sigma = \check{\Sigma}^{\mathbf{u}}$, à la fonction objectif $Q = \check{Q}^{\mathbf{u}}$ et aux resserrements $\underline{\Sigma}$ de la forme $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ où $\underline{\Sigma}$ est un resserrement de la structure $\check{\Sigma}$ appartenant à la classe $\mathfrak{R}$ (alinéa 3.16.B). Cela donne, par exemple si la classe $\mathfrak{R}$ est la classe $\mathfrak{R}^{\circ}(\Delta,\tau)$ des structures à anticipation, la **question sous forme constructive** : (F0) étant donné un schéma de contrôle **u**, peut-on trouver un protocole d'anticipation B tel que, d'une part (a) la structure $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$ réalise exactement (voire seulement réalise ou réalise approximativement) la fonction objectif $\check{Q}^{\mathbf{u}}$ relativement à la structure $\check{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ et à l'état initial e°, d'autre part (b) la pertinence des plans viables pour la structure de contrôle à anticipations $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$, en particulier du protocole d'anticipation B, donne lieu, contrairement à la fonction objectif $\check{Q}$, à une **justification claire** ?

Ainsi, dans le cas d'une réponse positive, l'optimisation comportementale à contrôles spécifiés par le schéma de contrôle **u** - i.e. la détermination de plans (ξ, ζ, **u**) vérifiant la propriété (3.69a) - est indirectement justifiée, puisqu'elle bénéficie de (F1) la justification des plans viables pour la structure de contrôle à anticipations $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$. Cette démarche de justification est précisée aux alinéas 3.16.G,H, en la reliant, sous l'hypothèse que la propriété F0a est vérifiée, à la règle d'inférence des simulations libres 3.14.D1.

(G) Une réponse positive à la question 3.16.E1, i.e. à la question 3.16.F0, réclame une justification de la pertinence F0b des plans viables pour la structure de contrôle à anticipations $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$. Afin d'en donner une s'appuyant sur la règle d'inférence des simulations libres 3.14.D1, on suppose que sont vérifiées les deux conditions suivantes (alinéas 3.13.C,E) : d'une part (G1) l'état initial e° et le schéma de contrôle **u** sont tels que la structure $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$ admet un plan viable issu de e° ; d'autre part (G2) le protocole d'anticipation B est univoque. Dans ces conditions, en vertu de la propriété (3.56), la structure $\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$, l'état initial e° et le schéma de contrôle **u** vérifient la condition d'univocité B0($\underline{\Sigma}$,e°,**u**) [relation (3.48)] qui est à la base de la procédure de simulation libre (alinéa 3.14.B) et constitue la condition 3.14.C2 d'application de la règle 3.14.D1. Par ailleurs, la condition 3.14.C1 est ici vérifiée par définition de la structure $\underline{\Sigma}(B)$ (alinéas 3.16.B,H). D'où la justification annoncée en vertu de cette règle.

Ainsi, sous les hypothèses 3.16.G1 et 3.16.G2 ci-dessus, une réponse positive à la question 3.16.E0 ne réclame plus qu'une réponse positive à la question 3.14.E2. Or, cette réponse est fournie par propriété (3.58) ou la formulation 3.14.J1, pourvu que le schéma de contrôle **u** soit déterminé de telle sorte que le plan viable **v**($\underline{\Sigma}$,e°,**u**) vérifie, outre les conditions (3.71), les contraintes d'exploitation (3.57) stipulées par le protocole de resserrement d'exploitation $\Gamma = (\Gamma_s,\ s \in S^{\theta})$.

(H) On souligne l'importance, dans cette démarche, de ce que les structures $\check{\Sigma}$ et $\underline{\Sigma}(B)$ en cause sont ici les structures primaires $\Sigma_b(\Delta,\tau)$ et $\underline{\Sigma}(\Delta,\tau,B)$, i.e. ne font pas intervenir de protocole de resserrement d'exploitation (alinéa 3.12.B), vu que c'est seulement sous cette condition que l'on peut s'appuyer sur la règle 3.14.D1 (condition 3.14.C1). On souligne aussi le statut spécifique de la question 3.14.E2, en ce sens que, sous la condition d'univocité, une réponse positive à cette question ne dépend que de la détermination du schéma de contrôle **u** par simulation sous contraintes.

On souligne enfin que la structure de référence $\check{\Sigma}$ (alinéa 3.16.B) est sans anticipation, en tant que structure de base, la mention de la profondeur τ étant seulement de convenance formelle (alinéa 3.3.F). De plus, bien que cela ne soit pas requis formellement, l'interprétation de l'optimisation comportementale est plus claire si le protocole de resserrement d'exploitation Γ et la fonction objectif $\check{Q}$ sont aussi sans anticipation (alinéas 3.12.E,F), comme c'est le cas dans le modèle présentée au chapitres 4 et 5 (alinéas 4.13.C et 5.10.B) : la démarche de comparaison 2.15.C1 consiste alors à rapprocher les plans viables, pour une structure à anticipations $\underline{\Sigma}(\Delta,\tau,B)$, des plans optimums, pour une structure sans anticipation $\check{\Sigma}$ et une fonction objectif sans anticipation $\check{Q}$.

(I) Dans les formulations précédentes, à contrôles spécifiés (alinéas 3.16.E-H), c'est le même schéma de contrôle $\mathbf{u}$ qui intervient formellement, d'une part dans la structure de référence $\check{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ et dans la fonction objectif réalisée $\check{Q}^{\mathbf{u}}$, d'autre part dans la structure à anticipations $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$. Cependant, vu que la structure de référence $\check{\Sigma}$ et la fonction objectif réalisée $\check{Q}$ sont sans anticipation (alinéa 3.16.H), cette identité recouvre une grande latitude de choix du schéma de contrôle $\hat{\mathbf{u}}$ intervenant dans la structure à anticipations $\underline{\Sigma}^{\hat{\mathbf{u}}}(B)$: le seul lien entre ce dernier et le schéma $\mathbf{u}$ intervenant dans les termes sans anticipation $\check{\Sigma}^{\mathbf{u}}$ et $\check{Q}^{\mathbf{u}}$ est la coïncidence sur les aléas initiaux de chaque anticipation,

(3.72) pour tous $s \in S^{\theta}$, $\quad u_{s,s} = \hat{u}_{s,s}$,

laquelle laisse indéterminées, pour chaque $s \in S^{\theta}$, les composantes $\hat{u}_{s,\sigma}$, pour tout $\sigma \in [s,\tau]$ différent de s. En fait, au-delà de cette latitude choix de $\hat{\mathbf{u}}$, on peut envisager, comme exemple d'affaiblissement de la définition (2.58) du réalisateur (alinéa 2.15.H), de renoncer à ce lien, en remplaçant, dans cette définition, la structure $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$ par la structure $\underline{\Sigma}^{\hat{\mathbf{u}}}(B)$, où $\hat{\mathbf{u}}$ est obtenu par une transformation $\mathbf{u} \longrightarrow \hat{\mathbf{u}} = m(\mathbf{u})$ du schéma de contrôle ne vérifiant pas la relation (3.72).

(J) Dans le mode total, la démarche de justification ci-dessus (alinéa 3.16.F) n'est pas formellement exclue ($^{3\eta}$), mais n'a pas d'intérêt opérationnel, au moins dans la perspective d'économie régulée (alinéa 3.1.D,E) ($^{3\lambda}$), car la structure $\underline{\Sigma}(\Delta,\tau,B)$ est en général, dans cette perspective, trop sous-déterminée pour que ses plans viables aient un intérêt autre qu'artefactuel. Autrement dit, il ne faut pas confondre la recherche d'une réponse à la question téléologique, qui concerne le mode à contrôles spécifiés, avec la recherche d'une schéma de contrôle engendrant un plan ayant un intérêt opérationnel, i.e. un plan compatible avec un protocole de resserrement d'exploitation donné : cette recherche fait l'objet de la procédure d'exploitation par simulation sous contraintes (alinéas 3.14.H-J), la fonction objectif en cause étant alors de type normatif plutôt que de type comportemental (alinéa 3.12.G,H).

(K) En ce qui concerne la **question inverse**, de la question 3.16.F0 (alinéa 2.15.I), le protocole d'anticipation B étant ici donné, une réponse positive n'est pas, a priori, particulièrement utile pour l'exploitation à contrôle spécifié, relativement un schéma de contrôle u donné, car la détermination d'un plan viable pour la structure $\underline{\Sigma}^{\mathbf{u}}(B)$ - qui, comme simulation libre, se fait de proche en proche, récursivement dans l'ordre de l'arbre S (alinéa 3.14.K) - peut être ici beaucoup plus facile, numériquement, que l'optimisation globale que réclame la détermination d'un plan optimum pour la structure $\check{\mathbf{\Sigma}}^{\mathbf{u}}$, relativement à la fonction objectif associée Q ($^{3}\mu$).

(L) Par contre, une telle réponse positive est à prendre en compte pour la détermination préalable, par simulation sous contraintes, d'un schéma de contrôle **u** optimum relativement à une fonction objectif de type normatif $\underline{Q}$ (alinéa 3.14.H), à condition que la fonction objectif Q construite (alinéa 2.15.I) soit compatible avec le protocole de resserrement d'exploitation en cause, ici indispensable (alinéa 3.16.J). Par exemple, si le protocole d'anticipation donné B est de type argument max, la détermination directe, à partir de la structure $\underline{\mathbf{\Sigma}}$(B) et de la fonction objectif $\underline{Q}$ pose un problème à optimisations multiples, avec une optimisation de second rang par aléa $s \epsilon S$, alors que la détermination basée sur la structure $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$, relativement aux fonctions objectif Q et $\underline{Q}$, ne pose qu'un problème de double optimisation (sic !), avec Q au second rang et $\underline{Q}$ au premier. Ces considérations générales, qui sont évidemment à préciser et à particulariser (alinéa 4.9.D), sont mises ici, parmi des remarques méthodologiques, pour illustrer les liens entre la question téléologique et le problème à optimisations multiples, après la distinction faite à l'alinéa 3.16.J. Mais elles constituent aussi, du strict point de vue mathématique, un complément à la formulation de ce problème (alinéa 3.15.F).

§ 3.17 - CAS D'UNE FONCTION OBJECTIF SEPARABLE

(A) Certains aspects de la question téléologique sous forme constructive qui est envisagée au § 3.16 sont illustrés ici en considérant le cas où la fonction objectif est séparable, cas dans lequel il semble raisonnable de chercher un protocole d'anticipation de type argument max, en déterminant ses fonctions objectif locales à partir de celles de la fonction globale.

(B) Les notations étant celles du § 3.16 (alinéa 3.16.B), on suppose que la fonction objectif $\check{Q}$ est séparable et sans anticipation, i.e. de la forme,

(3.73) pour tout plan $(\xi, \zeta, \mathbf{u}) \in \Pi(\Delta,\tau)$, $\quad \check{Q}(\xi, \zeta, \mathbf{u}) = \sum_{s \in S^{\theta}} q_s(\xi_s, \zeta_s, u_{s,s})$,

où $q = (q_s,\ s \epsilon S^{\theta})$ est une fonction objectif sous forme locale (alinéa 2.11.A) sans anticipation, i.e. relative à la structure de contrôle de base $\mathbf{\Sigma}_b(\Delta,0)$ de profondeur nulle (alinéa 3.12.F), ce qui fait que, pour chaque $s \epsilon S^{\theta}$, la fonction q_s peut être considérée comme définie sur l'ensemble produit $E_s \times D_s \times U_s$. De plus, on désigne par S_* le sous-ensemble **limite** $\{s \epsilon S^{\theta} \mid \underline{t}_s > \theta - \tau\}$ de S^{θ}.

(C) Cela étant, on s'intéresse aux protocoles d'anticipation B de type argument max, relativement à un protocole de référence $\mathring{B} = (\mathring{B}_s,\ s \epsilon S^{\theta})$, dont la fonction objectif d'anticipation $J = (J_s,\ s \epsilon S^{\theta})$ est de la forme,

(3.74) pour tous $s \epsilon [s°, \theta - \tau]$, $(\varepsilon, \delta) \in A_s(\tau)$, $\underline{u} \in \mathbf{U}_s$,

$$\text{(a)} \quad J_s(\varepsilon, \delta, \underline{u}) = \sum_{\sigma \epsilon [s,\tau]} \lambda_{s,\sigma} q_\sigma(\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma, \underline{u}_\sigma),$$

où le multiplet $\lambda = (\lambda_{s,\sigma},\ s \epsilon S^{\theta},\ \sigma \epsilon [s,\tau])$ des coefficients est donné. On note que les relations (3.74) laissent indéterminée la **partie limite** de la fonction objectif d'anticipation J, i.e. le multiplet $J_* = (J_s,\ s \epsilon S_*)$ des fonctions objectif d'anticipation J_s relatives aux aléas terminaux $s \epsilon S_*$. On note aussi le caractère **glissant** des relations (3.74a) qui sont introduites pour lier J à q.

Ainsi : (C0) la recherche du protocole d'anticipation B, que réclame la question téléologique 3.16.F0, revient ici à la recherche, d'une part du protocole de référence $\mathring{B}$, d'autre part du couple (λ, J_*). On fait seulement ci-après quelques remarques sur la définition de ces termes (alinéas 3.17.D-G) et leurs liens éventuels avec la problématique de Bellman (alinéa 3.17.H).

(D) La première remarque, qui concerne directement la question téléologique, réside en ce que les optimisations par rapport aux fonctions objectif d'anticipation définies par les relations (3.74) peuvent être justifiées, alors que celle par rapport à la fonction objectif globale de départ ne l'est pas (alinéa 3.7.G). L'expression de cette distinction est un des aboutissements de l'appareil formel introduit dans ce chapitre.

(E) En ce qui concerne le protocole de référence $\mathring{B}$, il semble raisonnable, d'une part (E1) de lui imposer, au moins en un premier temps, d'être conforme (alinéa 3.8.B), d'autre part (E2) de considérer qu'il peut refléter les contraintes stipulées par le protocole de resserrement d'exploitation Γ. Ainsi, d'éventuelles conditions finales, stipulées par ce dernier, seraient à transposer, comme conditions finales d'anticipation, dans la définition de B à partir du protocole conforme de base. Cependant, cette dernière condition E2 peut également être exclue en considérant que (E3) les contraintes d'exploitation, que représente en extension le protocole de resserrement Γ, n'ont pas à être prises en compte par le protocole d'anticipation B, qui représente seulement le comportement spontané du système (alinéa 3.7.A).

(F) En ce qui concerne les coefficients $\lambda_{s,\sigma}$ ($s\epsilon S^{\theta}$, $\sigma\epsilon[s,\tau]$), au-delà de l'option canonique qui consiste à (F1) les prendre tous égaux à un, on peut envisager (F2) de les moduler pour qu'ils reflètent, aussi (condition 3.17.E2), les contraintes d'exploitation. Mais, on peut également considérer que, comme pour le protocole de référence (condition 3.17.E3), (F3) une éventuelle modulation de ces coefficients doit être indépendante des contraintes d'exploitation.

(G) Enfin, en ce qui concerne la partie limite J_* de la fonction objectif d'anticipation J, on peut envisager de chercher les fonctions objectif d'anticipation J_s, pour $s\epsilon S_*$, sous la même forme (3.74a) que pour $s\epsilon S^{\theta}\backslash S_*$, mais ici relativement à des fonctions objectif locales q_σ qui sont à déterminer.

(H) Par ailleurs, plus généralement, un lien entre les termes, $\mathring{B}$ et J, en cause ici et la fonction objectif sous forme locale de Bellman (alinéa 2.12.B) n'est pas à exclure, en fonction de l'idée selon laquelle le cadre des structures à anticipations devrait permettre de dépasser l'indication négative du cas sans anticipation (alinéas 2.15.E,F). Cependant, la structure de Bellman à considérer pour cela pose question, vu que la présence du protocole de resserrement Γ empêche que cette structure soit clairement la structure de base $\Sigma_b(\Delta,\tau)$.

§ 3.18 - <u>EPILOGUE DU CHAPITRE 3</u>

(A) Comme ceux du chapitre 2 (§ 2.16), les développements de ce chapitre soulèvent de nombreux problèmes mathématiques, en particulier ceux qui font l'objet des § 3.15 à 3.17. On rappelle également, d'une part ceux qui concernent la mise en oeuvre de la simulation sous contraintes (alinéa 3.14.I), qu'il faudrait relier à la recherche des stratégies en théorie de la viabilité, d'autre part ceux qui concernent les liens entre l'approche des anticipations présentée ici et la théorie des anticipations rationnelles (alinéas 3.10.E-G et 3.11.F).

De plus, les formulations de ce chapitre réclameraient, comme celles du chapitre 2, des améliorations qui ne sont pas seulement de nature terminologique. En particulier, il faut pour cela approfondir le statut épistémologique des anticipations et des dynamiques qu'elles induisent, en liaison avec la recherche mentionnée ci-dessus les concernant, voire en élargissant leur champ d'application (alinéa 3.1.B).

(B) Dans ce sens, on note que la question téléologique n'est envisagée, au § 3.16, comme au § 2.15, que dans le cas de la question de type 1 telle qu'elle est formulée à l'alinéa 2.15.B, i.e. dans le cas où la question concerne la détermination de plans viables comme plans optimums relativement à une fonction objectif de type comportemental, cas qui est celui de la plupart des modèles envisagés aux § 1.4 (type 1.2.E1), ainsi que du modèle présentée aux chapitre 4 et 5 (alinéas 4.9.D et 4.13.C, § 5.10). Or ce cas est très particulier : le cas général, dans lequel il faut reprendre les développements concernant la question téléologique, est celui des modèles d'équilibre intertemporel qui sont mentionnés au § 1.5, modèles où l'optimisation comportementale est remplacée par le système de contraintes définissant l'équilibre intertemporel.

Dans cette généralisation, la partie spontanée d'un plan (alinéa 3.4.D) est détaillée en identifiant divers agents dont les comportements, en particulier les anticipations individuelles, interagissent pour engendrer l'équilibre intertemporel. Conformément à ce qui est suggéré au § 1.5, c'est alors dans ce cadre multi-agents que doit être formulée la question téléologique sous forme constructive (alinéa 3.16.F), question conjuguant un déroulement temporel par simulation libre avec les anticipations individuelles des agents, éventuellement obtenues par optimisation. Cette formulation va réclamer la mise en place, comme application du formalisme introduit dans ce chapitre, des structures de contrôle, à commandes doubles, multi-agents permettant la représentation des équilibres intertemporels de marché (alinéa 1.5.C).

(C) Par ailleurs, le formalisme des structures à commandes doubles - ici principalement appliqué à l'analyse de la prospective comportementale (§ 3.13 à 3.15), bien qu'il soit introduit de façon générale (§ 3.12) - pourrait aussi être utilisé pour l'analyse des procédures de prospective de base. En effet, parmi ces dernières, nombreuses sont celles qui se traduisent, dans ce formalisme, par l'exploitation d'une structure de base (alinéa 3.3.E), au moyen d'un protocole de resserrement d'exploitation (alinéas 3.12.B,E) et d'une fonction objectif de type normatif (alinéas 3.12.F,G).

CHAPITRE 4 - UN MODELE DE LA PROBLEMATIQUE DES LIMITES ET DU DEVELOPPEMENT DURABLE : (I) CADRE GENERAL

Dans ce chapitre et le suivant, on présente un "petit" modèle planétaire de croissance à long terme qui rassemble schématiquement quelques uns des principaux aspects de la problématique des limites et du développement durable : la croissance de la population, l'effet de serre et leur contrôle. Par le thème général, ce modèle s'apparente à ceux relatifs à l'effet de serre qui sont envisagés au chapitre 1 (alinéa 1.1.E et § 1.4), mais, à la différence de ces derniers qui ont une visée opérationnelle, le propos est ici exclusivement méthodologique : il est d'illustrer comment le formalisme général introduit au chapitre 3, dont celui des structures de contrôle à anticipations, peut être particularisé dans la cadre spécifique d'un modèle significatif et numérisable.

Ce propos méthodologique est traduit différement et de façons complémentaires dans les deux chapitres : le modèle est d'abord présenté formellement, de façon générique, dans ce chapitre, en mettant l'accent sur l'interprétation de ses divers composants et ses perspectives d'exploitation, après quoi, au chapitre 5, ce modèle générique est spécifié et testé, numériquement.

Ainsi, dans le présent chapitre, le modèle et ses procédures d'exploitation sont présentés selon les schémas généraux introduits au chapitre 3 : données et contraintes de base (§ 4.2 à 4.8), dont fonctions de production, de pollution et démographiques (§ 4.5 à 4.8), récapitulation et propos illustratif du modèle (§ 4.9), protocoles d'anticipation (§ 4.10 et 4.11), protocoles de resserrement d'exploitation, fonctions objectif et question téléologique (§ 4.12 et 4.13). Au préalable, pour la démarcation du modèle (§ 4.1), on récapitule les aspects envisagés de la problématique du développement durable. Enfin, comme épilogue (§ 4.14), on revient sur les antécédents et on envisage les perspectives de poursuite, du travail.

§ 4.1 - DEMARCATION DU MODELE

(A) La **démarcation** du modèle, son cahier des charges, doit préciser les deux types de déterminants que sont : d'une part les caractéristiques générales du système à représenter ; d'autre part les conditions et objectifs de l'exploitation du modèle ([4a]). On aborde les déterminants du premier type par une présentation schématique de la problématique des limites et du développement durable (alinéas 4.1.B-E), ceux du second type, en situant le modèle, de prospective comportementale (alinéa 3.1.F), en cause par rapport à ceux concernant l'effet de serre (alinéas 4.1.F-I).

(B) Le système considéré est la planète, envisagée, selon une **approche macroéconomique** très agrégée, dans une perspective d'**économie régulée**, en fonction, d'une part des **déterminants bio-géophysique** qui procèdent de la problématique des limites à la croissance quantitative, d'autre part des **déterminants éthiques** qui procèdent de l'exigence du développement durable. On présente schématiquement ces déterminants aux alinéas 4.1.C-E ci-après ([4b]).

(C) L'approche macroéconomique d'économie régulée (alinéas 3.1.D,E) signifie que l'évolution de la planète est le fait d'une dynamique propre, spontanée, résultant de l'interaction d'acteurs décentralisés, dynamique sur laquelle les instances régulatrices, locales ou globales, peuvent agir, mais seulement par des interventions indirectes, sans avoir les moyens d'une planification dirigiste. De plus, en l'absence de ces interventions, la dynamique spontanée pousse à une croissance quantitative, tant de la population que de l'utilisation des ressources naturelles.

(D) La **problématique des limites** signifie que les ressources naturelles - que la dynamique spontanée pousse à consommer à satiété - sont limitées : (D1) **limites directes** des flux de ressources renouvelables (terres cultivables, eaux douces, gisements d'énergies renouvelables) et des stocks de ressources fossiles (en particulier énergétiques) ; (D2) **limites indirectes** des capacité de la biosphère à absorber les rejets de l'activité humaine, en particulier ceux auxquels est lié l'effet de serre.

Ces limites, que le progrès technique permet de repousser, mais pas de supprimer, impliquent, en toute vraissemblance scientifique, que la poursuite du développement incontrôlé, tel qu'il est engagé - en particulier via la croissance de la population et l'uniformisation des genres de vie concomitante de la mondialisation - conduit à des **impasses**, pour ne pas dire des **catastrophes**, se traduisant par l'oblitération du potentiel vital des générations futures ([4c]).

(E) Face à ces sombres perspectives, l'exigence éthique du **développement durable** préconise la **pérennité**, via un arbitrage entre le présent et le futur à long terme : un mode de développement permettant de satisfaire au mieux les aspirations et besoins présents sans compromettre ceux des générations futures ([4d]). Au-delà du discours incantatoire qui entoure cette exigence, il s'agit d'atteindre un **état stationnaire** acceptable de l'économie planétaire ([4e]), en conjuguant la **stabilisation de la population** ([4g]) et le passage du mode de développement occidental - marqué par l'idéologie du progrès et de la croissance quantitative - à un **écodéveloppement**, respectueux des équilibres de la biosphère, en particulier maîtrisant l'effet de serre, et d'une équité planétaire ([4h]).

(F) Pour inscrire cette perspective d'un développement durable dans la réalité de la dynamique planétaire (alinéa 4.1.C), il faut préciser comment les interventions des instances régulatrices peuvent infléchir l'évolution actuelle - porteuse de catastrophes (alinéa 4.1.D) - vers un état stationnaire acceptable. L'objet, des modèles relatifs à l'effet de serre qui sont envisagés au chapitre 1 (type 1.1.E1 et § 1.4) et de celui présenté dans ce chapitre, est l'étude de ces interventions et des scénarios correspondants, en particulier de la multiplicité des états stationnaires envisageables. Cependant, à la différence des premiers qui s'inscrivent dans le contexte décisionnel du débat politique sur l'effet de serre ([4i]), le propos du modèle présenté est exclusivement **méthodologique** : il est d'illustrer comment le formalisme et les schémas généraux de la modélisation macroéconomique introduits au chapitre 3 peuvent être particularisés dans le cadre spécifique d'un modèle significatif et numérisable ([4j]), en particulier d'illustrer, d'une part les procédures d'exploitation par simulation (§ 3.14) d'un modèle dont la dynamique est gouvernée par des anticipations (alinéas 1.2.B et 3.1.I,J, § 3.6 à 3.11), d'autre part les problèmes à optimisations multiples et la question téléologique correspondants (§ 3.15 à 3.17).

(G) Les éléments rassemblés dans la démarcation ci-dessus (alinéas 4.1.B-E) vont servir de références conceptuelles pour nourrir les interprétations des composants du modèle introduits, dans ce chapitre 4, de façon formelle, axiomatique, conformément à la démarche de formalisation annoncée (alinéa 1.3.D). Ainsi, la présentation du modèle générique qui fait l'objet de ce chapitre et celle des applications qui font l'objet du suivant devraient être accessibles, par exemple en vue des études théoriques mentionnées à l'alinéa 1.3.C, à un lecteur n'ayant pas de connaissances techniques des modèles du type 1.1.E1 en cause et même, plus généralement, des modèles macroéconomique, cela, évidemment, à condition qu'il ait pris connaissance des chapitres 2 et 3 ([4j]), au moins dans leurs grandes lignes (alinéa 1.6.D). Dans ce sens, on ne cherche pas ici, au stade préliminaire de la démarcation, à donner un schéma "ante formulas" autonome du modèle. Cependant, à l'usage des lecteurs qui connaissent les modèles du type 1.1.E1, on situe ci-après brièvement le modèle présenté par rapport à eux (alinéas 4.1.H,I).

(H) Le modèle s'apparente à ceux de ces modèles qui sont dérivés du modèle de croissance endogène de Ramsey-Harod-Domar-Solow ([4k]), modèles très agrégés, parmi lesquels on privilégie le modèle DICE de Nordhaus ([4m]) : il s'agit d'un modèle d'**économie physique**, sans représentation directe du marché, à **un seul bien** agrégeant consommations et investissements, avec une fonction de production issue de celle de Cobb-Douglas ([4n]). De plus, comme chez Nordhaus, le modèle ne comporte qu'**un seul type de capital**, ce qui fait que les transformations du système productif ne sont prise en compte que par des modifications de la productivité, en particulier par des **ponctions**, des prélèvements, sur la production qui peuvent être controlés par les instances régulatrices, par exemple des ponctions destinées à réduire les émissions polluantes.

(I) Dans ce cadre commun, en plus de la disparité fondamentale tenant à l'introduction d'une dynamique gouvernée par des anticipations (alinéas 1.2.B et 3.1.I,J), le modèle présenté comporte cinq différences structurelles importantes avec celui de Nordhaus : (I0) le modèle vise des études exploratoires, de **prospective comportementale** (alinéa 3.1.F), à large spectre et pas seulement des études de variantes autour d'un scénario central de calage ; d'où l'importance de la prise en compte des **valeurs extrèmes** des variables ; (I1) le **niveau de la population** est **endogène**, son taux de croissance dépendant à la fois de la consommation unitaire et d'un **niveau de développement**, lequel constitue une variable de stock supplémentaire dont l'évolution est controlée, aussi via des **ponctions** sur la production, par les instances régulatrices ([4o]) ; (I2) la **fonction de production**, du type de celle de Cobb-Douglas, est assortie d'une borne sup. de la production et d'une borne inf. du rapport capital / travail ; (I3) les variables de contrôle sont les **ponctions** sur la production plutôt que leurs effets ([4p]) ; (I4) eu égard au propos purement illustratif (alinéa 4.1.G), le traitement de l'**effet de serre** est simplifié au maximum, en ne prenant en compte que les émissions de polluants et leur accumulation ([4q]).

(J) Le chapitre comporte comme suit deux parties : dans la première partie, on présente d'abord (§ 4.2 et 4.3) le jeu de données de base dans ses grandes lignes, puis (§ 4.4 à 4.8) le détail des fonctions de production, de pollution et démographiques, sans que ce détail ne soit indispensable à la compréhension de la suite (alinéa 4.4.A) ; on présente ensuite, dans la deuxième partie (§ 4.10 à 4.13), les autres composants du modèle, avec, entre les deux parties, une récapitulation (§ 4.9) à laquelle on peut éventuellement se reporter d'entrée.

§ 4.2 - DONNEES ET CONTRAINTES DE BASE : (I) DEFINITIONS

(A) Dans ce § 4.2 et au § 4.3, on met en place, le cadre formel du modèle en introduisant ses données de base (§ 3.2). Conformément à la démarche annoncée aux alinéas 1.3.D et 4.1.F, ces données sont d'abord, dans ce §, définies axiomatiquement, en tant qu'êtres mathématiques, leurs interprétations venant ensuite, au § 4.3.

Les données de base vont être définies en termes de trois **nomenclatures**, I, J, H, ensembles finis, non vides, définis par,

(4.1) (a) $I = \{k,m,b,n,p\}$, (b) $J = \{a,k,c,m,q,r,v,w\}$, (c) $H = \{q,r\}$,

et dont les éléments, représentant des types de variables (alinéa 4.3.A), vont indexer les variables et contraintes scalaires (4s). Si K est une nomenclature, l'ensemble $\mathbf{R}_+^K$ des multiplets (z_k, $k \epsilon K$) de nombres réels ≥ 0 indexés par K, est appelé le **domaine standard** associé à la nomenclature K.

L'arbre S des éventualités externes (alinéa 3.2.A) est a priori quelconque. En tant que donnée de situation, il constitue la première donnée de base (alinéas 3.2.E et 4.2.G).

(B) Les **données extensives de base**, i.e. les ensembles E_s, D_s, U_s ($s \epsilon S$) (alinéa 3.2.B), sont, conformément aux relations (4.2) ci-après, les domaines standards associés aux **nomenclatures**, I, J, H définis par les relations (4.1) :

(4.2) pour tout $s \epsilon S$, (a) $E_s = \mathbf{R}_+^I$, (b) $D_s = \mathbf{R}_+^J$, (a) $U_s = \mathbf{R}_+^H$.

Ainsi, les éléments, les postes, des nomenclatures, I, J, H, repèrent les (types de) **variables scalaires** du modèle, en tant que composantes, e_i ($i \epsilon I$), d_j ($j \epsilon J$), u_h ($h \epsilon H$), des variables vectorielles, e, d, u, qui décrivent les domaines standards, E_s, D_s, U_s ($s \epsilon S$), correspondants (alinéa 3.2.B). On note que, les définitions (4.2) stipulent que toutes les variables (scalaires) ne prennent que des valeurs ≥ 0.

(C) En ce qui concerne les **données fonctionnelles de base** (alinéa 3.2.D), les **fonctions d'évolution de l'état**, f_s ($s \epsilon]s°>$), sont spécifiées en explicitant les composantes $\underline{e}_i = f_{s,i}(e,d,u)$ ($i \epsilon I$) de l'image $\underline{e} = f_s(e,d,u)$, par l'application f_s, du triplet $(e,d,u) \epsilon E_{s-} \times D_{s-} \times U_{s-}$, avec $e = (e_i,\ i \epsilon I)$, $d = (d_j,\ j \epsilon J)$, $u = (u_h,\ h \epsilon H)$. Posant, conformément aux relations (4.1) et (4.2),

(4.3) (a) $e = (e_k, e_b, e_m, e_n, e_p)$, (b) $d = (d_a, d_k, d_c, d_m, d_q, d_r, d_v, d_w)$,

(c) $u = (u_q, u_r)$, (d) $\underline{e} = (\underline{e}_k, \underline{e}_b, \underline{e}_m, \underline{e}_n, \underline{e}_p)$,

cette explicitation, pour chaque $s \epsilon]s°>$, de la fonction f_s, se traduit par les égalités scalaires (4.4) à (4.8) :

(4.4) $\underline{e}_k = (1 - \alpha_{s-,k})e_k + d_k$; (4.5) $\underline{e}_m = (1 - \alpha_{s-,m})e_m + d_m$;

(4.6) $\underline{e}_b = Z_s(d_w)[(1 - \alpha_{s-,b})e_b + d_r \Lambda_s(e_k, e_n)e_k]$;

(4.7) $\underline{e}_n = d_w e_n$; (4.8) $\underline{e}_p = d_q$.

On note que, pour tout $s \epsilon]s°>$, $f_s(e,d,u)$ ne dépend pas de u, ce qui permet d'écrire $f_s(e,d)$ au lieu de $f_s(e,d,u)$.

(D) Les **correspondances d'admissibilité** g_s ($s \epsilon S$) sont specifiées, en définissant, pour chaque $s \epsilon S$, g_s comme le sous-ensemble, de l'ensemble $E_s \times D_s \times U_s$, formé des triplets (e,d,u) - avec $e \epsilon E_s$ de la forme (4.3a), $d \epsilon D_s$ de la forme

(4.3b), $u \in U_s$ de la forme (4.3c) - vérifiant le système de contraintes scalaires (4.9) à (4.14) :

(4.9) $d_k + d_c e_n \leq d_v d_a$;

(4.10) $d_a = \Lambda_s(e_k, e_n) e_k e_n$; (4.11) $d_m = O_s(e_p, d_q) d_a$;

(4.12) $d_v = (1 - d_q)(1 - d_r)\Omega_s(e_m)$; (4.13) $d_w = \Psi_s(e_b, d_c)$;

(4.14) pour chaque $h \in H$, $u_h \leq d_h \leq 1$.

(E) Dans les relations (4.4) à (4.6) et (4.10) à (4.13), les termes $\alpha_{s,k}$, $\alpha_{s,m}$, $\alpha_{s,b}$ $(s \in S \setminus S_T)$ [4t], Λ_s, O_s, Ω_s, Z_s, Ψ_s $(s \in S)$, sont des données, les **données de base sous forme réduite** : $\alpha_{s,k}$, $\alpha_{s,m}$, $\alpha_{s,b}$ $(s \in S \setminus S_T)$ sont des coefficients ≥ 0, tandis que Λ_s, O_s, Ω_s, Z_s, Ψ_s $(s \in S)$ sont des fonctions numériques ≥ 0, respectivement sur les domaines standards $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, les **fonctions de base**. Les conditions sur ces données seront précisées aux § 4.5 à 4.7. On suppose seulement ici qu'elles vérifient :

(4.16) pour tous $s \in S \setminus S_T$ et $i \in \{k,b,m\}$, $\alpha_{s,i} \in [0,1]$;

(4.17) pour tout $s \in S$, les fonctions Λ_s, O_s, Ω_s, Z_s, Ψ_s, sont continûment différentiables, respectivement sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$;

(4.18) pour tout $s \in S$, il existe $\underline{\underline{d}}_{s,a} > 0$ et $\nu_{s,a} > 0$ tels que,
(a) pour tous $e_k \in \mathbf{R}_+$ et $e_n \in \mathbf{R}_+$,
(a1) $\Lambda_s(e_k, e_n) e_k e_n \leq \underline{\underline{d}}_{s,a}$ et (a2) $\Lambda_s(e_k, e_n) = 0$, si $e_k < \nu_{s,a} e_n$;

(4.19) pour tout $s \in S$, il existe $\underline{\underline{d}}_{s,w} > 0$ tel que,
(a) pour tout $d_w \in \mathbf{R}_+$, $Z_s(d_w) = 1/d_w$, si $d_w \geq \underline{\underline{d}}_{s,w}$.

(F) Les interprétations qui font l'objet du § 4.3 vont fournir des motivations directes aux relations de définition 4.4 à 4.14, cela à l'exception des relations (4.6) et (4.10) dont la forme tient, conjointement, à l'exigence de régularité (4.17) au voisinage de l'origine (alinéa 4.5.A) et à l'exigence que ces relations entraînent les équations d'évolution (4.20) ci-après, conformément à l'argument suivant. En multipliant par $\underline{e}_n$ les deux membres de l'équation d'évolution (4.6), puis en tenant compte des conditions (4.19), ainsi que des égalités (4.7) et (4.10), on obtient, les équations d'évolution,

(4.20) pour tout $s \in S$, (a) $\underline{e_b e_n} = (1 - \alpha_{s-,b}) e_b e_n + d_r d_a$, si (b) $d_w \geq \underline{\underline{d}}_{s,w}$,

sur lesquelles va reposer l'interprétation des variables d'état de type b (alinéas 4.3.C,F) [4u]. Ainsi, eu égard à la condition de régularité (4.17), la fonction Z_s et la forme produit du second membre de (4.10) ont pour rôles de régulariser la relation (4.20) lorsque d_w ou e_n sont voisins de zéro. Les motifs de la condition (4.17) sont envisagés par ailleurs à l'alinéa 4.3.G.

(G) Dans toute la suite du chapitre, on suppose donné le multiplet $\Delta°$ constitué de S, de θ, des nomenclatures, I, J, H, et des données précédentes, multiplet qui est appelé **jeu de données de base** sous **forme réduite**, tandis que les contraintes (4.4) à (4.14) sont dites **contraintes de base**. On désigne par Δ le jeu de données de base (alinéa 3.2.E) qui lui est associé - par les relations (4.4) à (4.14) - et, pour chaque entier $\tau \geq 0$, par $\Sigma_b(\tau)$ la structure (à commandes doubles) de base, pour la profondeur τ, correspondante (alinéa 3.3.E).

§ 4.3 - DONNEES ET CONTRAINTES DE BASE : (II) INTERPRETATIONS

(A) Les **interprétations** des diverses variables scalaires e_i ($i \in I$), d_j ($j \in J$), u_h ($h \in H$), ainsi celles que des contraintes de base, vont découler de celles des postes correspondants des nomenclatures I, J, H. Les interprétations des deux premières nomenclatures sont fournies (suggérées) par les tableaux suivants, qui sont à examiner en fonction, d'une part de la démarcation (alinéas 4.1.B-E et 4.1.H,I), d'autre part des interprétations correspondantes des variables et contraintes (alinéas 4.3.C,F).

nomenclature I = {k,b,m,n,p} des **types de variables d'état** :

k	stock de capital, matériel ou financier, QB,
m	niveau des polluants accumulés, entraînant dommages, QP,
b	niveau unitaire des connaissances accumulées, de développement, QB/NP,
n	niveau de la population, NP,
p	mémoire du coefficient précédent de type q, CF.

nomenclature J = {a,k,c,m,q,r,v,w} des **types de variables de dynamique** :

a	production matérielle, brute, QB/PE,
k	investissement total, QB/PE,
c	consommation unitaire de la population, QB/NP/PE,
m	niveau des émissions de polluants, QP/PE,
q	taux de ponction sur la production pour réduction des émissions, CF,
r	taux de ponction sur la production pour augmentation du savoir, CF,
v	facteur total de réduction de la production (ponctions et pollution), CF,
w	facteur de croissance de la population, CF/PE.

En ce qui concerne la nomenclature H des **types de variables de contrôle**, qui est contenue dans la nomenclature J des variables de dynamique, les interprétations de ses postes sont les mêmes que dans cette dernière, i.e. correspondent aux ponctions sur la production (alinéas 4.1.H,I), cette inclusion annonçant un lien entre les variables scalaires correspondantes (alinéa 4.3.C).

(B) A chaque poste de ces nomenclatures est associée une **grandeur** en termes de laquelle est mesurée la variable scalaire indexée par ce poste (alinéa 4.2.B). Parmi ces grandeurs, on distingue, d'une part les coefficients, facteurs ou taux sans dimension (indicatif CF), d'autre part les coefficients ou facteurs de flux, relatifs à une période élémentaire (CF/PE), enfin les autres grandeurs, de base ou dérivées, de stock ou de flux. Trois **grandeurs de base** interviennent : la grandeur "quantité du bien produit" (QB), la grandeur "quantité de polluants" (QP), la grandeur "niveau (taille) de la population" (NP). Ces grandeurs sont indiquées dans les tableaux précédents, pour chaque poste après l'intitulé, les grandeurs de flux étant repérées par l'indication "/PE" après la dimension de la grandeur [4v]. Par ailleurs, les **unités** - par rapport auxquelles sont mesurées ces grandeurs - ne jouent aucun rôle au présent stade des définitions formelles et ne seront spécifiées que pour la numérisation (alinéa 5.4.B). On note que le niveau des connaissances e_b est mesuré en termes de la grandeur QB/NP, i.e. est mesuré par le montant par tête des ponctions accumulées (alinéa 4.3.C).

(C) Les interprétations ci-dessus des postes des nomenclatures (alinéa 4.3.A) induisent celles des variables scalaires correspondantes en situation temporelle, d'une part en fonction de la démarcation (alinéas 4.1.H,I) et éventuellement à la lumière des contraintes de base concernées, d'autre part en supposant que :

(4.21) les variables d'état de types k, b, m, n sont entendues en début de période.

Par exemple, si (**e**, **d**, **û**) est un cheminement (alinéa 3.5.B) : $\mathbf{e}_k(t)$ et $\mathbf{d}_k(t)$ représentent respectivement le capital en début de la période t et l'investissement pendant cette période ; $\mathbf{d}_q(t)$ est la valeur du coefficient de ponction sur la production pour réduction des émissions à la période t, tandis que $\mathbf{e}_p(t)$ est la valeur mémorisée de ce coefficient à la période précédente [égalité (4.8)] ; $\mathbf{d}_w(t) - 1$ est le taux de croissance de la population (alinéa 4.13.B) (^{4w}). Par ailleurs, l'équation (4.20) exprime comment, conformément à la dimension QB/NP des variables e_b, l'évolution du total des connaissances $e_b e_n$ résulte de l'accumulation des ponctions correspondantes $d_r d_a$ sur la production (^{4y}).

Les interprétations des variables scalaires de contrôle, variables indicées par la nomenclature H, sont annoncées par l'inclusion de la nomenclature H dans la nomenclature J, en ce sens que, pour $h \in H$, i.e. $h = q$ ou $h = r$, u_h représente une valeur particulière du coefficient de ponction d_h (point 4.1.I2), en l'occurrence, d'après les contraintes (4.14), une borne inférieure qui est prescrite par les instances régulatrices (alinéas 3.1.D,E et 4.1.C,H,I).

(D) Les interprétations des contraintes de base (4.4) à (4.14) sont aussi pratiquement induites (^{4z}) par celles des variables correspondantes, compte tenu du rôle des données fonctionnelles dans la définition de la viabilité par rapport à une structure de base (alinéas 3.3.E, 3.4.C, 3.5.B) (^{4A}).

Par exemple : compte tenu des définitions (2.8) et (3.6), la forme des équations d'évolution des variables d'état de types k, m, b, n découle des égalités (4.4) à (4.7) (^{4B}), les données $\alpha_{s,k}$ et $\alpha_{s,b}$ (resp. $\alpha_{s,m}$) apparaissant alors comme des coefficients de dépréciation (resp. d'absorption spontanée) (^{4C}) ; la contrainte (4.9) est la loi de conservation qui exprime que la somme des montants de l'investissement d_k et de la consommation $d_c e_n$ ne peut excéder le montant $d_v d_a$ de ce qui reste de la production d_a après les diverses ponctions récapitulées par la contrainte (4.12).

(E) On souligne le caractère très agrégé de la représentation du système productif (alinéa 4.1.H) qui ressort des interprétations précédentes (alinéas 4.3.A,C,D) : un seul bien agrégeant biens de consommation et biens d'équipement (postes a, k, c de la nomenclature I), via l'équation de conservation (4.9), et un seul type de capital (poste k de la nomenclature J) (^{4B}).

(F) Les interprétations des fonctions de base Λ_s, O_s, Ω_s, Ψ_s ($s \in S$) sont concomitantes de celles des contraintes (4.10) à (4.13) où elles interviennent : Λ_s définit la fonction de production, via le coefficient de productivité totale $\Lambda_s(e_k,e_n)$, les conditions (4.18) étant une première expression formelle de la caractéristique 4.1.I2 ; O_s définit, conformément à la caractéristique 4.1.I3, la fonction d'émission de polluants, en termes des taux de ponctions e_p et d_q, à la période précédente et à la période courante, via le rapport $O_s(e_p,d_q)$ de la quantité de polluants émis à la production ; Ω_s définit, conformément aux caractéristiques 4.1.I3 et 4.1.I4, la fonction de dommages dus à l'accumulation des polluants, via le facteur $\Omega_s(e_m)$ de réduction de la production ; la fonction démographique Ψ_s indique comment, conformément à la caractéristique 4.1.I1, le taux de croissance $d_w - 1$ de la population dépend du niveau de développement e_b et de la consommation unitaire d_c. Enfin, l'interprétation des fonctions Z_s

($s\epsilon S$) est liée à l'équation d'évolution (4.20) et, au-delà de leur rôle de régularisation (alinéa 4.2.F), à l'interprétation des variables e_b (alinéa 4.3.C), en ce sens que ces fonctions permettent de préciser comment évolue le niveau de développement en cas de décroissance catastrophique du niveau de la population (alinéas 4.3.H, 4.7.B et 4.8.F).

(G) La condition de régularité (4.17) sur les fonctions de base est sans doute contingente, au moins sous sa forme stricte consistant à imposer à ces fonctions d'être continûment différentiables, y compris à la frontière de leurs ensembles (cônes) de définition. Elle résulte d'un compromis entre les considérants pratiques et les considérants théoriques : la continuité suffirait, du point de vue théorique, de l'interprétation, mais, du point de vue pratique, l'absence de différentiabilité augmente beaucoup les difficultés de résolution. Ainsi, on introduit ici cette condition, qui est inutilement stricte pour le propos générique du chapitre, afin de maintenir - sans doute au prix de quelques lourdeurs (alinéa 4.5.A,F) - une unité de l'exposé entre ce chapitres 4 et le chapitre 5 où la condition stricte est requise, en pratique, pour les formes explicites des fonctions qui interviennent dans la résolution (alinéa 4.4.A).

(H) Encore à propos de la condition (4.17) sur les fonctions de base, on souligne l'importance de la prise en compte des frontières des ensembles de définition de ces fonctions, ensembles qui, en tant que domaines standards (alinéa 4.2.A), sont des sous-cônes fermés de l'espace ambiant (ici **R** ou **R**×**R**). D'où l'importance concomitante de la régularité jusqu'au bord qui fait partie de la condition (4.17). Cette importance des points frontière est elle même liée au caractère prospectif des études visées, en particulier études de stabilisation ou de catastrophes (alinéas 4.1.D-F, caractéristique 4.1.I0). Par exemple, en ce qui concerne les fonctions de productivité Λ_s ($s\epsilon S$), il importe, pour l'étude des catastrophes, que les points frontière (e_k,e_n), i.e. les points pour lesquels $e_k = 0$ ou $e_n = 0$, puissent être atteints.

(I) Les considérations générales ci-dessus concernant les fonctions de base seront précisées, en même temps que leurs spécifications, aux § 4.5 à 4.8, 5.4, 5.5. On note seulement ici que leurs dépendance vis-à-vis de l'aléa s, donc aussi de la période, permet de prendre en compte des évolutions exogènes. Par exemple : un progrès technique exogène, en ce qui concerne les fonctions Λ_s, O_s, Ω_s ; un taux de croissance exogène en ce qui concerne la fonction Ψ_s.

§ 4.4 - <u>REGIME DE REFERENCE ET FONCTIONS TYPE</u>

(A) La présentation générale des données de base faite aux § 4.2 et 4.3 est complétée, aux § 4.5 à 4.8 ci-après, en donnant, pour les fonctions de base Λ_s, O_s, Ω_s, Z_s, Ψ_s ($s\epsilon S$) (alinéa 4.2.E), des formes explicites, ne dépendant que de quelques paramètres scalaires qui seront spécifiés numériquement au chapitre 5 (§ 5.4 et 5.5). Ces formes explicites sont requises pour l'exploitation numérique, qui fait l'objet du chapitre 5, mais ne sont pas indispensables au stade de la définition générique du modèle, qui est celui du présent chapitre 4 (alinéa 4.1.G), stade où elles sont avantageusement remplacées par l'expression de propriétés génériques, sur ces fonctions, moins prégnantes que des formes explicites, mais plus précises que les conditions préliminaires (4.18) et (4.19). On donne cependant ces formes explicites ici, plutôt qu'au chapitre 5, pour fixer les idées - à défaut de présenter un jeu complet de propriétés génériques, comme celles (4.59) à (4.64) relatives aux fonctions démographiques (§ 4.7) - et en insistant sur le caractère contingent des fonctions présentées.

Un lecteur principalement intéressé par la structure générale du modèle et ses perspectives d'exploitation, qui font l'objet des § 4.9 à 4.13, peut, au moins en première lecture, sauter à ces §, après un coup d'oeil à l'alinéa 4.4.B suivant qui concerne le régime de référence.

(B) Le **calage** du modèle et plus particulièrement celui des données fonctionnelles de base Λ_s, O_s, Ω_s, Z_s, Ψ_s ($s \in S$), va être fait en fonction d'un couple (e^*,d^*), appelé **régime de référence**, qui est donné tel que $e^* \in E_{s^\circ}$ est l'**état initial** à partir duquel va être faite l'exploitation (alinéas 2.3.B et 2.4.B, § 3.12, 3.14, 3.16), tandis que $d^* \in D_{s^\circ}$ est une dynamique, la **dynamique de référence**. Cette dernière doit être compatible avec l'état initial e^*, en ce sens que le couple (e^*,d^*) doit satisfaire les contraintes d'admissibilité (4.9) à (4.13) avec s° mis pour s. Ainsi, le calage sur le régime de référence consiste en ce que les fonctions Λ_{s°, O_{s°, Ω_{s°, Z_{s°, Ψ_{s° doivent vérifier les **conditions de calage** (4.23) à (4.28) ci-après qui correspondent à ces contraintes et, pour ce qui est de (4.28), à la condition (4.19) :

(4.23) $d_k^* + d_c^* e_n^* \le d_v^* d_a^*$; (4.24) $d_a^* = \Lambda_{s^\circ}(e_k^*,e_n^*)e_k^*e_n^*$;

(4.25) $d_m^* = O_{s^\circ}(e_p^*,d_q^*)d_a^*$; (4.26) $d_v^* = (1 - d_q^*)(1 - d_r^*)\Omega_{s^\circ}(e_m^*)$;

(4.27) $d_w^* = \Psi_{s^\circ}(e_b^*,d_c^*)$; (4.28) $Z_{s^\circ}(d_w^*) = 1/d_w^*$.

Par ailleurs, comme préalable aux conditions précédentes, le régime de référence (e^*,d^*) est supposé vérifier les **conditions de consistance** (4.29) :

(4.29) (a) pour tout $i \in I\setminus\{b,p\}$, $e_i^* > 0$, (b) pour tout $j \in J\setminus\{q,r\}$, $d_j^* > 0$,

(c) $e_b^* = 0$, (d) $e_p^* = 0$, (e) $d_q^* = 0$, $d_r^* = 0$, $d_v^* \le 1$, (f) $d_w^* > 1$.

Les conditions (4.29c,d) stipulent que l'accumulation des connaissances et les ponctions sur la production sont supposées ne commencer (éventuellement) qu'à la période initiale [4E], les conditions (4.29e) que ces ponctions sont nulles dans le régime de référence et que le facteur de dommages d_v^* peut y être significatif, i.e. éventuellement plus petit que 1. On note que le schéma de contrôle n'intervient pas dans ces diverses conditions. On note aussi que la dynamique de référence d^* est une donnée qui n'est pas à confondre avec la variable de dynamique d_{s° à la date initiale t = 0, laquelle est déterminée lors de l'exploitation et dont la valeur (la modalité) est en général différente de d^*, sauf si la contrainte initiale $d_{s^\circ} = d^*$ est ajoutée aux contraintes spécifiées par le protocole de resserrement d'exploitation (§ 4.12).

(C) Les expressions des fonctions de base (§ 4.5 à 4.7) vont faire intervenir deux **fonctions type**, ψ et ϕ, respectivement fonctions numériques, $x \longrightarrow \psi(x)$ et $(\varepsilon,x) \longrightarrow \phi(\varepsilon,x)$, sur $\mathbf{R}_+$ et sur $]0,+\infty)\times\mathbf{R}$, dites **fonction de ponction** et **fonction de rupture**. Ces fonctions sont supposées être continûment différentiables (resp. sur $\mathbf{R}_+$ et sur $]0,+\infty)\times\mathbf{R}$) et vérifier les conditions C1 à C4 ci-après : (C1) la fonction ψ, $x \longrightarrow \psi(x)$, décroit strictement de 1 à 0 quand x croit de 0 à 1, puis est constante, i.e. nulle, pour $x \ge 1$; (C2) la fonction ϕ est homogène de degré zéro sur le cône $]0,+\infty)\times\mathbf{R}$; (C3) pour chaque $\varepsilon > 0$, la fonction partielle $x \longrightarrow \phi(\varepsilon,x)$ décroit de 1 à zéro lorsque x croit de $-\infty$ à $+\infty$; (C4) lorsque ε tend vers zéro, les fonctions partielles $x \longrightarrow \phi(\varepsilon,x)$ approximent simplement, sauf en x = 0, la fonction indicatrice de l'intervalle $(-\infty,0]$.

(D) Même si, qualitativement, seules les conditions C1 à C4 ci-dessus sont requises, il est indispensable de spécifier complètement ces fonctions type pour appréhender certaines propriétés du modèle et pour son exploitation numérique.

Dans ce sens, la fonction de ponction ψ sera toujours, dans la suite, celle définie par la relation :

(4.30) pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\text{(a)} \quad \psi(x) = (1 - x)^2, \text{ si } 0 \le x \le 1, \quad \text{(b)} \quad \psi(x) = 0, \text{ si } x \ge 1.$$

Par contre, deux variantes de la fonction de rupture ϕ seront utilisées, respectivement dans ce chapitre et dans le chapitre 5 (alinéa 5.1.C). Dans le présent chapitre 4, cette fonction est définie, en termes de la précédente, par la relation,

(4.31) pour tous $\varepsilon \in]0,+\infty)$ et $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{(a)} \quad \phi(\varepsilon,x) = (1/2)\psi(x/\varepsilon), \quad \text{si } x \ge 0,$$

$$\text{(b)} \quad \phi(\varepsilon,x) = 1 - (1/2)\psi(-x/\varepsilon), \quad \text{si } x \le 0.$$

Ainsi spécifiée, cette fonction vérifie la condition D1 ci-après qui précise la condition C3 : (D1) pour chaque $\varepsilon > 0$, la fonctions partielle $x \longrightarrow \phi(\varepsilon,x)$ est constante et égale à 1 (resp. 0) sur l'intervalle $(-\infty,-\varepsilon]$ (resp. $[\varepsilon,+\infty)$) et décroit strictement de 1 à zéro lorsque x croit de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$.

(E) Une autre fonction type, κ, associée à la fonction ϕ, intervient dans l'expression de certaines fonctions objectif (alinéas 4.10.C, 4.13.D, 5.4.G) : la fonction numérique ≥ 0, sur $\mathbf{R}_+ \times]0,+\infty) \times \mathbf{R}$, κ définie par la relation,

(4.32) pour tous $\gamma \in \mathbf{R}_+$, $\varepsilon \in]0,+\infty)$, $x \in \mathbf{R}$, (a) $\kappa(\gamma,\varepsilon,x) = \mathrm{EXP}[\gamma x \phi(\varepsilon,x)]$.

Il s'agit d'une fonction - continûment différentiable - de **pénalisation** des valeurs < 0 de x, en ce sens que, pour chaque $\gamma > 0$: (E1) pour chaque $\varepsilon > 0$, $\kappa(\gamma,\varepsilon,x) = \mathrm{EXP}(\gamma x) < 1$, si $x \le -\varepsilon$, et $\kappa(\gamma,\varepsilon,x) = 1$, si $x \ge \varepsilon$; (E2) lorsque ε tend vers zéro, les fonctions partielles $x \longrightarrow \kappa(\gamma,\varepsilon,x)$ approximent simplement, sauf en $x = 0$, la fonction $x \longrightarrow \mathrm{Min}(\mathrm{EXP}(\gamma x),1)$.

§ 4.5 - FONCTIONS DE PRODUCTION

(A) Les fonctions de base Λ_s ($s \in S$), qui figurent dans les contraintes d'admissibilité (4.6) et (4.10), ne constituent pas directement des fonctions de production, mais plutôt des **fonctions de productivité** (alinéa 4.3.F) en termes desquelles s'expriment les **fonctions de production** $\underline{\Lambda}_s$ ($s \in S$) par les relations :

(4.34) pour tous $s \in S$, $e_k \in \mathbf{R}_+$, $e_n \in \mathbf{R}_+$, (a) $\underline{\Lambda}_s(e_k,e_n) = \Lambda_s(e_k,e_n)e_k e_n$.

On note que ce sont les fonctions de productivité Λ_s ($s \in S$) qu'il s'agit de définir et pas seulement les fonctions de production $\underline{\Lambda}_s$ ($s \in S$), cela à cause de la régularité pour $e_k = 0$ ou $e_n = 0$, qui fait partie de la condition (4.17) (alinéa 4.3.G), et du facteur $e_k e_n$ au second membre de la relation (4.34). Ainsi, il s'agit de définir des fonctions de productivité Λ_s ($s \in S$) vérifiant les conditions de régularité (4.17) et les conditions de troncature (4.18). Pour cela, on va procéder, pour chaque $s \in S$, en deux étapes : la première étape consiste en la définition d'une fonction tronquée $\Lambda_s^{\#}$ qui va constituer le squelette de la fonction Λ_s cherchée, fonction tronquée en ce sens que, vérifiant seulement la condition (4.18a), elle est obtenue (alinéa 4.5.D) par troncature à partir d'une fonction (de productivité) régulière Λ_s°, en l'occurrence celle qui correspond à la fonction de Cobb-Douglas usuelle (alinéas 4.5.B,C) ; après quoi, dans une seconde étape, la fonction Λ_s cherchée peut être obtenue par régularisation de la fonction tronquée $\Lambda_s^\#$ (alinéa 4.5.E).

En fait, ces fonctions de productivité Λ_s ($s \epsilon S$) régulières, ne seront pas utilisées au chapitre 5, sauf en ce qui concerne le point de départ de leur construction que constitue la fonction de Cobb-Douglas. Elle sont cependant détaillées ci-après, eu égard au propos méthodologique du texte (§ 1.3) et à cause de leur lien avec la justification de la variante pratique qui sera utilisée (alinéa 4.5.F).

(B) Les **fonctons de productivité de Cobb-Douglas** $\underline{\Lambda}_s^\circ$ ($s \epsilon S$), sur lesquelles repose la première étape (alinéa 4.5.A), sont de la forme,

(4.35) pour tous $s \epsilon S$, $e_k \; \epsilon \; \mathbf{R}_+$, $e_n \; \epsilon \; \mathbf{R}_+$,

$$\text{(a)} \quad \Lambda_s^\circ(e_k,e_n) = \frac{d_a^*}{e_k^* e_n^*}\nu_a(1+\hat{\nu}_{s,a})^{a(s)}\left(\frac{e_k}{e_k^*}+\check{\nu}_k\right)^{\beta-1}\left(\frac{e_n}{e_n^*}+\check{\nu}_n\right)^{-\beta} \quad \text{avec,}$$

? ?

$$\text{(b)} \quad \nu_a = (1+\check{\nu}_k)^{1-\beta}(1+\check{\nu}_n)^{\beta} \quad \text{et} \quad \text{(c)} \quad a(s) = \underline{t}_s,$$

où les coefficients $\hat{\nu}_{s,a}$ ($s \epsilon S$), $\check{\nu}_k$, $\check{\nu}_n$ et β sont donnés, les premiers étant seulement supposés ≥ 0, tandis que $\check{\nu}_k$, $\check{\nu}_n$ et β sont supposés tels que,

(4.36) (a) $\check{\nu}_k > 0$, (b) $\check{\nu}_n > 0$, (c) $0 < \beta < 1$.

Les fonctions Λ_s° ainsi définies sont continûment différentiable sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, en particulier pour $e_k = 0$ ou $e_n = 0$, grâce à la présence, au seconds membre de la relation (4.35a), des coefficients $\check{\nu}_k$ et $\check{\nu}_n$ vérifiant les conditions (4.36a,b).

On note que la condition de calage (4.24) est satisfaite, avec Λ_s° mis pour Λ_s, à cause du facteur $d_a^*/(e_k^* e_n^*)$ au second membre de la relation (4.35a) et en vertu de la définition (4.35b) du coefficient ν_a. Plus généralement, pour chaque $s \epsilon S$, chaque valeur $\Lambda_s(e_k,e_n)$ de la fonction représente, comme requis par la contrainte (4.10), une quantité du bien produit par période, par unité de capital et par tête. Par ailleurs, pour chaque $s \epsilon S$, $\hat{\nu}_{s,a}$ représente un taux de croissance moyen de la productivité dans l'éventualité s (4F).

(C) La présence, au second membre de la relation (4.35a), des coefficients $\check{\nu}_k$ et $\check{\nu}_n$ vérifiant les conditions (4.36a,b) fait que que les fonctions de production $\underline{\Lambda}_s^\circ$ ($s \epsilon S$) définies par les relations (4.35), avec Λ_s° mis pour Λ_s, ne sont pas exactement de la forme de Cobb-Douglas usuelle (4G) (alinéa 4.1.H) qui correspond aux fonctions $\underline{\underline{\Lambda}}_s^\circ$ ($s \epsilon S$) définies par les relations :

(4.37) pour tous $s \epsilon S$, $e_k \; \epsilon \; \mathbf{R}_+$, $e_n \; \epsilon \; \mathbf{R}_+$,

$$\text{(a)} \quad \underline{\underline{\Lambda}}_s^\circ(e_k,e_n) = \frac{d_a^*}{e_k^* e_n^*}\nu_a(1+\hat{\nu}_{s,a})^{a(s)}\left(\frac{e_k}{e_k^*}\right)^{\beta}\left(\frac{e_n}{e_n^*}\right)^{1-\beta}.$$

Cependant l'écart est sans importance pratique si les coefficients $\check{\nu}_k$ et $\check{\nu}_n$ sont assez petits, ce qui sera le cas (alinéa 5.4.E).

(D) La première étape (alinéa 4.5.A) consiste alors à définir les fonctions $\Lambda_s^\#$ ($s \epsilon S$) par troncature des fonctions Λ_s°, conformément aux relations, (4.38) pour tous $s \in S$, $e_k \in \mathbf{R}_+$, $e_n \in \mathbf{R}_+$,

$$\text{(a)} \quad \Lambda_s^{\#}(e_k, e_n) = \mathrm{Min}\left(\Lambda_s^{o}(e_k, e_n), \frac{\underline{\underline{\nu}}_{s,a} d_a^*}{(e_k + \check{\nu}_k e_k^*)(e_n + \check{\nu}_n e_n^*)}\right), \quad \text{si } e_k \geq \underline{\nu}_{s,a} e_n,$$

$$\text{(b)} \quad \Lambda_s^{\#}(e_k, e_n) = 0, \quad \text{si } e_k < \underline{\nu}_{s,a} e_n,$$

où les coefficients $\underline{\underline{\nu}}_{s,a}$ et $\underline{\nu}_{s,a}$ ($s \in S$) sont donnés tels que,

(4.39) pour tous $s \in S$, $\underline{\underline{\nu}}_{s,a} > 0$ et $\underline{\nu}_{s,a} > 0$.

Cela étant, il est clair que, pour chaque $s \in S$, la fonction $\Lambda_s^{\#}$ ainsi définie vérifie la condition (4.18a), avec $\underline{\underline{d}}_{s,a} = \underline{\underline{\nu}}_{s,a} d_a^*$ et $\nu_{s,a} = \underline{\nu}_{s,a}$, mais n'est pas continue aux points $(e_k, e_n) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ tels que $e_k = \underline{\nu}_{s,a} e_n$.

(E) Afin de procéder à la seconde étape (alinéa 4.5.A), i.e. à la régularisation, pour chaque $s \in S$, de la fonction $\Lambda_s^{\#}$ en une fonction Λ_s vérifiant les conditions (4.17) et (4.18), on remarque que les fonction $\Lambda_s^{\#}$ ($s \in S$) peuvent aussi être définies par les relations,

(4.40) pour tous $s \in S$, $e_k \in \mathbf{R}_+$, $e_n \in \mathbf{R}_+$,

$$\text{(a)} \quad \Lambda_s^{\#}(e_k, e_n) = U_-(\underline{\nu}_{s,a} e_n - e_k)\,\mathrm{Min}\left(\Lambda_s^{o}(e_k, e_n), \frac{\underline{\underline{\nu}}_{s,a} d_a^*}{(e_k + \check{\nu}_k e_k^*)(e_n + \check{\nu}_n e_n^*)}\right),$$

où U_- désigne la fonction indicatrice, dans $\mathbf{R}$, de la demie droite $(-\infty, 0]$, i.e. la fonction numérique sur $\mathbf{R}$ définie par,

(4.41) $U_-(x) = 1$, si $x \leq 0$, et $U_-(x) = 0$, si $x \geq 0$.

Il suffit donc d'approximer les fonctions $x \longrightarrow U_-(x)$ et $(x, \lambda) \longrightarrow \mathrm{Min}(x, \lambda)$ ($x \in \mathbf{R}_+$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$) par des fonctions continûment différentiables, ce qui peut être fait comme suit au moyen de la fonction type ϕ, en s'appuyant sur les propriétés 4.4.D1 et 4.3.C4 de cette fonction : lorsque ε tend vers zéro par valeurs > 0, la fonction $x \longrightarrow \phi(\varepsilon, x)$ approxime (simplement sauf en $x = 0$) la fonction $x \longrightarrow U_-(x)$, tandis que la fonction $(x, \lambda) \longrightarrow \mathbf{m}(\varepsilon, x, \lambda)$ définie par,

(4.42) pour tous $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}_+$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $\mathbf{m}(\varepsilon, x, \lambda) = \lambda + (x - \lambda)\phi(\varepsilon, x - \lambda)$,

approxime (simplement, pour $x \in \mathbf{R}_+$ et $\lambda \in \mathbf{R}_+$) la fonction $(x, \lambda) \longrightarrow \mathrm{Min}(x, \lambda)$. Ainsi, on peut définir les fonctions de productivié Λ_s ($s \in S$) cherchées par les relations (4.43) avec $\varepsilon > 0$ assez petit,

(4.43) pour tous $s \in S$, $e_k \in \mathbf{R}_+$, $e_n \in \mathbf{R}_+$,

$$\text{(a)} \quad \Lambda_s(e_k, e_n) = \phi(\varepsilon, \underline{\nu}_{s,a} e_n - e_k)\,\mathbf{m}\left(\varepsilon, \Lambda_s^{o}(e_k, e_n), \frac{\underline{\underline{\nu}}_{s,a} d_a^*}{(e_k + \check{\nu}_k e_k^*)(e_n + \check{\nu}_n e_n^*)}\right).$$

(F) En fait, les fonctions Λ_s ($s \in S$) ainsi construites ne seront pas utilisées dans les applications présentées au chapitre 5. En effet, on utilisera (alinéa 5.3.C) la variante pratique consistant à remplacer, pour chaque $s \in S$, la contrainte (4.10), avec Λ_s de la forme (4.43a), par le système (constitué par la conjonction) des contraintes (4.44a,b,c) :

(4.44) (a) $d_a = \Lambda_s^{o}(e_k, e_n) e_k e_n$, (b) $d_a \leq \underline{\underline{\nu}}_{s,a} d_a^*$, (c) $e_k \geq \underline{\nu}_{s,a} e_n$.

Cette variante permet d'éviter la régularisation, car les contraintes (4.44) sont elles mêmes régulières. On note à son propos que le système des contraintes (4.44) est plutôt à rapprocher de la contrainte (4.10), avec $\Lambda_s^{\#}$ mis pour Λ_s, i.e. de la contrainte, (4.45) $d_a = \Lambda_s^{\#}(e_k, e_n) e_k e_n$,

qui n'est pas régulière, le système (4.44) et cette contrainte étant équivalents si et seulement si on impose la contrainte auxiliaire,

(4.46) $d_a > 0$.

Or, lorsque les systèmes (4.44), pour les divers aléas $s \in S$, sont considérés "en situation", i.e. sont complétés par les autres contraintes, les conditions (4.46) vont être en général satisfaites, au moins dans les scénarios significatifs, ainsi que le suggèrent les contraintes (4.9), lesquelles font que $d_a = 0$ entraîne $d_c = 0$ ou $e_n = 0$, ce qui est exclu dans un scénario significatif. Cet argument heuristique serait à approfondir formellement pour justifier en termes globaux la substitution en cause.

(G) On souligne le caractère schématique de la représentation du système productif que fournissent les fonctions Λ_s ($s \in S$) envisagées ci-dessus (alinéas 4.5.B-F), caractère qui ne tient évidemment pas qu'à ces fonctions, mais au cadre lui-même du modèle : représentation du système productif via une fonction de production scalaire, à un seul bien et un seul type de capital, et de ses transformations via des ponctions sur la production. Cette représentation est retenue ici, eu égard au propos exclusivement illustratif du modèle (alinéa 4.1.F), à cause, à la fois, de sa simplicité et des comparaisons qu'elle permet avec les autres modèles macroéconomiques relatifs à l'effet de serre qui utilisent une telle fonction de production [(4H)]. Une représentation plus réaliste, surtout pour un modèle à long terme, passerait par une analyse d'activités complète, macroéconomique, avec plusieurs types d'équipements substituables et des transformations entre eux [(4I)].

§ 4.6 - FONCTIONS DE POLLUTION

(A) Les fonctions d'émission des polluants O_s ($s \in S$) et les fonctions de dommages par les polluants Ω_s ($s \in S$), qui sont explicitées dans ce §, prennent en compte l'effet de serre, de façon très schématique conformément aux caractéristiques 4.1.I3 et 4.1.I4 du modèle. Au demeurant, ce caractère schématique est homogène avec celui de la représentation du système productif (alinéa 4.5.G). Les formes présentées pour ces fonctions sont évidemment contingentes et devraient être dépassées par l'expression de propriétés génériques les concernant (alinéa 4.4.A). On ne le fait pas ici au-delà des conditions qui permettent de compléter, en termes des paramètres en cause, les interprétations générales données à l'alinéa 4.3.F.

(B) Les **fonctions d'émission (des polluants)** O_s ($s \in S$) proposées sont de la forme :

(4.48) pour tous $s \in S$, $e_p \in \mathbf{R}_+$, $d_q \in \mathbf{R}_+$,

$$\text{(a)} \quad O_s(e_p, d_q) = \frac{d_m^*}{d_a^*}\left[\nu_{s,p} + (1 - \nu_{s,p})\psi\left(\frac{e_p}{\underline{\underline{d}}_{s-,q}}\right)\right]\left[\nu_{s,q} + (1 - \nu_{s,q})\psi\left(\frac{d_q}{\underline{\underline{d}}_{s,q}}\right)\right],$$

où les coefficients $\nu_{s,p}$, $\nu_{s,q}$ et $\underline{\underline{d}}_{s,q}$ ($s \in S$) sont donnés [(4K)] tels que :

(4.49) pour tous $s \in S$, (a) $0 < \nu_{s,p} < 1$, (b) $0 < \nu_{s,q} < 1$,

(c) $\nu_{s,q} < \nu_{s,p}$, (d) $0 < \underline{\underline{d}}_{s,q} < 1$.

(C) En vertu de la propriété 4.4.C1 de la fonction type ψ, les fonctions O_s ($s \in S$) ainsi définies vérifient les propriétés (4.50) ci-après qui vont fournir les interprétations des coefficients (alinéa 4.6.D) :

(4.50) pour tout $s \in S$,

(a) $d_m^* = O_s(0,0) d_a^*$,

(b) pour tout $e_p \in \mathbf{R}_+$, (b1) $O_s(e_p,0) \geq (d_m^*/d_a^*) \nu_{s,p}$,

(b2) $O_s(e_p,0) = (d_m^*/d_a^*) \nu_{s,p}$, si $e_p \geq \underline{\underline{d}}_{s-,q}$,

(c) pour tout $d_q \in \mathbf{R}_+$, (c1) $O_s(0,d_q) \geq (d_m^*/d_a^*) \nu_{s,q}$,

(c2) $O_s(0,d_q) = (d_m^*/d_a^*) \nu_{s,q}$, si $d_q \geq \underline{\underline{d}}_{s,q}$,

(d) pour tous $e_p \in \mathbf{R}_+$ et $d_q \in \mathbf{R}_+$,

(d1) $O_s(e_p,d_q) \geq (d_m^*/d_a^*) \nu_{s,p} \nu_{s,q}$,

(d2) $O_s(e_p,d_q) = (d_m^*/d_a^*) \nu_{s,p} \nu_{s,q}$, si $e_p \geq \underline{\underline{d}}_{s-,q}$ et $d_q \geq \underline{\underline{d}}_{s,q}$.

(D) La relation (4.50a) coïncide, pour $s = s°$, avec la relation de calage (4.25), en vertu de la condition (4.29e). Plus généralement, pour chaque $s \in S$, chaque valeur $O_s(e_p,d_q)$ de la fonction représente, comme requis par la contrainte (4.11), un taux d'émission, i.e. une quantité de polluant émise par unité de quantité du bien produit, cela à cause du facteur d_m^*/d_a^* au second membre de la relation (4.48a).

Les relations (4.50b-d) fournissent l'interprétation du coefficient $\underline{\underline{d}}_{s,q}$ comme un taux de ponction limite au-delà duquel une augmentation du taux de ponction laisse constant le taux d'émission. En particulier, la relation (4.50d) fait apparaître le minimum $(d_m^*/d_a^*) \nu_{s,p} \nu_{s,q}$ pour ce dernier. La relation (4.50b) fournit l'interprétation du coefficient $\nu_{s,p}$ comme repérant la quantité de polluants émise pendant la période courante lorsque le taux de ponction d_q est nul à cette période, alors que le taux e_p à la période précédente était le taux limite $\underline{\underline{d}}_{s-,q}$. De façon analogue, la relation (4.50c) fournit l'interprétation du coefficient $\nu_{s,q}$, comme repérant la quantité de polluants émise pendant la période courante lorsque le taux de ponction d_q à cette période est le taux limite $\underline{\underline{d}}_{s,q}$, alors que le taux e_p à la période précédente était nul. En fonction de ces interprétations des coefficients $\nu_{s,p}$ et $\nu_{s,q}$, la condition (4.49c) exprime une dégradation de l'effet, à la période courante, d'une ponction à la période précédente, dégradation cohérente avec l'hypothèse, qui est contingente, seulement illustrative, selon laquelle la mémoire des taux antérieurs est limitée à la période précédente.

(E) Les **fonctions de dommages (par les polluants)** Ω_s ($s \in S$) proposées sont de la forme (4.51)-(4.52) :

(4.51) pour tous $s \in S$ et $e_m \in \mathbf{R}_+$, (a) $\Omega_s(e_m) = \nu_m \phi(\check{\nu}_{s,m}, \frac{e_m}{e_m^*} - \hat{\nu}_{s,m})$,

où $\check{\nu}_{s,m}$ et $\hat{\nu}_{s,m}$ ($s \in S$), ainsi que ν_m, sont des coefficients donnés tels que,

(4.52) (a) pour tous $s \in S$,

(a) $\check{\nu}_{s,m} > 0$, (b) $\hat{\nu}_{s,m} > 0$,

(c) $\phi(\check{\nu}_{s°,m}, 1 - \hat{\nu}_{s°,m}) > 0$, (d) $\nu_m = d_v^*/\phi(\check{\nu}_{s°,m}, 1 - \hat{\nu}_{s°,m})$.

(F) La condition de calage (4.26) est satisfaite en vertu des conditions (4.29e) et de l'expression (4.52d) de ν_m. Plus généralement, pour chaque $s \in S$, chaque valeur $\Omega_s(e_m)$ de la fonction est, comme requis par la contrainte (4.12), un coefficient, un facteur, sans dimension, comme d_v^*. En vertu des propriétés 4.4.C3,C4 de la fonction ϕ, le coefficient $\check{\nu}_{s,m}$ repère la vitesse de décroissance du facteur de dommages $\Omega_s(e_m)$ (i.e. la vitesse de croissance des dommages) lorsque e_m s'approche du seuil $\hat{\nu}_{s,m} e_k^*$, lui même repéré par rapport au niveau de référence e_k^* par le coefficient $\hat{\nu}_{s,m}$, la décroissance étant d'autant plus brutale que le coefficient $\check{\nu}_{s,m}$ est plus petit et d'autant plus lointaine que le coefficient $\hat{\nu}_{s,m}$ est plus grand. Par exemple, $\check{\nu}_{s,m} = 1/100$ donne une décroissance brutale et $\check{\nu}_{s,m} = 1/2$ une décroissance progressive, tandis que $\hat{\nu}_{s,m}$ entre 2 et 4 fournit un éloignement raisonnable du seuil (alinéas 5.4.E et 5.5.D).

§ 4.7 - FONCTIONS DEMOGRAPHIQUES : (I) DEFINITIONS

(A) Les **fonctions démographiques** Z_s et Ψ_s ($s \in S$) qui sont présentées dans ce § vont prendre en compte, conformément à la caractéristique 4.1.I1 du modèle, les deux thèmes importants de la problématique du développement durable (alinéas 4.1.D,E) qui concernent les conditions de survie de la population et celles de sa stabilisation : la survie n'est assurée que si la consommation unitaire d_c n'est pas trop faible et la stabilisation que si le niveau de développement e_b est suffisant. Cette approche prépare les études complémentaires, dans le cadre de ce modèle, de scénarios aboutissant à une catastrophe par suite d'une croissance incontrôlée de la population et de scénarios conduisant à une stabilisation grâce à un contrôle convenable (§ 5.6 à 5.9).

Conformément au propos méthodologique (alinéas 1.3.A,D et 4.1.F), on envisage d'abord, dans ce §, ces fonctions de façon purement formelle, en énonçant leurs propriétés, leurs interprétations faisant ensuite l'objet du § 4.8.

(B) Les fonctions démographiques Z_s ($s \in S$) sont proposées sous la forme :

(4.54) pour tous $s \in S$ et $d_w \in \mathbf{R}_+$,

(a) $Z_s(d_w) = (1/d_w)\phi(\underline{\underline{d}}^o_{s,w} - \underline{d}^o_{s,w}, \underline{\underline{d}}^o_{s,w} + \underline{d}^o_{s,w} - 2d_w)$, si $d_w > 0$,

(b) $Z_s(0) = 0$,

où $\underline{d}^o_{s,w}$ et $\underline{\underline{d}}^o_{s,w}$ ($s \in S$), sont des coefficients ≥ 0 donnés qui sont supposés vérifier les conditions,

(4.55) (a) $0 < \underline{d}^o_{s,w} < \underline{\underline{d}}^o_{s,w}$, (b) $\underline{\underline{d}}^o_{s,w} < d_w^*$.

(C) Les fonctions démographiques Ψ_s ($s \in S$) sont proposées sous la forme :

(4.56) pour tous $s \in S$, $e_b \in \mathbf{R}_+$, $d_c \in \mathbf{R}_+$, (a) $\Psi_s(e_b,d_c) = \Psi'_s(e_b)\Psi''_s(d_c)$, avec,

(b) $$\Psi'_s(e_b) = 1 + (\underline{\underline{d}}_w - 1)\phi(\check{\nu}_{s,b}, \frac{e_b}{e_b^{\#}} - \hat{\nu}_{s,b}),$$

(c) $$\Psi''_s(d_c) = 1 - \psi(\frac{d_c}{\underline{\underline{d}}_{s,c}}),$$

où, d'une part $\underline{\underline{d}}_w$, d'autre part $\check{\nu}_{s,b}$ et $\hat{\nu}_{s,b}$ ($s \in S$), sont des coefficients ≥ 0 donnés qui sont supposés vérifier les conditions,

(4.57) $\underline{\underline{d}}_w > 1$, (4.58) pour tout $s \in S$, (a) $\hat{\nu}_{s,b} \geq \check{\nu}_{s,b} > 0$, i.e. (b) $\Psi'_s(0) = \underline{\underline{d}}_w$,

enfin, pour chaque $s \in S$, $\underline{\underline{d}}_{s,c}$ est un scalaire > 0 donné, qui mesure une quantité du bien produit, tandis que $e^{\#}_b$ est un scalaire > 0 donné qui mesure un niveau de développement par tête ([4L]).

(D) Les formes explicites (4.54) et (4.56) sont contingentes comme celles de fonctions de production et de pollution (alinéas 4.5.F et 4.6.A). En fait, les interprétations des fonctions Z_s et Ψ_s ($s \in S$) ainsi définies reposent seulement sur les propriétés génériques (4.59) à (4.64) (alinéa 4.4.A), qui sont vérifiées sous les conditions (4.55), (4.57) et (4.58) :

(4.59) pour tout $s \in S$, (a) les fonctions Z_s et Ψ_s sont continûment différentiables respectivement sur sur $\mathbf{R}_+$ et sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$;

(4.60) pour tous $s \in S$ et $d_w \in \mathbf{R}_+$, (a) $Z_s(d_w) = 0$, si $0 \leq d_w \leq \underline{\underline{d}}^o_{s,w}$,
(b) $Z_s(d_w)$ croit strictement de 0 à $1/\underline{\underline{d}}_{s,w}$ lorsque d_w croit de $\underline{\underline{d}}^o_{s,w}$ à $\underline{\underline{d}}^o_{s,w}$, (c) $Z_s(d_w) = 1/d_w$, si $d_w \geq \underline{\underline{d}}^o_{s,w}$;

(4.61) pour tous $s \in S$ et $e_b \in \mathbf{R}_+$, (a) $\Psi_s(e_b,0) = 0$, (b) $\Psi_s(e_b,d_c)$ croit strictement de 0 à $\Psi'_s(e_b)$ lorsque d_c croit de 0 à $\underline{\underline{d}}_{s,c}$,
(c) $\Psi_s(e_b,d_c) = \Psi'_s(e_b)$, pour tout $d_c \geq \underline{\underline{d}}_{s,c}$;

(4.62) pour tous $s \in S$ et $e_b \in \mathbf{R}_+$,
(a) $\Psi'_s(e_b) = \underline{\underline{d}}_w$, si $0 \leq e_b \leq (\hat{\nu}_{s,b} - \check{\nu}_{s,b})e^{\#}_b$,
(b) $\Psi'_s(e_b)$ décroit strictement de $\underline{\underline{d}}_w$ à 1,
lorsque e_b croit de $(\hat{\nu}_{s,b} - \check{\nu}_{s,b})e^{\#}_b$ à $+\infty$,
(c) $\Psi'_s(e_b) = 1$, si $e_b \geq (\hat{\nu}_{s,b} + \check{\nu}_{s,b})e^{\#}_b$;

(4.63) pour tout $s \in S$ et tout $e_b \in \mathbf{R}_+$ tel que $e_b < (\hat{\nu}_{s,b} + \check{\nu}_{s,b})e^{\#}_b$, il existe un scalaire ≥ 0 et un seul, $\underline{\underline{d}}_{s,c}(e_b)$, tel que $\Psi_s(e_b,\underline{\underline{d}}_{s,c}(e_b)) = 1$;

(4.64) pour tous $s \in S$, $e_b \in \mathbf{R}_+$, $d_c \in \mathbf{R}_+$, (a) $e_b \geq (\hat{\nu}_{s,b} + \check{\nu}_{s,b})e^{\#}_b$ entraîne
(b) $\Psi_s(e_b,d_c) = 1$, si et seulement si $d_c \geq \underline{\underline{d}}_{s,c}$.

Ces propriété découlent directement de celles des fonctions type ϕ et ψ (alinéa 4.4.C,D) et des conditions (4.55), (4.57) et (4.58).

(E) La condition de calage (4.28) de la fonction Z_{s^o} résulte de la condition (4.55b) et de la propriété (4.60c). La condition de calage (4.27) de la fonction Ψ_{s^o} s'écrit ici :

(4.65) pour $s = s^o$, $\Psi'_s(e^*_b)\Psi''_s(d^*_c) = d^*_w$.

Or, en vertu de la condition (4.29c), qui stipule que le niveau de référence e^*_b est nul, et de la condition (4.58a)], cette condition (4.65) équivaut à la condition,

(4.66) pour $s = s^o$, $\Psi''_s(d^*_c) = d^*_w/\underline{\underline{d}}_w$.

Dès lors, d'après la propriété 4.4.C1 de la fonction type ψ, la condition de calage (4.65) réclame que les coefficients d^*_w, $\underline{\underline{d}}_w$, d^*_c et $\underline{\underline{d}}_{s^o,c}$ vérifient les conditions :

(4.67) $d^*_w \leq \underline{\underline{d}}_w$, plus précisément,

(4.68) soit (a) $d^*_w = \underline{\underline{d}}_w$ et $d^*_c \geq \underline{\underline{d}}_{s^o,c}$, soit (b) $d^*_w < \underline{\underline{d}}_w$ et $d^*_c < \underline{\underline{d}}_{s^o,c}$.

Ainsi, afin de satisfaire la condition (4.66), les deux options (4.68a) et (4.68b) sont possibles. Les spécifications du chapitre 5 correspondent à l'option (4.68a) (alinéas 5.4.F et 5.5.F), mais l'autre option peut aussi être envisagée (alinéa 4.8.E). Par ailleurs, pour les autres aléas $s \epsilon S$, la spécification des coefficients $\check{\nu}_{s,b}$, $\hat{\nu}_{s,b}$, $\underline{\underline{d}}_{s,c}$ réclame des hypothèses supplémentaires, hypothèses éventuellement exprimées par référence au cas de s°, en fixant les rapports $\check{\nu}_{s,b}/\check{\nu}_{s°,b}$, $\hat{\nu}_{s,b}/\hat{\nu}_{s°,b}$, $\underline{\underline{d}}_{s,c}/\underline{\underline{d}}_{s°,c}$ ou en envisageant l'alternative (4.68) pour s différent de s°.

§ 4.8 - FONCTIONS DEMOGRAPHIQUES : (II) INTERPRETATIONS

(A) L'interprétation des fonctions démographiques Ψ_s ($s \epsilon S$) va consister ci-après (alinéas 4.8.C-E,) en l'explicitation du lien entre leurs propriétés formelles et les deux thèmes annoncés à l'alinéa 4.7.A, à savoir les conditions de survie de la population et celles de sa stabilisation. De plus, le premier de ces thèmes intervient aussi pour préciser (alinéa 4.8.F) l'interprétation des fonctions démographiques Z_s ($s \epsilon S$) annoncée à l'alinéa 4.3.F.

(B) Les interprétations reposent sur celle des variables d_w que calculent ces fonctions, via la contrainte (4.13) : (B1) conformément à l'équation d'évolution (4.7) et à l'interprétation générale des équations d'évolution (alinéa 2.2.D), la variable $d_w = \Psi_s(e_b,d_c)$ représente le facteur par lequel il faut multiplier le niveau (la taille) de la population e_n à la période courante, dans l'éventualité s-, pour avoir son niveau $\underline{e}_n$ à la période suivante, dans l'éventualité s, cela si e_n et d_c sont le niveau de développement et la consommation unitaire à la période courante. On souligne que d_w est le facteur multiplicatif, toujours ≥ 0, alors que le taux de croissance correspondant vaut $d_w - 1$.

(C) En ce qui concerne les **conditions de survie**, les fonctions démographiques Ψ_s ($s \epsilon S$) prennent en compte aussi bien l'éventualité d'une **décroissance catastrophique** (alinéa 4.1.D) que celle d'une **croissance** du niveau de la population : (C1) la propriété (4.61a) exprime que la population disparait complètement pendant la période courante si la consommation unitaire est nulle, cela quel que soit le niveau de développement e_b ; (C2) les propriétés (4.61b,c) indiquent d'abord comment varie la fraction de la population qui survit, fraction représentée alors par le facteur $\Psi_s(e_b,d_c)$, lorsque la consommation unitaire d_c croit à partir de zéro ; (C3) les propriétés (4.61b,c) font apparaître ensuite une stabilisation du facteur $\Psi_s(e_b,d_c)$ lorsque la consommation d_c dépasse le seuil de stabilisation $\underline{\underline{d}}_{s,c}$; (C4) la propriété (4.62) exprime alors que cette stabilisation a lieu à une valeur supérieure à 1, tant que le niveau de développement e_b reste inférieur au seuil $(\hat{\nu}_{s,b} + \check{\nu}_{s,b})e_b^{\#}$; (C5) dans ce cas, en vertu de la propriété (4.63), la survie - entière - est assurée dès que la consommation unitaire d_c atteint le seuil de survie $\underline{d}_{s,c}(e_b)$.

(D) En ce qui concerne la **stabilisation** du niveau de la population, les fonctions Ψ_s ($s \epsilon S$) permettent de distinguer la **stabilisation pérenne**, qui correspond à l'état stationnaire visé (alinéa 4.1.E), de la **stabilisation précaire**, qui correspond à la limite de survie : (D1) la propriété (4.64) exprime que la stabilisation pérenne est atteinte lorsque, conjointement, le niveau de développement e_b atteint ou dépasse le seuil $(\nu_{s,b} + \hat{\nu}_{s,b})\underline{\underline{e}}_{s,b}$ et la consommation unitaire d_c le seuil $\underline{\underline{d}}_{s,c}$ (4M); par contre, (D2) la stabilisation précaire a lieu, conformément à l'interprétation 4.8.C5, lorsque, conjointement, le niveau e_b est inférieur au seuil $(\hat{\nu}_{s,b} + \check{\nu}_{s,b})e_b^{\#}$ et la consommation unitaire d_c atteint le seuil de survie $\underline{d}_c(e_b)$; la précarité consiste alors, i.e. si le niveau e_b reste strictement inférieur au seuil $(\hat{\nu}_{s,b} + \check{\nu}_{s,b})e_b^{\#}$, en ce que (D3) la croissance reprend si la consommation d_c dépasse le seuil de survie $\underline{d}_c(e_b)$.

(E) L'interprétation des options (4.68) réclame de les situer par rapport à la condition (4.29c), qui stipule que le niveau de référence e_b^* est nul, i.e. que le processus d'accumulation des connaissances ne commence - éventuellement - qu'à la période initiale.

L'option (4.68a) est la plus facile à situer par rapport à cette condition : le processus qui vise à diminuer le taux de natalité n'ayant pas commencé, il est raisonnable que le facteur d_w^* à la période initiale soit à son maximum $\underline{d}_w$, mais cela réclame, d'après la propriété (4.68a), que la consommation de référence d_c^* soit au moins égale au seuil de stabilisation $\underline{\underline{d}}_{s°,c}$.

L'option (4.68b), plus pessimiste, exprime que le régime de référence correspond à une situation intermédiaire, situation résultant de l'interaction de facteurs antagonistes, en ce sens que le taux de croissance courant à la période initiale n'est pas à son maximum par suite d'une consommation unitaire d_c^* insuffisante, puisque inférieure à la consommation de stabilisation $\underline{\underline{d}}_{s°,c}$, bien que le taux de natalité soit à son maximum, puisque le processus de décroissance de ce dernier n'est pas amorcé. Cette option est sans doute plus réaliste que la précédente, vu l'hétérogénéité de la population mondiale, mais elle est plus difficile à concrétiser numériquement.

En fait, l'option la plus réaliste résiderait sans doute dans un compromis entre les deux options qui dépasserait leur opposition en supprimant la condition (4.29c) qui stipule que le niveau de référence e_b^* est nul. On y a renoncé, car évaluer un niveau non nul réclamerait des moyens documentaires dépassant ceux, très limités, qui ont suffi au propos illustratif du modèle (alinéas 1.3.B, 4.1.F, 4.8.G). La variante utilisée au chapitre 5 permet de tourner cette difficulté en évaluant plutôt un coefficient de croissance des connaissances [alinéa 5.5.F, condition (5.43)].

(F) En ce qui concerne les fonctions démographiques Z_s ($s \in S$), la propriété (4.60) précise, compte tenu des équations d'évolution (4.6) et (4.20), comment évolue le niveau de développement e_b en cas de décroissance catastrophique du niveau de la population (alinéas 4.3.F et 4.7.A) : lorsque d_w descend en dessous du seuil $\underline{\underline{d}}_{s,w}$, le niveau est d'autant moins préservé que la décroissance est plus forte [propriétés (4.60b,c)] ; il est totalement perdu si elle l'est trop, i.e si d_w tombe en dessous du seuil $\underline{d}_{s,w}$ [propriété (4.60a)].

(G) Le caractère schématique des fonctions démographiques en cause (§ 4.7), qui est analogue à celui des fonctions de production et de pollution (§ 4.5 et 4.6), est à considérer, comme ce dernier (alinéa 4.5.G et 4.6.A), en fonction du propos exclusivement illustratif, méthodologique, du modèle (alinéa 4.1.F) ([4N]). Dans ce sens, les études de scénarios basées sur ces fonctions (alinéa 4.7.A), sont à prendre comme des exercices de prospective exploratoire, en dehors de toute visée prévisionnelle (alinéas 3.1.F et 4.1.F).

§ 4.9 - <u>RECAPITULATION ET ROLE ILLUSTRATIF DU MODELE</u>

(A) Les développements du chapitre 3 concernant les procédures d'exploitation et la question téléologique (§ 3.12 à 3.17) peuvent être appliqués tels quels au cas du présent modèle, i.e. au cas où le jeu de données de base Δ est associé au jeu de données de base sous forme réduite $\Delta°$ (alinéa 4.2.G) dont la définition générique a fait l'objet des § 4.2 à 4.8 ci-dessus. Dans la suite de ce § 4.9, on récapitule les autres composants du modèle et leur articulation avec les procédures d'exploitation, cela pour faire apparaître comment les développements généraux du chapitre 3 sont illustrés par le présent modèle (alinéa 4.1.F), une fois ce dernier entièrement spécifié conformément, d'une part aux § 4.2 à 4.8 en ce qui concerne les composants de base, d'autre part aux § 4.10 à 4.13 ci-après en ce qui concerne les autres composants.

(B) Les développpements envisagés font intervenir, comme composants du modèle correspondant au jeu de données de base Δ en cause (alinéas 3.12.B,F) : une structure primaire $\mathring{\mathbf{\Sigma}} = (\mathring{X}, Y, \mathring{G}, \mathring{F})$, un état initial e° et des protocoles de resserrement d'exploitation $\Gamma = (\Gamma_s, s\epsilon S^{\theta})$ relatifs à cette structure, enfin (éventuellement) des fonctions objectif Q relatives au jeu de données de base Δ. Ils concernent trois procédures d'exploitation relevant de la démarche de prospective comportementale (alinéa 3.1.F) : l'exploitation par simulation libre, celle par simulation sous contraintes, celle par optimisation comportementale (alinéas 3.14.B, 3.14.H, 2.14.F et 3.16.D).

Les **structures primaires** en cause diffèrent selon qu'il s'agit de l'exploitation par simulation, libre ou sous contraintes, ou de l'exploitation par optimisation comportementale (alinéa 3.12.B). On envisage successivement ces deux cas ci-après (alinéas 4.9.C,D).

(C) Dans le cas de l'exploitation par **simulation**, la structure primaire $\mathring{\mathbf{\Sigma}}$ est à anticipations, i.e. est la structure de contrôle $\underline{\mathbf{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ simplement conditionnée par un **protocole d'anticipation** B de profondeur τ. Les protocoles envisagés, dits **décisifs**, sont introduits aux § 4.10 et 4.11. Ils sont supposés **univoques** (alinéa 3.13.E), ce qui fait que la **condition d'univocité** $B0(\mathring{\mathbf{\Sigma}},e°,\mathbf{u})$, requise par les simulations (alinéas 3.14.B,H), est vérifiée, d'après la propriété (3.56), dès que la structure à contrôles spécifiés $\mathring{\mathbf{\Sigma}}^{\mathbf{u}}$ est ponctuellement viable en e° (4P).

Dans ces conditions, l'exploitation par simulation libre (alinéa 3.14.B) ne fait pas intervenir d'autre donnée que celles de base, l'état initial e° et le protocole d'anticipation B, tandis que l'exploitation par simulation sous contraintes (alinéa 3.14.H) fait intervenir, en plus, le **protocole de resserrement d'exploitation** $\Gamma = (\Gamma_s, s\epsilon S^{\theta})$, de l'une des formes indiquées au § 4.12, et (éventuellement) la **fonction objectif** Q, ici de **type normatif** (alinéa 3.12.G), de l'une des formes indiquées à l'alinéa 4.13.B. Les protocoles décisifs étant de type argument max (alinéas 3.7.E, 3.12.D et 4.10.E), la détermination des plans optimums en cause, que réclame l'exploitation par simulation sous contraintes, fournit alors un exemple entièrement explicitable de **problème à optimisations multiples** (alinéa 3.15.F et 4.12.F).

(D) Dans le cas de l'exploitation par **optimisation comportementale**, la structure primaire $\mathring{\mathbf{\Sigma}}$ est seulement la structure de base $\mathbf{\Sigma}_b(\tau)$ (alinéa 4.2.G) et la fonction objectif Q est de **type comportemental** (alinéas 3.12.G et 4.13.C), cette optimisation palliant la sous détermination qui tient à ce que la condition d'univocité $B0(\mathring{\mathbf{\Sigma}},e°,u)$ n'est alors plus vérifiée, en général. C'est ici la situation de la **question téléologique** 3.16.D0 qui est illustrée par un exemple entièrement explicitable.

§ 4.10 - PROTOCOLES D'ANTICIPATION : (I) DEFINITIONS

(A) Les structures primaires correspondant à l'exploitation par simulation (alinéa 4.9.C) sont à anticipations de type argument max (alinéa 3.12.D). On définit ci-après, dans ce § 4.10, les protocoles d'anticipation de type argument max correspondants, dits décisifs, en introduisant successivement, les protocoles de référence, dits pérennisants (alinéa 4.10.B), puis les fonctions objectif d'anticipation (alinéa 4.10.C,D), enfin les protocoles décisifs (alinéa 4.10.E).

(B) Les protocoles d'anticipation de référence, par rapport auxquels vont être définis les protocoles décisifs (alinéas 4.10.A,E), sont des protocoles conformes à conditions finales de stationnarité (alinéas 3.7.F et 3.8.C). Plus précisément, un protocole d'anticipation $\mathring{B} = (\mathring{B}_s,\ s \in S^\theta)$, de profondeur τ, relatif au jeu de données de base Δ en cause, est dit **pérennisant** s'il constitue un resserrement du protocole d'anticipation engendré, à partir du protocole conforme de base $\underline{A}(\Delta,\tau)$, par un **protocole de conditions finales** $\Phi = (\Phi_{s,\sigma},\ s \in S^\theta,\ \sigma \in [s,\tau]^*)$ (alinéa 3.7.F), indépendant du contrôle et de la forme, du type de (3.30),

(4.70) pour chaques $s \in S^\theta$ et $\sigma \in [s,\tau]^*$, $\Phi_{s,\sigma}$ est l'ensemble des couples $(e,d) \in E_\sigma x D_\sigma$ tels que,

(a) pour tous $i \in I_\#$ et $\hat{\sigma} \in \sigma+$, $-\underline{b}_i \le f_{\hat{\sigma},i}(e,d) - e_i \le \underline{\underline{b}}_i$,

où, d'une part $I_\#$ est un sous ensemble donné de la nomenclature I des types de variables d'état, d'autre part, pour chaque $i \in I_\#$, $\underline{b}_i$ et $\underline{\underline{b}}_i$ sont des nombres ≥ 0 (finis ou $+\infty$) donnés tels que,

(4.71) pour tous $i \in I_\#$, (a) $\underline{b}_i \le \underline{\underline{b}}_i$.

On note que l'indépendance, vis-à-vis du contrôle, de ce protocole de conditions finales Φ, est concomitante de celle de la fonction d'évolution f (alinéa 4.2.C) et que le protocole conforme de base $\underline{A}(\Delta,\tau)$ peut être considéré comme pérennisant en prenant l'ensemble $I_\#$ vide.

Les conditions finales (4.70a) expriment, pour chaque $i \in I_\#$, une stationnarité, de la variable e_i, plus ou moins stricte selon le choix des bornes $-\underline{b}_i$ et $\underline{\underline{b}}_i$, la la plus stricte correspondant au cas où $\underline{b}_i = \underline{\underline{b}}_i = 0$ (alinéa 3.8.C). Par exemple, dans le sens de ce qui est fait au chapitre 5 (alinéas 5.3.A,E et 5.4.G), lorsque $I_\# = \{k\}$, $\underline{b}_k = 0$ et $\underline{\underline{b}}_k = +\infty$, un protocole d'anticipation pérennisant $\mathring{B} = (\mathring{B}_s,\ s \in S^\theta)$ vérifie, par définitions (3.26) du protocole engendré et (4.4) de la composante $f_{\sigma,k}$ de la fonction d'évolution f_σ :

(4.72) pour tous $s \in S^\theta$, $e \in E_s$ et $\underline{u} \in U_s$,

$\mathring{B}_s(e,\underline{u})$ est contenu dans l'ensemble des anticipations $(\varepsilon, \delta) \in \underline{A}_s(\Delta,\tau,e,\underline{u})$ telles que (a) pour tout $\sigma \in [s,\tau]^*$, $\delta_{\sigma,k} \ge \alpha_{\sigma,k}\varepsilon_{\sigma,k}$.

Les conditions finales (4.70a) peuvent être conjuguées, dans la définition des protocoles pérennisants, avec d'autres conditions, auxiliaires. Par exemple, des conditions initiales sur les variables de dynamique (alinéas 5.3.D,H).

(C) Les fonctions objectif d'anticipation (alinéa 3.7.E) en cause vont être dérivées des fonctions objectif des modèles de croissance endogène (alinéa 4.13.C) [4R] : indépendantes du contrôle, elles ne concernent que les variables de types e_n et d_c, mais elles peuvent ne pas être séparables. Plus précisément, une fonction objectif d'anticipation $J = (J_s,\ s \in S^\theta)$, relative au jeu de données de base Δ, est dite **de classe nc** si elle est de la forme, (4.73) pour chaque $s \in S^\theta$, J_s est la fonction numérique, sur l'ensemble $A_s(\Delta,\tau)$ des anticipations après s, définie par,

(a) pour tout $(\varepsilon, \delta) \in A_s(\Delta,\tau)$,

$$J_s(\varepsilon, \delta) = \sum_{\sigma \in [s,\tau]^\#} \varepsilon_{\sigma,n}\theta_{s,\sigma}\left(\frac{\delta_{\sigma,c}}{d_c^\#}\right)\left[\prod_{\hat\sigma \in \sigma+} \kappa\left(\gamma_{s,\sigma}^J, \check\nu_{s,\sigma}^J, \frac{\delta_{\hat\sigma,c} - \delta_{\sigma,c}}{d_c^\#}\right)\right]^{1/\mathrm{card}(\sigma+)}$$

$$+ \sum_{\sigma \in [s,\tau]^*} \varepsilon_{\sigma,n}\theta_{s,\sigma}\left(\frac{\delta_{\sigma,c}}{d_c^\#}\right),$$

où, d'une part, pour chaque $s \in S^\theta$ et $\sigma \in [s,\tau]$, $\theta_{s,\sigma}$ est une fonction numérique sur $\mathbf{R}_+$, appelée **fonction d'utilité instantanée** en (s,σ), tandis que $\gamma_{s,\sigma}^J$ et $\check\nu_{s,\sigma}^J$ sont des coefficients ≥ 0 donnés, les seconds étant > 0,

(4.74) pour tous $s \in S^\theta$ et $\sigma \in [s,\tau]$, (a) $\check\nu_{s,\sigma}^J > 0$,

d'autre part, $d_c^\#$ est un scalaire > 0 donné, indépendemment de s, qui mesure une consommation type, enfin κ, $(\gamma,\nu,x) \longrightarrow \kappa(\gamma,\nu,x)$, est la fonction de pénalisation type définie par la relation (4.32) (alinéa 4.4.E).

(D) Une telle fonction objectif J est dite **de classe nc à actualisation** si les fonctions d'utilité instantanée $\theta_{s,\sigma}$ $(s \in S^\theta,\ \sigma \in [s,\tau])$ sont de la forme,

(4.75) pour tous $s \in S^\theta$, $\sigma \in [s,\tau]$, $x \in \mathbf{R}_+$,

(a) $\theta_{s,\sigma}(x) = (1 + \rho_s)^{-a(s,\sigma)}\theta_*(x)$, avec (b) $a(s,\sigma) = \underline{t}_\sigma - \underline{t}_s$,

où, d'une part θ_* est la fonction numérique sur $\mathbf{R}_+$ définie par,

(4.76) pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\theta_*(x) = (\hat\nu^J + x)^\mu$,

d'autre part, les coefficients ρ_s $(s \in S^\theta)$, $\hat\nu^J$, μ sont donnés ≥ 0 tels que,

(4.77) (a) $\hat\nu^J > 0$ et (b) $0 < \mu < 1$.

(E) On appelle alors protocole (d'anticipation) **décisif** un resserrement univoque, $B = (B_s,\ s \in S^\theta)$, du protocole de type argument max relatif à un protocole, de référence, pérennisant $\mathring{B} = (\mathring{B}_s,\ s \in S^\theta)$ et à une fonction objectif d'anticipation de classe nc à actualisation (alinéas 3.7.D,E, 3.13.E, 4.4.B,C). Un tel protocole dépend, réclame pour sa définition la donnée, d'une part du multiplet $\omega = (\tau,\ I_\#,\ (\underline{b}_i,\ \underline{\underline{b}}_i,\ i \in I_\#),\ (\gamma_{s,\sigma}^J,\ \check\nu_{s,\sigma}^J,\ s \in S^\theta,\ \sigma \in [s,\tau]^\#),\ (\rho_s,\ s \in S^\theta),\ \hat\nu^J,\ \mu)$, dit **jeu de données d'anticipation**, d'autre part d'un procédé de sélection d'un resserrement univoque dans l'argument max [4S].

§ 4.11 - <u>PROTOCOLES D'ANTICIPATION</u> : (II) <u>INTERPRETATIONS</u>

(A) Chacun des protocoles d'anticipation envisagés au § 4.10 représente un comportement spontané du système macroéconomique en cause (alinéas 3.1.D et 4.1.B,C), comportement de plus en plus spécifique quand on va du protocole conforme de base aux protocoles pérennisants, puis aux protocoles décisifs.

(B) Le protocole conforme de base $\mathring{B} = \underline{A}(\Delta,\tau)$ exprime seulement le caractère conforme de l'anticipation, i.e. correspond à, représente, la prise en compte dans cette dernière des contraintes de base (alinéas 3.8.A,B).

(C) Les protocoles pérennisants expriment, en plus du caractère conforme de l'anticipation, une exigence - spontanée, des acteurs décentralisés du système d'économie régulée en cause (alinéas 3.1.D,E et 4.1.C) - concernant la **pérennité** (alinéa 4.1.E), via les conditions de stationnarité (4.70a). Cette exigence peut être plus ou moins forte, selon les types de variables concernées par la stationnarité. Par exemple, la condition (4.72) correspond à une exigence minimale consistant à ce que le capital à la période finale est au moins entretenu à l'identique. De plus cette condition (4.72) joue un rôle méthodologique, vu le niveau très agrégé - à un seul bien (alinéa 4.3.E) - de la représentation, en ce sens qu'elle exclut les anticipations méthodologiquement irréalistes où le capital serait consommé (mangé !) à la dernière période de l'anticipation ([4T]). On souligne le caractère spontané de la tendance à la pérennité ainsi exprimé par un protocole d'anticipation pérennisant : cette tendance n'est pas à confondre avec une éventuelle exigence dans le même sens de la part des instances régulatrices, exigence qui va être prise en compte par le protocole de resserrement d'exploitation (§ 4.12).

(D) La maximisation d'une fonction objectif d'anticipation de classe nc exprime une préférence, dans l'anticipation, pour une consommation de masse (alinéa 4.1.C), via le produit - au second membre de la relation (4.73a) - du niveau de la population $\varepsilon_{\sigma,n}$ par l'utilité instantanée $\theta_{s,\sigma}(\delta_{\sigma,c}/d_c^{\#})$ de la consommation unitaire $\delta_{\sigma,c}$. Dans ce sens, les fonctions d'utilité instantanées $\theta_{s,\sigma}$ sont analogues à celles intervenant dans les fonctions objectif des modèles de croissance (alinéa 4.13.C), i.e. (D1) régulières, stictement croissantes et strictement concave sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, les fonctions de la forme (4.75) sous les conditions (4.76) et (4.77) vérifient ces propriétés ([4U]). De plus, la dépendance de ces fonctions vis-à-vis des aléas s et $\sigma \epsilon [s,\tau]$ permet d'exprimer des arbitrages entre les diverses périodes et les divers aléas, en particulier, via des **taux d'actualisation** ρ_s ($s \epsilon S^\theta$), comme dans les expressions (4.75).

(E) Par ailleurs, toujours en ce qui concerne l'expression (4.73a), le facteur de pénalisation $[\prod_{\hat{\sigma}\epsilon\sigma+} \kappa(\gamma^J_{s,\sigma}, \nu^J_{s,\sigma}, (\delta_{\hat{\sigma},c} - \delta_{\sigma,c})/d_c^{\#})]^{1/\mathrm{card}(\sigma+)}$, au second membre, exprime une aversion pour la régression de la consommation par tête, la puissance $1/\mathrm{card}(\sigma+)$ visant à compenser une éventuelle hétérogénéité, dispersion, des nombres de successeurs $\mathrm{card}(\sigma+)$. En l'absence de ce facteur, i.e. si tous les coefficients $\gamma^J_{s,\sigma}$ sont nuls ($s \epsilon S^\theta$, $\sigma \epsilon [s,\tau]$), la forme (4.73a) se réduit à la forme,

$$(4.78) \quad (a) \quad \text{pour tout } (\varepsilon,\ \delta) \in A_s(\Delta,\tau), \quad J_s(\varepsilon,\ \delta) = \sum_{\sigma \epsilon [s,\tau]} \varepsilon_{\sigma,n}\theta_{s,\sigma}(\delta_{\sigma,c}),$$

qui est à rapprocher de celle des fonctions objectif des modèles de croissance endogène (alinéa 4.13.C), à ceci près que la population $\varepsilon_{\sigma,n}$ est ici variable et ... qu'il s'agit d'une fonction objectif d'anticipation (alinéas 1.2.B, 2.14.F, 3.7.G). Au total, les protocoles décisifs expriment un compromis entre les tendances antagonistes représentées respectivement par les protocoles pérennisants et la fonction objectif d'anticipation.

(F) Le caractère univoque des protocoles décisifs (alinéa 4.10.E) exprime le choix précis d'une anticipation - éventuellement parmi d'autres aussi optimums - que réclame la prise de décision, basée sur l'anticipation, correspondant à la relation (3.42c2). Ainsi, pour chaque schéma de contrôle **u**, la stratégie, que constitue le noyau de viabilité de la structure à contrôles spécifiés $\mathring{\Sigma}^{u}$ (alinéa 4.9.C), représente le comportement décisionnel des acteurs décentralisés conditionnellement à ce schéma de contrôle (alinéa 4.1.C).

§ 4.12 - PROTOCOLES DE RESSERREMENT D'EXPLOITATION

(A) Les protocoles de resserrement d'exploitation envisagés (alinéa 4.9.B) conjuguent des protocole de deux types dont les rôles, en particulier méthodologiques, sont très différents : les protocoles de type pérennité et les protocoles de type délimitant. On situe ci-après ces deux types (alinéas 4.12.B,C), puis on explicite et on interprète un protocole complet qui les conjugue (alinéas 4.12.D,E).

(B) Un protocole de **type pérennité** est un protocole de conditions finales (alinéa 2.6.C) qui a pour rôle d'exprimer que le système atteint à la période finale un état stationnaire acceptable (alinéa 4.1.E). En fait, au-delà de ce rôle spécifique, lié à la stationnarité finale, et de façon concomitante, un tel protocole a un rôle méthodologique, lié à l'option d'un horizon fini, qui est de compléter les conditions standards de viabilité - pendant la période totale prise en compte - par des conditions aux limites ultimes, assurant, via la stationnarité, une viabilité à long terme, après la période finale.

On souligne l'importance méthodologique de ces conditions aux limites ultimes : leur ignorance grève la validité, même à moyen terme, des plans déterminés ([4T]). On souligne aussi la différence entre les protocoles (de resserrement d'exploitation) de type pérennité introduits ici et les protocoles d'anticipation pérennisants (alinéa 4.10.B), même si, dans les deux cas, il s'agit de conditions finales de stationnarité (alinéa 3.7.G).

(C) A l'opposé, un protocole de **type délimitant** a pour rôle d'encadrer, chemin faisant, l'évolution du système en fonction de considérants plus circonstanciels et historiques que méthodologiques, cet encadrement pouvant concerner toutes les périodes, y compris la période finale, ce qui fait que ce type de protocole peut recouper le précédent.

(D) Un protocole de resserrement d'exploitation $\Gamma = (\Gamma_s,\ s\epsilon S^{\theta})$ est spécifié par l'explicitation, pour chaque $s\epsilon S^{\theta}$, du système des contraintes scalaires qui définissent le protocole de resserrement local Γ_s, en tant que sous-ensemble de l'ensemble produit $E_s{\times}D_s{\times}U_s$. On indique ci-après, de façon générique, un tel système dont les contraintes expriment, dans le cadre du modèle, quelques unes des exigences du développement durable (alinéa 4.1.E), contraintes dont certaines seront reprises au chapitre 5 (alinéas 5.9.D,E).

Le protocole $\Gamma = (\Gamma_s,\ s\epsilon S^{\theta})$ envisagé est déduit, par la relation (3.45), du protocole de resserrement de profondeur nulle $\Gamma° = (\Gamma_s^{\circ},\ s\epsilon S^{\theta})$ (alinéa 3.12.E) dont chaque protocole de resserrement local Γ_s° est le sous-ensemble, de l'ensemble produit $E_s{\times}D_s{\times}U_s$, formés des triplets (e,d,u) - avec e, d, u des formes (4.3a,b,c) - vérifiant les contraintes scalaires (4.80) et (4.81),

(4.80) seulement pour $s\epsilon S_{\theta}$, (a) $d_k \geq \alpha_{s,k}e_k$, (b) $d_m \leq \alpha_{s,m}e_m$,
(c) $d_b \geq \alpha_{s,b}e_b$, (d) $e_b \geq \underline{e}^{+}_{s,b}$,

(4.81) quelque soit $s\epsilon S^{\theta}$, (a) $d_c \geq \underline{d}^{+}_{s,c}$, (b) $e_m \leq \underline{\underline{e}}^{+}_{s,m}$,

contraintes où, en plus des coefficients de dépréciation $\alpha_{s,k}$, $\alpha_{s,m}$ et $\alpha_{s,b}$ ($s\epsilon S_{\theta}$) (alinéas 4.2.D et 4.3.D), les termes $\underline{e}^{+}_{s,b}$ ($s\epsilon S_{\theta}$), $\underline{d}^{+}_{s,c}$, $\underline{\underline{e}}^{+}_{s,m}$ ($s\epsilon S^{\theta}$) sont des paramètres scalaires ≥ 0 qui constituent des **données d'exploitation**.

(E) A propos de cette définition, on note d'abord que les contraintes (4.80) et (4.81) correspondent respectivement aux protocoles de type pérennité et de type délimitant, avec le recoupement mentionné ci-dessus (alinéa 4.12.C), vu que les contraintes (4.81) peuvent, pour $s \in S_\theta$, aussi être considérées comme de type pérennité.

Cette distinction de types entre les contraintes (4.80) et (4.81), qui apparaît dans la différence d'indexation (respectivement sur S_θ et S^θ), repose d'abord sur l'interprétation des contraintes (4.80a,b,c) en termes de stationnarité finale, conformément aux équations d'évolution de base (4.4) à (4.6) : les contraintes (4.80a) et (4.80c) expriment que, pour les aléas finaux $s \in S_\theta$, le niveau d_i des investissements (en capital pour i = k, en connaissances pour i = b) vaut au moins celui $\alpha_{s,i}e_i$ de la dépréciation, tandis que la contrainte (4.80b) exprime que le niveau des émissions d_m n'excède pas la capacité d'absorption spontanée $\alpha_{s,m}e_m$ de la biosphère. De plus, les contraintes (4.80d) et (4.81a), pour $s \in S_\theta$, expriment une exigence de stationnarité du niveau de la population à la période finale, car les fonctions démographiques Ψ_s ($s \in S^\theta$), qui fournissent les facteurs de croissance d_w de la population aux diverses périodes via la relation (4.13), sont supposées telles que, sous ces contraintes, ce facteur vaut 1, au moins si les seuils $\underline{e}^+_{s,b}$ et $\underline{d}^+_{s,c}$ ($s \in S_\theta$) sont convenablement choisis [propriété (4.64) et interprétation 4.8.D1].

Par ailleurs, les contraintes (4.81a), pour les aléas non finaux $s \in S^\theta \backslash S_\theta$, expriment aussi une exigence de niveau de vie, mais ici, via la seule consommation unitaire d_c, seulement une exigence de survie visant à éviter une décroissance, catastrophique de la population aux périodes intermédiaires (alinéa 4.8.C). Enfin, les contraintes (4.81b), expriment un scénario de contrôle du niveau e_m des polluants accumulés. Une variante de ces dernières contraintes consiste en un scénario de contrôle des émissions d_m de polluants [4V] :

(4.82) quelque soit $s \in S^\theta$, (a) $d_m \le \underline{\underline{d}}^+_{s,m}$.

Comme autres contraintes de type délimitant, on cite celles de la même forme que les contraintes (4.80a,b,c), mais écrites pour des aléas $s \in S^\theta \backslash S_\theta$, par exemple pour tout $s \in S^\theta$ tel que $t_* \le \underline{t}_s \le \theta$, avec t_* donné tel que $t_* < \theta$. De telles contraintes expriment une exigence de stationnarité dès la période t_*.

(F) Une fois spécifiés la structure primaire $\mathring{\Sigma}$ et le protocole de resserrement d'exploitation Γ (alinéas 4.9.B-D et 4.12.D), la **procédure primaire** fournit, comme **structure opérationnelle totale**, la structure de contrôle Σ engendrée par le second à partir de la première (alinéa 3.12.B). L'**exploitation pratique** du modèle consiste alors, entre autres mais principalement (alinéa 3.12.C), en des déterminations de plans et de cheminements viables relativement à cette structure opérationnelle. En particulier, lorsque la structure primaire est à anticipations (alinéa 4.9.C), ces déterminations se heurtent au **problème à optimisations multiples** dont on a ainsi un exemple entièrement explicitable (alinéas 3.15.F). On souligne que ce problème se présente, en particulier à cause des conditions finales d'exploitation (alinéas 4.12.B,D), pour la simple détermination de plans viables, sans parler de celle de plans optimums relativement à une fonction objectif de type normatif (alinéa 4.13.B).

§ 4.13 - FONCTIONS OBJECTIF ET QUESTION TELEOLOGIQUE

(A) S'intéressant, dans ce §, à l'exploitation de la structure opérationnelle (alinéa 4.12.F) qui relève du contrôle optimal (§ 2.10), on envisage, pour cette exploitation, diverses fonctions objectif (alinéa 3.12.F) et leurs interprétations dans la perspective du développement durable dont relève aussi la structure opérationnelle (alinéas 4.1.E et 4.12.D).

Ces fonctions objectif diffèrent selon qu'il s'agit de l'exploitation par simulation sous contraintes (alinéa 3.14.H) ou de l'exploitation par optimisation comportementale (alinéa 3.16.D). On envisage ces deux cas ci-après (alinéas 4.13.B-E), puis la question téléologique qui correspond au second (alinéas 4.13.E,F). On désigne par Q une fonction objectif relative au jeu de données de base Δ (alinéa 3.12.F), fonction à **maximiser**, par (ξ, ζ, **u**) un plan de la structure de base et par $\xi_{s,i}$ et $\zeta_{s,j}$ ($s\epsilon S^{\theta}$, $i\epsilon I$, $j\epsilon J$) ses composantes spontanées.

(B) Dans le cas de l'exploitation par **simulation sous contraintes** (alinéa 3.14.H), les fonctions objectif Q sont de **type normatif** (alinéas 3.12.G). Les relations (4.83) à (4.85) ci-après donnent des exemples de telles fonctions, les signes "-" aux seconds membres indiquant une minimisation :

(4.83) $\quad Q(\xi, \zeta, \mathbf{u}) = -\max_{s\epsilon S_{\theta}} \xi_{s,m}$; $\qquad$ (4.84) $\quad Q(\xi, \zeta, \mathbf{u}) = -\sum_{s\epsilon S^{\theta}} \zeta_{s,m}$;

(4.85) $\quad Q(\xi, \zeta, \mathbf{u}) = \min_{s\epsilon S^{\theta}} \zeta_{s,c}$.

Les fonctions définies par les relations (4.83) et (4.84) expriment des exigences concernant l'effet de serre : pour (4.83), exigence de type pérennité, de minimisation du niveau final des polluants ; pour (4.84), exigence de type délimitant, de minimisation du total des émissions. La fonction définie par la relation (4.85), qui est à rapprocher du critère de Rawls [1u], exprime, par contre, une exigence, aussi de type délimitant, d'uniformisation intertemporelle du niveau de vie.

Chacune de ces fonctions objectif fournit, relativement à la structure opérationnelle, à anticipations, correspondant à l'exploitation par simulation sous contraintes, un exemple de problème complet à optimisations multiples (alinéa 4.12.F).

(C) Dans le cas de l'exploitation par **optimisation comportementale** (alinéa 3.16.D), les fonctions objectif Q, de **type comportemental** (alinéa 3.12.G), vont être obtenues en adaptant au cadre formel du présent modèle, en particulier au traitement de l'incertitude, les fonctions objectif, représentant une utilité sociale intertemporelle, qui interviennent dans les modèles de croissance endogène [4R], en particulier dans ceux de l'effet de serre (alinéa 1.4.B), par exemple dans le modèle DICE [4W]. Cette adaptation fournit des fonctions objectif Q de la forme,

(4.86) $\quad Q(\xi, \zeta, \mathbf{u}) = \sum_{s\epsilon S^{\theta}} \xi_{s,n}\theta_s(\zeta_{s,c}/d_c^{\#})$,

où, d'une part $d_c^{\#}$ est le scalaire > 0 donné à l'alinéa 4.10.C, d'autre part, pour chaque $s\epsilon S^{\theta}$, θ_s désigne une fonction numérique donnée sur $\mathbf{R}_+$. De plus, la dépendance de ces fonctions d'utilité instantanées θ_s vis-à-vis de l'aléa s, i.e. vis-à-vis de la période dans les modèles déterministes, réside dans une actualisation, de taux fixe ρ, conformément à l'expression,

(4.87) $\quad$ pour tous $s\epsilon S^{\theta}$ et $x \epsilon \mathbf{R}_+$, $\quad \theta_s(x) = (1 + \rho)^{-a(s)}\theta_*(x)$, $\quad$ avec $a(s) = \underline{t}_s$, où θ_* est une fonction numérique donnée sur $\mathbb{R}_+$, possédant les propriétés 4.11.D1, par exemple de la forme (4.76).

(D) En fait, au-delà des fonctions de la forme (4.86) sous la condition (4.87), on considère celles, dites aussi de **classe nc**, qui sont de la forme,

$$(4.88)\quad Q(\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u}) \;=\; \sum_{s\in S^\theta\setminus S_\theta} \xi_{s,n}\theta_s\Big(\frac{\zeta_{\sigma,c}}{d_c^\#}\Big)\Big[\prod_{\sigma\in s+} \kappa\Big(\gamma^Q_{s,\sigma},\ \check{\nu}^Q_{s,\sigma},\ \frac{\zeta_{\sigma,c}-\zeta_{s,c}}{d_c^\#}\Big)\Big]^{1/\mathrm{card}(s+)}$$

$$+\ \sum_{s\in S_\theta} \xi_{s,n}\theta_s\Big(\frac{\delta_{s,c}}{d_c^\#}\Big),$$

où, d'une part κ, $(\gamma,\nu,x) \longrightarrow \kappa(\gamma,\nu,x)$, est la fonction de pénalisation type définie par la relation (4.32) (alinéa 4.4.E), d'autre part $\gamma^Q_{s,\sigma}$ et $\check{\nu}^Q_{s,\sigma}$ ($s\in S^\theta$, $\sigma\in s+$) sont des coefficients ≥ 0 donnés, les seconds étant > 0,

(4.89) pour tous $s\in S^\theta$ et $\sigma\in s+$, (a) $\check{\nu}^Q_{s,\sigma} > 0$.

(E) Les interprétations des expressions (4.86) et (4.88) sont, en première analyse, analogues à celles des fonctions objectif d'anticipation de classe nc (alinéas 4.10.C et 4.11.D,E) : préférence pour une consommation de masse, via le produit, au second membre, du niveau de la population $\xi_{s,n}$ par l'utilité instantanée $\theta_s(\zeta_{s,c}/d_c^\#)$ de la consommation unitaire $\zeta_{s,c}$; en ce qui concerne (4.88), aversion pour la régression de la consommation par tête, via le facteur de pénalisation au second membre.

Cependant, en seconde analyse, l'approche globale, intertemporelle, de ces fonctions objectif fait apparaître le défaut de justification qui est à l'origine de la question téléologique (alinéas 1.4.A,B, § 3.16 et 3.17) : le modèle mis en place dans ce chapitre fournit, conformément à son propos (alinéa 4.1.F), un cadre entièrement spécifié, explicitable, dans lequel peuvent être reprises les considérations générales des § 3.16 et 3.17 sur cette question. Dans ce sens, on commente ci-après celles du § 3.17.

(F) La fonction objectif fournie par la relation (4.86) étant séparable, les considérations du § 3.17 s'appliquent à cette fonction, mise ici pour $\check{Q}$ (alinéas 3.16.B et 3.17.B), en définissant la fonction objectif sous forme locale $q = (q_s,\ s\in S^\theta)$ par :

(4.90) pour tous $s\in S^\theta$, $e \in E_s$, $d \in D_s$, $u \in U_s$, (a) $q_s(e,d,u) \;=\; e_n\theta_s(d_c/d_c^\#)$.

La fonction objectif d'anticipation $J = (J_s,\ s\in S^\theta)$ introduite par les relations (3.74), est alors, en vertu de la relation (4.90), de la forme,

(4.91) pour tous $s\in[s°,\theta-\tau]$ et $(\varepsilon,\delta) \in A_s(\tau)$,

$$\text{(a)}\quad J_s(\varepsilon,\delta) \;=\; \sum_{\sigma\in[s,\tau]} \lambda_{s,\sigma}\varepsilon_{\sigma,n}\theta_\sigma(\delta_{\sigma,c}).$$

Autrement dit, cette fonction objectif J est de classe nc (alinéa 4.10.C), avec des fonctions d'utilité instantanée $\theta_{s,\sigma}$ ($s\in S^\theta$, $\sigma\in[s,\tau]$) données par :

(4.92) pour tous $s\in S^\theta$, $\sigma\in[s,\tau]$, $x \in \mathbb{R}_+$, $\theta_{s,\sigma}(x) \;=\; \lambda_{s,\sigma}\theta_\sigma(x)$.

De plus, la fonction objectif J est de classe nc à actualisation si, d'une part la fonction θ_* est de la forme (4.76), d'autre part les coefficients $\lambda_{s,\sigma}$

($s \epsilon S^{\theta}$, $\sigma \epsilon [s,\tau]$) sont liés aux taux d'actualisation, ρ et ρ_s ($s \epsilon S^{\theta}$), par la relation,

(4.93) pour tous $s \epsilon S^{\theta}$ et $\sigma \epsilon [s,\tau]$, (a) $\lambda_{s,\sigma} = (1 + \rho)^{a(s)} (1 + \rho_s)^{-a(s,\sigma)}$.

Ces relations, spécialement la relation (4.91), sont mentionnées ici pour fixer les idées relativement à la question téléologique envisagée au § 3.17, en particulier en ce qui concerne l'arbitraire qui marque le lien entre la fonction objectif de type comportemental $\check{Q}$ et la fonction objectif d'anticipation J, lien qui correspond à celui entre les relations (4.86) et (4.91), comme particularisation de celui entre les relations générales (3.73) et (3.74). Par exemple, la signification de la relation (4.93) est à éclaircir en termes d'actualisation.

§ 4.14 - EPILOGUE DU CHAPITRE 4

(A) Le petit modèle planétaire de croissance à long terme qui est présenté dans ce chapitre, ainsi que les spécifications et résultats numériques qui sont présentés au chapitre 5, sont l'aboutissement d'une expérimentation numérique, de plus trois ans, qui a accompagné et nourri la réflexion théorique ayant conduit aux chapitres 2 et 3 (alinéa 1.4.D) [4X]. En particulier, c'est au cours de cette expérimentation qu'ont été appréhendés les liens entre simulation, anticipation et optimisation qui sont formalisés au chapitre 3, plus précisément qu'on été formulées, d'abord les procédures d'exploitation, d'un modèle macroéconomique, par simulation (§ 3.14), puis la question téléologique sous forme constructive en termes de liens entre cette procédure et celle, usuelle, d'exploitation par optimisation intertemporelle (alinéa 3.16.F,G).

(B) En fait, ce n'est que progressivement, après de nombreux tâtonnements qu'a pu être défini le petit modèle présenté dans ce chapitre, avec les exigences de sa démarcation (§ 4.1), exigences qui consistent à prendre en compte les principaux aspects de la problématique des limites et du développement durable, ..., tout en étant suffisamment simple pour, d'une part pouvoir être spécifié et exploité numériquement avec des moyens, tant documentaires qu'informatiques, artisanaux [1i], d'autre part être susceptible de permettre une expérimentation numérique, significative (alinéa 4.1.F), concernant les divers problèmes mathématiques posés, dont ceux à optimisation multiples et ceux relatifs à la question téléologique (alinéa 1.3.C, § 3.15 à 3.17).

(C) Le propos méthodologique a réclamé de rendre la présentation du modèle indépendante de la littérature sur les modèles de l'effet de serre, bien qu'une des motivations du texte - et du modèle présenté - soit de faire apparaître, les insuffisances de ces modèles, même si c'est de façon constructive (alinéa 1.2.B). Parmi ces insuffisances, figure d'abord l'ignorance de la question téléologique, i.e. l'exploitation des modèles en cause par optimisation comportementale, comme si cette dernière ne posait pas de problème épistémologique (alinéas 1.1.B, 2.14.F, 3.16.D). Mais figure aussi le caractère exogène de l'évolution de la population [4Y] : c'est une avancée importante du petit modèle présenté que de supprimer cette rigidité, en considérant l'évolution de la population comme endogène (caractéristique 4.1.I1). Ces éléments, entre autres, et les problèmes qu'ils posent devraient être repris de façon moins monolithique, plus académique (alinéa 1.3.B), mais cela réclamerait un renforcement important du potentiel de travail sur le sujet.

(D) Par ailleurs, une partie importante de l'expérimentation a concerné un modèle plus complexe, bien qu'au même niveau d'agrégation (alinéas 4.1.H, 4.3.E, 4.5.G), modèle prenant en compte deux sous-ensembles représentant respectivement le monde développé et le monde en développement, en particulier deux sous-populations également endogènes, cela, selon diverses variantes, soit avec des systèmes productifs spécifiques en interaction, soit avec un seul système productif mondial (4Z). Les difficultés inhérentes à ce modèle, tant d'interprétation que d'exploitation numérique, et sa complexité supérieure ont conduit à lui substituer, vu le propos illustratif et la limitation des moyens disponibles, le modèle présenté, ne comportant qu'une seule population agrégée, lequel est moins ambitieux et plus proche des modèles usuels. Ce modèle à deux populations devrait aussi être repris, avec un potentiel de travail renforcé, en fonction des développements envisagés pour les modèles incluant une représentation du marché (alinéas 1.5.C et 3.18.B), laquelle semble difficile à éviter dans ce cas.

(E) Les perspectives de poursuite du travail envisagées ci-dessus (alinéas 4.14.C,D) sont à situer par rapport aux divers problèmes, à la fois mathématiques et épistémologiques, qu'un des propos de ce texte est de poser (§ 1.3, 2.16, 3.17), en particulier à ceux que pose l'expérimentation numérique qui est présentée au chapitre 5 (§ 5.11).

CHAPITRE 5 - **UN MODELE DE LA PROBLEMATIQUE DES LIMITES ET DU DEVELOPPEMENT DURABLE : (II) APPROCHE NUMERIQUE**

Afin d'illustrer, conjointement, le modèle générique du développement durable introduit au chapitre 4 et certaines des procédures d'exploitation envisagées au chapitre 3, on spécifie et on teste numériquement ce modèle, dans le présent chapitre. Après des préliminaires concernant l'articulation avec le chapitre 4 (§ 5.1), on récapitule formellement, de façon compacte, le système de contraintes définissant un plan viable (§ 5.2) et, en détail, celui définissant le protocole d'anticipation pérennisant (§ 5.3), puis on spécifie numériquement et on commente un jeu de données (§ 5.4 et 5.5). On présente ensuite, comme illustration de l'exploitation par simulation libre, un scénario aboutissant à une catastrophe par suite d'une croissance incontrôlée de la population et d'un contrôle insuffisant des émissions, puis un scénario conduisant à une stabilisation grâce à un contrôle convenable (§ 5.6 à 5.9). On présente enfin (§ 5.10) une approche numérique de la question téléologique s'appuyant sur les résultats précédents et on conclut (§ 5.11) par une revue des développements que suggèrent ces résultats, en particulier en vue de la poursuite de l'expérimentation numérique du modèle, parallèlement à la recherche théorique sur les problèmes posés.

§ 5.1 - <u>PRELIMINAIRES</u> : <u>ARTICULATION AVEC LE CHAPITRE 4</u>

(A) Le modèle étudié dans ce chapitre est une spécification du modèle générique introduit au chapitre 4, mais cela seulement pour l'essentiel, les vicissitudes de l'exploitation numérique ayant réclamé quelques retouches. L'objet de ce § préliminaire est d'expliciter ces retouches, en même temps qu'est récapitulé le cadre général du modèle, i.e. ses données de base et ses types de variables, avant d'en récapituler le système de contraintes, aux § 5.2 et 5.3. On souligne, à propos de cette présentation du modèle - en termes de données, variables, contraintes - qui se rapproche de la démarche usuelle, que les schémas généraux introduits dans ce texte ([4j]) ne sont pas ignorés pour autant, conformément au propos illustratif, ce qui fait qu'une tentative visant à lire ce chapitre 5 sans avoir pris connaissance, au moins dans leurs grandes lignes, du chapitre 4 - donc aussi des chapitres 2 et 3 dont il dépend - ne peut conduire qu'à des incompréhensions.

(B) Le **jeu de données de base** $\Delta = (S, \theta, E, D, U, g, f)$ du modèle en cause est du type introduit aux § 4.2 et 4.3 via un **jeu de données de base sous forme réduite** $\Delta°$ (alinéa 4.2.G), les fonctions de base Λ_s, O_s, Ω_s et Ψ_s ($s \in S$) étant des formes introduites aux § 4.5 à 4.7 (alinéas 4.5.F, 4.6.B,E, 4.7.C), mais cela avec les modifications qui sont détaillées dans la suite de ce § 5.1, en plus de celle, concernant la fonction de production, indiquée à l'alinéa 4.5.F : modification de la fonction de rupture ϕ (alinéa 5.1.C), modification des fonctions démograhique Ψ_s ($s \in S$) (alinéa 5.1.D) et du type de variable e_b (alinéa 5.1.E), ces deux dernières modifications permettant l'omission des fonctions de régularisation Z_s ($s \in S$). Par ailleurs, dans la récapitulation qui suit (§ 5.2 et 5.3), la donnée de base que constitue l'**arbre des aléas** S est supposée quelconque, bien que l'exploitation numérique soit ensuite faite dans le **cas déterministe** (alinéa 5.4.C).

(C) La fonction de ponction ψ est toujours définie par la relation (4.30), mais la fonction de rupture ϕ définie par la relation (4.31) est remplacée par la fonction $\underline{\phi}$ définie par la relation,

$$(5.1) \quad \text{pour tous } \varepsilon \in \,]0,+\infty) \text{ et } x \in \mathbf{R}, \quad \underline{\phi}(\varepsilon,x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x}{(x^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\Big).$$

On note que cette fonction $\underline{\phi}$ vérifie les conditions 4.4.C2 à 4.4.C4, en particulier la condition d'approximation (4.4.C4), mais plus la condition 4.4.D1 : elle constitue une approximation de la fonction ϕ considérée au chapitre 4. De plus, la fonction type de pénalisation κ (alinéa 4.4.E) est remplacée ici par son approximation $\underline{\kappa}$ définie - en termes de la fonction $\underline{\phi}$ ci-dessus - par la relation,

(5.2) pour tous $\gamma \in \mathbf{R}_+$, $\varepsilon \in \,]0,+\infty)$, $x \in \mathbf{R}$,

(a) $\underline{\kappa}(\gamma,\varepsilon,x) = \mathrm{EXP}[-\gamma(\varepsilon^2 + x^2)^{1/2}\underline{\phi}(\varepsilon,x)]$.

(D) Les fonctions démographiques Ψ_s, $(e_b,d_c) \longrightarrow \Psi_s(e_b,d_c)$, précédemment définies sur $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+$ (alinéa 4.7.C), sont remplacées par les fonctions $\underline{\Psi}_s$, $(e_{\mathbf{b}},e_n,d_c) \longrightarrow \underline{\Psi}_s(e_{\mathbf{b}},e_n,d_c)$, définies sur $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+$ par la relation,

(5.3) pour tous $s\in S$, $e_{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}_+$, $e_n \in \mathbf{R}_+$, $d_c \in \mathbf{R}_+$,

(a) $\underline{\Psi}_s(e_{\mathbf{b}},e_n,d_c) = \underline{\Psi}'_s(e_{\mathbf{b}},e_n)\Psi''_s(d_c)$, avec,

(b) $\underline{\Psi}'_s(e_{\mathbf{b}},e_n) = 1 + (\underline{\underline{d}}_w - 1)\underline{\phi}(\check{\nu}_{s,\mathbf{b}}\underline{\underline{e}}_{s,b}e_n^*,\ e_{\mathbf{b}} - \underline{\underline{e}}_{s,b}e_n)$,

(c) $\Psi''_s(d_c) = 1 - \psi\Big(\dfrac{d_c}{\underline{\underline{d}}_{s,c}}\Big)$ [alias relation (4.56c)],

où, d'une part e_n^*, $\underline{\underline{d}}_w$, $\underline{\underline{d}}_{s,c}$ $(s\in S)$ sont donnés comme aux alinéas 4.4.B et 4.7.C, d'autre part, pour chaque $s\in S$, $\check{\nu}_{s,\mathbf{b}}$ et $\underline{\underline{e}}_{s,b}$ sont respectivement un coefficient > 0 et un scalaire > 0 donnés, le second mesurant un niveau unitaire de connaissances (alinéa 4.3.A,C). Ce remplacement des fonctions démographiques Ψ'_s par les fonctions $\underline{\Psi}'_s$ $(s\in S)$ va être concomitant de celui du type de variable e_b par le type de variable $e_{\mathbf{b}}$ (alinéa 5.1.E ci-après).

(E) Les types de variables sont ceux repérés, comme au chapitre 4, par les postes des nomenclatures I, J, H (alinéas 4.2.A et 4.3.A-C), à ceci près qu'un poste (type de variable) supplémentaire, noté **b** ([5a]), est adjoint à la nomenclature I, le type de variable $e_{\mathbf{b}}$ représentant un **niveau absolu des connaissances**, mesuré par la grandeur QB, i.e. représentant le produit e_be_n d'une (ancienne) variable de type e_b (mesurée comme QB/NP ; alinéas 4.3.A,B) par un niveau de population e_n. Ainsi, une (ancienne) variable de type e_b dérive des variables de types $e_{\mathbf{b}}$ et e_n, comme leur quotient $e_{\mathbf{b}}/e_n$. Dans la suite de ce chapitre 5, la nomenclature ainsi étendue sera encore notée I.

Cette adjonction des variables de type $e_{\mathbf{b}}$ permet d'éviter les complications liées à la régularisation de la relation (4.20), lorsque d_w et e_n sont voisins de zéro, sous forme de la contrainte (4.6), via l'occurrence des fonction Z_s et leur propriété (4.19) (alinéa 4.2.E) : conjuguée avec le remplacement des fonctions Ψ_s par les fonctions $\underline{\Psi}_s$ (alinéa 5.1.D), elle (cette adjonction) permet le remplacement des contraintes (4.6) par les contraintes naturelles (4.20) [contraintes (5.16c), alinéa 5.3.B] qui s'expriment directement en termes des (nouvelles) variables de type $e_{\mathbf{b}}$.

Dans ce sens, on souligne que, au moins lorsque $\hat{\nu}_{s,b}$ est > 0 [condition (4.58b)], l'expression (5.3b) ci-dessus de $\underline{\Psi}'_s(e_b,e_n)$ s'obtient à partir de l'expression (4.56b) de $\Psi'_s(e_b)$ en réécrivant cette dernière, en vertu de la propriété d'homogénéité 4.4.C2 de la fonction de rupture ϕ (ou $\underline{\phi}$), sous la forme,

$$(5.4) \qquad \Psi'_s(e_b) \;=\; 1 + (\underline{\underline{d}}_w - 1)\phi(\check{\nu}_{s,b}e_b^{\#}e_n,\; e_be_n - \hat{\nu}_{s,b}e_b^{\#}e_n),$$

puis en remplaçant, au second membre, d'une part la variable e_n par la constante e_n^*, dans le terme $\check{\nu}_{s,b}e_b^{\#}e_n$, d'autre part $\hat{\nu}_{s,b}e_b^{\#}$ par $\underline{\underline{e}}_{s,b}$ et $\check{\nu}_{s,b}/\hat{\nu}_{s,b}$ par $\check{\nu}_{s,b}$.

(F) Il semble raisonnable d'admettre que l'incidence des modifications introduites ci-dessus sur les propriétés du modèle - en particulier sur ses plans viables (§ 5.2), au moins sur ceux où les variables de type e_n ne s'approchent pas trop de zéro - est faible, à condition que la nouvelle fonction de rupture soit convenablement calée par rapport à l'ancienne (alinéas 5.5.F). Mais, cela serait à étudier formellement.

§ 5.2 - CONTRAINTES DES PLANS VIABLES : (I) FORME COMPACTE

(A) On se propose, dans ce § et le suivant, de récapituler le système de contraintes définissant un **plan viable** pour la structure de contrôle à anticipation $\boldsymbol{\Sigma}(\Delta,\tau,B)$ associée au jeu de données de base Δ et à un **protocole d'anticipation décisif** B de profondeur τ (alinéas 4.9.C et 4.10.E). Conformément à l'alinéa 4.10.E, un tel protocole d'anticipation décisif $B = (B_s,\ s\epsilon S^\theta)$ est défini par un **jeu de données d'anticipation** ω, via un **protocole d'anticipation pérennisant** $\mathring{B} = (\mathring{B}_s,\ s\epsilon S^\theta)$ et une **fonction objectif d'anticipation** de classe nc à actualisation $J = (J_s,\ s\epsilon S^\theta)$ (alinéas 4.10.C,D). On commence, dans la suite du présent §, par présenter ces contraintes sous forme compacte, vectorielle, à partir du protocole pérennisant supposé donné en extension, puis, au § 5.3, on explicite la définition de ce dernier par des contraintes scalaires.

(B) Conformément à l'alinéa 3.15.B, la recherche d'un plan $\mathbf{p} = (\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$, relatif à cette structure $\boldsymbol{\Sigma}(\Delta,\tau,B)$, est équivalente à celle d'un couple $(\alpha,\ \mathbf{u})$, où α est un déploiement de ce plan et $\mathbf{u}$ son schéma de contrôle. Plus précisément, (B1) pour qu'un plan $\mathbf{p} = (\xi,\ \zeta,\ \mathbf{u})$, de schéma de contrôle $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s,\ s\epsilon S^\theta)$, soit viable, pour la structure de contrôle à anticipations $\boldsymbol{\Sigma}(\Delta,\tau,B)$, et soit issu de l'état initial e^*, il faut et il suffit qu'il existe, relativement au jeu de données de base Δ, un déploiement $\alpha = (\varepsilon_\sigma^s,\ \delta_\sigma^s,\ s\epsilon S^\theta,\ \sigma\epsilon[s,\tau])$ vérifiant les contraintes (5.6) à (5.9) ci-après qui constituent la **forme compacte** du système en cause :

$$(5.6) \qquad \text{pour tout } s\epsilon S^\theta, \quad (a) \quad \varepsilon_s^s = \xi_s, \quad (b) \quad \zeta_s = \delta_s^s \;;$$

$$(5.7) \qquad \text{pour tout } s\epsilon S^\theta,$$

$$(a) \quad (\varepsilon^s,\ \delta^s) \;\epsilon\; \mathring{B}_s(\varepsilon_s^s,\mathbf{u}_s),$$

$$(b) \quad J_s(\varepsilon^s,\delta^s) \;=\; \operatorname{Sup}\{\, J_s(\varepsilon,\delta) \mid (\varepsilon,\ \delta) \;\epsilon\; \mathring{B}_s(\varepsilon_s^s,\mathbf{u}_s) \,\} \;;$$

$$(5.8) \qquad \text{pour tous } s\epsilon S^\theta\backslash S_\theta \text{ et } \sigma\epsilon s+, \quad (a) \quad \varepsilon_\sigma^\sigma \;=\; \varepsilon_\sigma^s \;;$$

$$(5.9) \qquad \text{pour } s = s°, \quad (a) \quad \varepsilon_s^s \;=\; e^*.$$

Cette formulation ne fait que reprendre, dans le présent contexte, la propriété (3.60) assortie des relations (3.61) à (3.64) et (3.66) (alinéas 3.15.B,E). En particulier, les contraintes (3.62) et (3.64) résultent ici respectivement des contraintes (5.7a) et (5.8), puisque le protocole pérennisant est supposé conforme. Par ailleurs, le protocole d'exploitation Γ intervenant au § 3.15 est omis ici (considéré comme tautologique, non contraignant), car on privilégie l'exploitation par simulation libre (alinéa 3.14.B et condition 3.14.C1), relativement à la seule structure de contrôle $\underline{\mathbf{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$ (alinéas 5.2.E et 5.6.B).

(C) On note le découplage formel par lequel les composantes spontanées ξ_s et ζ_s ($s\in S^\theta$) du plan ne figurent que dans les contraintes (5.6), ce qui fait que le sous-système des contraintes (5.7) à (5.9), seulement relatives au couple $(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u})$, suffit à appréhender les plans en cause.

Ainsi, les composantes scalaires des multiplets $\boldsymbol{\alpha}$ et $\mathbf{u}$ constituent les **variables (scalaires) de base** du système de contraintes en cause. Ces composantes $\varepsilon^s_{\sigma,i}$, $\delta^s_{\sigma,j}$, $u_{s,\sigma,h}$, ($i\in I$, $j\in J$, $h\in H$, $s\in S^\theta$, $\sigma\in[s,\tau]$), toutes scalaires ≥ 0, apparaîssent aux seconds membres des relations (5.10) ci-après qui explicitent ces multiplets conformément à la définition des données extensives de base du modèle en cause (alinéa 4.2.B) :

$$(5.10)\quad (a)\quad \boldsymbol{\alpha} = ((\varepsilon^s_{\sigma,i},\ i\in I),\ (\delta^s_{\sigma,j},\ j\in J),\ s\in S^\theta,\ \sigma\in[s,\tau]),$$

$$(b)\quad \mathbf{u} = ((u_{s,\sigma,h},\ h\in H),\ s\in S^\theta,\ \sigma\in[s,\tau]).$$

(D) On note aussi que les contraintes d'optimisation (5.7b) font intervenir, en plus de ces variables de base, les **variables (scalaires) auxiliaires** que sont, pour chaque $s\in S^\theta$, les composantes des anticipations génériques (ε,δ) appartenant au domaine $\mathring{B}_s(\varepsilon^s_s,u_s)$. Ainsi, le système de contraintes en cause n'est pas "du premier ordre" par rapport aux variables de base, en ce sens qu'il ne comporte pas que des quantifications portant sur les indices de ces variables, mais comporte aussi des quantifications (universelles) portant sur les variables auxiliaires.

De plus, en pratique, l'optimisation globale qu'expriment les contraintes (5.7) est remplacée, pour chaque $s\in S^\theta$, par une **optimisation locale**, sur un voisinage de l'anticipation de base $(\varepsilon^s,\ \delta^s)$, voisinage dont les caractéristiques constituent d'autres variables auxiliaires (alinéa 5.2.F).

(E) Le système des contraintes (5.7) à (5.9) peut être envisagé, comme la structure de contrôle à anticipations $\underline{\mathbf{\Sigma}}(\Delta,\tau,B)$, dans le **mode à contrôles spécifiés**, qui correspond à la **simulation libre**, ou dans le **mode total**, qui correspond à la **simulation sous contraintes** (alinéas 3.12.B et 3.14.B,H). Vu les difficultés de l'exploitation par simulation sous contraintes (alinéas 3.14.I, 4.12.F, 5.6.C, 5.11.C), l'expérimentation numérique par simulation qui est présentée ne concerne que la simulation libre (alinéa 5.6.B). Les problèmes d'optimisation (5.7), pour les divers aléas $s\in S^\theta$, sont alors seulement couplés récursivement par les états initiaux ε^s_s des diverses anticipations, ce qui permet de déterminer un plan en résolvant successivement ces problèmes, dans l'ordre de l'arbre S (alinéa 3.14.K).

(F) La **condition d'univocité** B0$(\mathring{\mathbf{\Sigma}},e^\circ,\mathbf{u})$, requise par ces simulations (alinéas 3.13.B et 3.14.B,H), est vérifiée ici, via la propriété (3.56), en vertu du caractère univoque du protocole décisif B (alinéa 4.9.C et 4.10.E)). De plus, ce caractère univoque entraîne aussi l'**unicité** d'un déploiement $\boldsymbol{\alpha}$ vérifiant les contraintes (5.7) à (5.9), lorsque le schéma de contrôle $\mathbf{u}$ et l'état initial e^* sont donnés. En pratique, dans l'exploitation numérique, l'étude formelle de ce caractère univoque est tournée par l'utilisation d'un code d'optimisation qui fournit, pour chaque $s\in S^\theta$, une solution du problème d'optimisation (5.7), lorsque ε_s^s et $\mathbf{u}_s$ sont donnés. Dans l'expérimentation présentée, le code en question est l'un de ceux qu'offre le progiciel de calcul GAMS, en l'occurrence MINOS 5, lequel toutefois ne résoud pas exactement ce problème, puisqu'il ne fournit qu'un **optimum local** (alinéa 5.2.D) (5b).

§ 5.3 - <u>CONTRAINTES DES PLANS VIABLES</u> : <u>DETAIL DU PROTOCOLE PERENNISANT</u>

(A) Comme suite au § 5.2 et avec les mêmes données, on explicite, dans ce §, le système de contraintes définissant les **domaines** $\mathring{B}_s(e,\underline{u})$ $(s\epsilon S^\theta,\ e\epsilon E_s,\ \underline{u}\epsilon \mathbf{U}_s(\tau))$ du protocole d'anticipation pérennisant $\mathring{B} = (\mathring{B}_s,\ S^\theta)$, de profondeur τ, en cause (alinéa 5.2.A). Pour cela, dans toute la suite de ce §, on suppose donné un triplet $(s,e,\underline{u})$ tel que $s\epsilon S^\theta$, $e\epsilon E_s$, $\underline{u}\epsilon \mathbf{U}_s(\tau)$. Ainsi, par définition des espaces E_s, U_s, et $\mathbf{U}_s(\tau)$ (alinéas 3.3.B et 4.2.B), e et $\underline{u}$ sont des multiplets,

(5.12) (a) $e = (e_i,\ i\epsilon I)$, (b) $u = (\underline{u}_{\sigma,h},\ \sigma\epsilon[s,\tau],\ h\epsilon H)$,

dont les composantes e_i et $\underline{u}_{\sigma,h}$ $(i\epsilon I,\ \sigma\epsilon[s,\tau],\ h\epsilon H)$ sont des scalaires ≥ 0, celles du schéma de contrôle $\underline{u}$ en s étant supposée vérifier les conditions d'admissibilité (alinéa 5.3.G),

(5.13) pour tout $\sigma\epsilon[s,\tau])$, (a) $\underline{u}_{\sigma,q} \leq \underline{\underline{d}}_{\sigma,q}$, (b) $\underline{u}_{\sigma,r} \leq 1$.

De plus, le jeu de données d'anticipation ω (alinéa 4.10.E) est particularisé par les conditions :

(5.14) (a) $I_\# = \{k,m,\mathbf{b}\}$, (b) pour tout $i\epsilon I_\#$, $\underline{\underline{b}}_i = +\infty$.

Par ailleurs, les éléments du domaine $\mathring{B}_s(e,\underline{u})$ sont des anticipations $(\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\delta})$, après s et de profondeur τ, i.e. (alinéa 3.6.A) des multiplets,

(5.15) (a) $(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta}) = ((\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,i},\ i\epsilon I),\ (\boldsymbol{\delta}_{\sigma,j},\ j\epsilon J),\ \sigma\epsilon[s,\tau])$,

dont les composantes $\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,i}$ et $\boldsymbol{\delta}_{\sigma,j}$ $(i\epsilon I,\ j\epsilon J),\ \sigma\epsilon[s,\tau])$ sont des scalaires ≥ 0.

Dans ces conditions, les contraintes définissant le **domaine** $\mathring{B}_s(e,\underline{u})$ sont celles présentées aux alinéas 5.3.B-E ci-après dans l'ordre des définitions du chapitre 4 (alinéas 4.2.C,D et 4.10.B) : d'abord équations d'évolution et contraintes d'admissibilité de base, qui expriment le caractère conforme du protocole, puis conditions initiales et conditions finales de l'anticipation. Ces contraintes sont ensuite commentées aux alinéas 5.3.F-I.

(B) <u>Equations d'évolution</u> :

(5.16) pour tout $\sigma\epsilon[s,\tau])$ tel que $\sigma \neq s$,

(a) $\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,k} = (1 - \alpha_{\sigma-,k})\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma-,k} + \boldsymbol{\delta}_{\sigma-,k}$,

(b) $\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,m} = (1 - \alpha_{\sigma-,m})\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma-,m} + \boldsymbol{\delta}_{\sigma-,m}$,

(c) $\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,\mathbf{b}} = (1 - \alpha_{\sigma-,\mathbf{b}})\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma-,\mathbf{b}} + \boldsymbol{\delta}_{\sigma-,r}\boldsymbol{\delta}_{\sigma-,a}$,

(d) $\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,n} = \boldsymbol{\delta}_{\sigma-,w}\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma-,n}$

(e) $\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,p} = \boldsymbol{\delta}_{\sigma-,q}$.

(C) <u>Contraintes d'admissibilité</u> :

(5.17) pour tout $\sigma\epsilon[s,\tau])$,

(a) $\boldsymbol{\delta}_{\sigma,k} + \boldsymbol{\delta}_{\sigma,c}\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,n} \leq \boldsymbol{\delta}_{\sigma,v}\boldsymbol{\delta}_{\sigma,a}$,

(b) $\boldsymbol{\delta}_{\sigma,a} = \Lambda_s^o(\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,k},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,n})\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,k}\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma,n}$,

(c) $\delta_{\sigma,a} \le \underline{\underline{d}}_a$, (d) $\varepsilon_{\sigma,k} \ge \nu_{\sigma,a}\varepsilon_{\sigma,n}$,

(e) $\delta_{\sigma,m} = O_\sigma(\varepsilon_{\sigma,p}, \delta_{\sigma,q})\delta_{\sigma,a}$,

(f) $\delta_{\sigma,v} = (1 - \delta_{\sigma,q})(1 - \delta_{\sigma,r})\Omega_\sigma(\varepsilon_{\sigma,m})$,

(g) $\delta_{\sigma,w} = \underline{\Psi}_\sigma(\varepsilon_{\sigma,b}, \varepsilon_{\sigma,n}, \delta_{\sigma,c})$;

(5.18) pour tout $\sigma\epsilon[s,\tau]$),

(a) $\delta_{\sigma,q} \le \underline{\underline{d}}_{\sigma,q}$, (b) $\delta_{\sigma,r} \le 1$,

(c) $\underline{u}_{\sigma,q} \le \delta_{\sigma,q}$, (d) $\underline{u}_{\sigma,r} \le \delta_{\sigma,r}$.

(D) Conditions initiales de l'anticipation :

(5.19) pour tout $i\epsilon I$, $\varepsilon_{s,i} = e_i$;

(5.20) pour $s = s°$, $\delta_{s,c} \ge d^*_c$.

(E) Conditions finales de l'anticipation :

(5.21) pour tout $s\epsilon S^\theta$ et tout $\sigma\epsilon[s,\tau]^*$,

(a) $\delta_{\sigma,k} \ge \alpha_{\sigma,k}\varepsilon_{\sigma,k} - \underline{b}_k$,

(b) $\delta_{\sigma,m} \ge \alpha_{\sigma,m}\varepsilon_{\sigma,m} - \underline{b}_m$,

(c) $\delta_{\sigma,r}\delta_{\sigma,a} \ge \alpha_{\sigma,b}\varepsilon_{\sigma,b} - \underline{b}_b$.

(F) Les équations d'évolution (5.16) et les contraintes d'admissibilité (5.17) expriment, eu égard au caractère conforme du protocole d'anticipation en cause (alinéa 4.10.B), les définitions des données fonctionnelles de base introduites au § 4.2 (alinéas 4.2.C,D), cela compte tenu des modifications indiquées aux alinéas 4.5.F et 5.1.D,E : remplacement de la contrainte (4.10) par le système (4.44), auquel correspondent ici les contraintes (5.17b,c,d) ; suppression des fonctions de régularisation Z_σ ($\sigma\epsilon[s,\tau]$), remplacement des équations (4.6) par les équations (4.20), i.e. ici par les équations (5.16c), remplacement des fonctions de base Ψ_σ par les fonctions $\underline{\Psi}_\sigma$ ($\sigma\epsilon[s,\tau]$).

(G) Les contraintes (5.18) correspondent au lien (4.14) entre contrôle et dynamique spontanée (alinéas 4.2.D et 4.3.C), la limitation plus stricte (5.18a) - sans doute contingente et qui réclame la condition (5.13a) sur la donnée $\underline{u}$ - visant seulement, vu la forme (4.48) des fonctions d'émission O_σ ($\sigma\epsilon[s,\tau]$), à éviter que soit atteinte la plage de constance de la fonction type ψ.

(H) Les conditions initiales (de l'anticipation) (5.19) expriment, en termes des composantes scalaires, que l'anticipation est issue de l'état e, conformément à la relation (3.22.b1) de définition d'un protocole d'anticipation (alinéa 3.7.A). La condition (5.20) est plus contingente que les conditions précédentes et que les conditions suivantes, vu qu'elle exprime seulement un comportement, une exigence, de stabilité de la consommation à la période initiale. Enfin, les conditions finales de l'anticipation (5.21) correspondent aux conditions de stationnarité (4.70a), compte tenu de la particularisation (5.14) du jeu de données d'anticipations ω. Par exemple, les contraintes (5.21a) coïncident avec les contraintes (4.72a) lorsque $\underline{b}_k = 0$.

(I) Dans le jeu de données qui est spécifié numériquement au § 5.4, les contraintes ci-dessus sont notablement simplifiées, en ce sens que la dépendance vis-à-vis des aléas $s\epsilon S$ est ignorée pour la plupart des données, de base ou d'anticipation, en cause (alinéas 5.4.A,C). Cette simplification n'a pas été faite dans la présentation ci-dessus, car elle est circonstancielle et n'est acceptable, cohérente, que parce que l'expérimentation numérique est faite dans le cas déterministe (alinéas 5.4.C et 5.11.F)). De plus, la marque de la dépendance en question peut faciliter l'interprétation des contraintes, en particulier en ce qui concerne le déroulement temporel (alinéa 4.3.D).

§ 5.4 - JEU DE DONNEES : (I) SPECIFICATIONS NUMERIQUES

(A) Dans ce § 5.4 et le suivant, on spécifie, dans le cadre formel précédemment défini (§ 5.1 et alinéa 5.2.A), l'essentiel des données correspondant aux déterminations présentées aux § 5.6 à 5.9. Plus précisément : le régime de référence (e^*,d^*), les données de base et les données d'anticipation. Conformément au propos illustratif (alinéas 4.1.F, 4.5.G, 4.6.A, 4.8.G, 4.9.A), ces spécifications ne sont que des ordres de grandeur destinés à fixer les idées et à permettre d'accompagner par une expérimentation numérique la réflexion formelle sur les divers problèmes posés. Les données sont d'abord présentées ci-après de façon brute (alinéas 5.4.C-G), puis commentées au § 5.5, celles qui sont omises étant à zéro.

(B) Les **unités de mesure** concernant les trois **grandeurs de base** en cause (alinéa 4.3.B) sont indiquées par le tableau suivant (avec kilo = 10^3, giga = 10^9, kilo.giga = 10^{12}) :

quantité du bien produit (QB),	kilo.giga dollars de référence (KG\$) ([5c]),
quantité de polluants émis (QP),	giga tonnes d'équivalent carbone (Gt),
niveau de la population (NP),	giga individus (Gh).

La **période élémentaire**, par rapport à laquelle sont mesurés les flux (alinéas 2.1.B et 4.3.B), est de **10 ans**.

(C) Déroulement temporel et arbre d'aléas

On se place dans le **cas déterministe** où **S = T** (alinéa 2.1.F), ce qui permet de simplifier les données au maximum en ignorant leur dépendance vis-à-vis des aléas $s \in S$, sauf en ce qui concerne les fonctions de productivité Λ^o_s $(s \in S)$ et les fonctions objectif locales d'anticipation J_s $(s \in S^\theta)$. Ainsi, on note α_i au lieu de $\alpha_{s,i}$ $(i \in I)$, $\hat{\nu}_j$ au lieu de $\hat{\nu}_{s,j}$ $(j \in J)$, etc.

Le nombre de périodes élémentaires (alinéas 2.1.B,E, 3.2.A, 4.2.A) est de 21 :

(5.23) (a) $\theta = 21$, (b) $T = 30$.

(D) Régime de référence (alinéas 4.4.B et 5.5.A,B) :

(5.24) (a) $e^*_k = 128$ KG\$, (b) $e^*_m = 720$ Gt,

(c) $e^*_b = 0$ KG\$/Gh, (d) $e^*_n = 5{,}5$ Gh ;

(5.25) (a) $d^*_a = 260$ KG\$, (b) $d^*_k = 64$ KG\$,

(c) $d^*_c = 35$ KG\$/Gh, (d) $d^*_m = 70$ Gt,

(e) $d^*_v = 1$, (f) $d^*_w = 1{,}20$.

(E) Données de base : système productif et environnement.

Coefficients de décroissance α_i (alinéas 4.2.C,E, 4.3.D, 5.3.B, 5.5.B,C) :

(5.26) (a) $\alpha_k = 0{,}50$, (b) $\alpha_m = \cancel{0{,}03}$ 0,05, (c) $\alpha_b = 0{,}50$.

Fonction de productivité Λ_s° ($s \in S$) (alinéas 4.2.D,E, 4.5.B,F, 5.3.C, 5.5.C) :

(5.27) (a) $\hat{\nu}_a = 0{,}10$, (b) $\beta = 0{,}25$, (c) $\check{\nu}_k = 10^{-4}$, (d) $\check{\nu}_n = 10^{-4}$,

(e) $\underline{\underline{d}}_a = 5d_a^*$, (f) $\nu_a = 0{,}80$.

Fonction d'émission O (alinéas 4.2.D,E, 4.6.B, 5.3.C, 5.5.E) :

(5.28) (a) $\nu_p = 0{,}400$, (b) $\nu_q = 0{,}275$, (c) $\underline{\underline{d}}_q = 0{,}25$, (d) $\underline{\underline{d}}_r = 0{,}25$.

Fonction de dommages Ω (alinéas 4.2.D,E et 4.6.E, 5.3.C, 5.5.D) :

(5.29) (a) $\hat{\nu}_m = 2$, (b) $\check{\nu}_m = 0{,}375$.

(F) Données de base : fonctions démographiques.

Fonction démographique $\underline{\Psi}'$ (alinéas 4.2.D,E, 4.7.C, 5.1.D, 5.5.F) :

(5.30) (a) $\underline{\underline{d}}_w = d_w^*$, (b) $\underline{\underline{e}}_b = 5$ KG\$/Gh, (c) $\check{\nu}_b = 0{,}1818$.

Fonction démographique $\underline{\Psi}''$ (alinéas 4.2.D,E, 4.7.C, 5.1.D, 5.5.F) :

(5.31) (a) $\underline{\underline{d}}_c = 34$ KG\$/Gh.

(G) Données d'anticipation.

Profondeur d'anticipation (alinéa 5.5.G) :

(5.32) $\tau = 1$ à 4.

Conditions finales (alinéas 4.10.B, 5.3.A,E,H, 5.5.G) :

(5.33) (a) $\underline{b}_k = 0$, (b) $\underline{b}_m = +\infty$, (c) $\underline{b}_b = +\infty$.

La fonction objectif d'anticipation $J = (J_s,\ s \in S^\theta)$ est de classe nc à actualisation (alinéas 4.10.D, 5.2.A, 5.5.G) et la condition (4.73) qui la définit s'écrit ici, i.e. dans le cas déterministe (alinéa 5.4.C) ([5d]),

(5.34) pour tous $s \in S^\theta$ et tout $(\varepsilon,\ \delta) \in A_s(\Delta, \tau)$,

$$\text{(a)} \quad J_s(\varepsilon,\ \delta) = \sum_{\sigma \in [s,\tau]^\#} \varepsilon_{\sigma,n}\theta_{s,\sigma}\left(\frac{\delta_{\sigma,c}}{d_c^\#}\right)\underline{\kappa}\left(\gamma^J,\ \check{\nu}^J,\ \frac{\delta_{\sigma+1,c} - \delta_{\sigma,c}}{d_c^\#}\right)$$

$$+ \sum_{\sigma \in [s,\tau]^*} \varepsilon_{\sigma,n}\theta_{s,\sigma}\left(\frac{\delta_{\sigma,c}}{d_c^\#}\right), \qquad \text{avec,}$$

(b) pour tous $\sigma \in [s,\tau]$ et $x \in \mathbf{R}_+$, (c) $\theta_{s,\sigma}(x) = (1 + \rho)^{s-\sigma}(\hat{\nu}^J + x)^\mu$,

la fonction type $\underline{\kappa}$ étant celle définie par la relation (5.2) et les données retenues étant spécifiées par :

(5.35) (a) $\gamma^J = 1$, (b) $\check{\nu}^J = 0{,}032$, (c) $d_c^\# = 20$ KG\$/Gh,

(d) $\rho = 0$, (e) $\mu = 1/2$, (f) $\hat{\nu}^J = \check{\nu}^J$.

(H) Le jeu de données de base Δ peut être entièrement spécifié en conjuguant les définition formelles du § 4.2 avec les spécifications numériques des alinéas 5.4.B,C,E,F qui fournissent le jeu de données de base sous forme réduite Δ° (alinéas 4.2.G et 5.1.B). De même, le jeu de données d'anticipation spécifié aux alinéas 5.3.A et 5.4.G définit entièrement, en pratique (alinéa 5.2.F), le protocole d'anticipation décisif B en cause (alinéa 4.10.E).

§ 5.5 - JEU DE DONNEES : (II) COMMENTAIRES

(A) Régime de référence (alinéas 5.4.D). Les évaluations de départ sont celles de d_a^*, d_k^*, d_c^*, e_n^*, d_w^*, qui constituent les données agrégées de l'économie mondiale au milieu des années 90 et peuvent être tirées des rapports de la Banque Mondiale ([5e]). On note qu'elles vérifient la condition de calage (4.23), si d_v^* vaut 1 conformément à (5.25e). L'évaluation e_k^* du capital est déduite des précédentes, de celle (5.26a) du coefficient de dépréciation α_k et de l'hypothèse que le taux de croissance du capital dans le régime de référence, $d_k^*/e_k^* - \alpha_k$, est nul, hypothèse de convenance ([5n]) qui n'est pas déraisonnable, au niveau très agrégé du modèle, vu les destructions massives de capital qui ont touché plusieurs continents pendant la période en cause ([5g]).

(B) Effet de serre (alinéas 5.4.D,E). Les évaluations indiquées des niveaux e_m^* et d_m^*, ainsi que celle du coefficient α_m, correspondent à l'option (d'interprétation) selon laquelle les variables de types e_m et d_m représentent respectivement le niveau absolu des gaz à effet de serre et le niveau brut des émissions ([5h]). On note que ces évaluations sont telles que $\alpha_m e_m^* < d_m^*$ (en l'occurrence $d_m^* - \alpha_m e_m^* = 34$ Gt) ce qui signifie, conformément à l'équation d'évolution (4.5), que le niveau e_m augmente dans le régime de référence (c'est l'origine de l'effet de serre !).

En fait, dans les travaux cités sur l'effet de serre, c'est une autre option qui est utilisée, option selon laquelle la variable e_m représente la différence entre le niveau absolu de l'option précédente et un niveau d'équilibre "préindustriel" e_m^∞, cela avec la même équation d'évolution (4.5) ([5i]). Ainsi, le coefficient d'absorption α_m indiqué n'est pas celui, $\hat{\alpha}_m$, qui correspond à cette autre option. Le premier a été calculé en fonction du second de façon à ce que soit satisfaite l'égalité (5.37) ci-après, sous les conditions (5.24b), (5.25d), (5.38) ([5j]), égalité qui exprime que le niveau des gaz à effet de serre à la date suivant celle du régime de référence est le même dans les deux options :

(5.37) $(1 - \alpha_m)e_m^* + d_m^* = e_m^\infty + (1 - \hat{\alpha}_m)(e_m^* - e_m^\infty) + \beta_m d_m^*$, avec,

(5.38) (a) $e_m^\infty = 590$ Gt, (b) $\hat{\alpha}_m = 1/12$, (c) $\beta_m = 0{,}64$.

On a privilégié ici la première option car elle est conceptuellement plus claire, en particulier grâce à la prise en compte de l'absorption via un seul coefficient α_m au lieu de deux ($\hat{\alpha}_m$ et β_m) dans l'autre option.

(C) fonction de productivité (alinéa 5.4.E). Les coefficients $\hat{\nu}_a$ et β des fonctions de productivité Λ_g^o ($s \epsilon S$) (alinéas 4.5.B,F et 5.3.F) sont, en gros, ceux du modèle DICE ([5k]) et les coefficients de régularisation $\check{\nu}_k$ et $\check{\nu}_n$ sont petits (alinéa 4.5.C). Les spécifications (5.27e) de la borne supérieure $\underline{\underline{d}}_a$ et (5.27f) de la borne inférieures ν_a du rapport capital sur travail ont été retenues, après divers essais ([5m]), par convenance ([5n]), car l'expression de la problématique des limites qu'elles constituent permet de faire apparaître l'influence du contrôle (alinéa 5.6.A) : un facteur nettement inférieur à 5 dans la définition (5.27e) de la borne $\underline{\underline{d}}_a$, par exemple le facteur 3, affaiblit trop l'interaction entre les dommages dus aux émissions et la limitation de la production, interaction qui engendre, à long terme, la décroissance misérable de la population en l'absence de contrôle (propriété 5.7.B1) ; un rapport ν_a trop faible, voire nul, se traduit, à long terme, par une augmentation parasite de la population concomitante de la baisse excessive du capital par tête ; inversement, un rapport ν_a trop élevé, i.e. peu inférieur à 1 ou supérieur, entraine, à moyen terme, une impossibilité (dans le calcul) de l'anticipation, à cause de l'inertie de croissance de la population.

(D) <u>fonction de dommages</u> (alinéa 5.4.E). Le coefficient $\breve{\nu}_m$ fourni par la relation (5.29b) caractérise l'unique fonction de dommages Ω de la forme (4.51) - avec ici $\underline{\phi}$ mis pour ϕ (alinéa 5.1.C) et lorsque le coefficient $\hat{\nu}_m$ est fourni par la relation (5.29a) - qui vérifie la condition,

(5.39) (a) $\Omega(\hat{\rho}_m e_m^*) = (1 - \breve{\rho}_m)d_v^*$, avec (b) $\hat{\rho}_m = 1{,}50$ et (c) $\breve{\rho}_m = 0{,}10$,

laquelle complète les condition de calage résultant de la forme (4.51),

(5.40) (a) $\Omega(e_m^*) = d_v^*$ et (b) $\Omega(\hat{\nu}_m e_m^*) = d_v^*/2$.

Plus généralement, la formule,

(5.41) (a) $\breve{\nu}_m = 2[\breve{\rho}_m(1 - \breve{\rho}_m)]^{1/2}[(\hat{\nu}_m - \hat{\rho}_m)/(1 - 2\breve{\rho}_m)]$, avec

(b) $\hat{\rho}_m < \hat{\nu}_m$ et (c) $0 < \breve{\rho}_m < 1/2$,

fournit - lorsque $\hat{\nu}_m$, $\hat{\rho}_m$ et $\breve{\rho}_m$ sont donnés vérifiant (5.41b,c) - l'unique valeur de $\breve{\nu}_m$ pour laquelle la fonction Ω, de la forme (4.51), vérifie la condition (5.39a). En particulier, la valeur (5.29b) de $\breve{\nu}_m$ résulte de cette formule, lorsque $\hat{\nu}_m$, $\hat{\rho}_m$ et $\breve{\rho}_m$ sont donnés par (5.29a) et (5.39b,c). Ainsi, les valeurs (5.29) des coefficients $\hat{\nu}_m$ et $\breve{\nu}_m$ expriment, via les conditions (5.39) et (5.40b), comment est préjudiciable le doublement de la teneur en polluants correspondant à la valeur 2 de $\hat{\nu}_m$ ([5o]), les spécifications (5.39b,c) de $\hat{\rho}_m$ et $\breve{\rho}_m$ étant aussi (alinéa 5.4.D), dans ce cadre, de convenance ([5n]), en ce sens qu'elles sont cohérentes avec la borne supérieure $\underline{\underline{d}}_a$ de la production (alinéa 5.5.C).

(E) <u>fonction d'émission</u> (alinéa 5.4.E). les coefficients ν_p et ν_q ont été déterminés afin qu'une stabilisation à long terme des émissions soit possible. Cette stabilisation est exprimée par la condition,

(5.42) $$\frac{d_m^*}{d_a^*}\nu_p\nu_q\underline{\underline{d}}_a < \alpha_m\hat{\nu}_m e_m^*,$$

qui signifie, vu la forme (4.48) de la fonction d'émission O, que le niveau minimum des émissions (atteint pour les ponctions maximum $e_p = e_q = \underline{\underline{d}}_q$) lorsque la production est à son niveau maximum $\underline{\underline{d}}_a$ (membre de gauche) est strictement inférieur à l'absorption spontanée correspondant au niveau $\hat{\nu}_m e_m^*$ de basculement des dommages considéré comme plausible à long terme (membre de droite). Cela étant, les spécifications (5.28) des coefficients ν_p et ν_q sont telles que : d'une part leur produit $\nu_p\nu_q = (\hat{\nu}_q^\#)^2$ vaut 0,11, soit environ 10% de moins que son majorant $\alpha_m\hat{\nu}_m(e_m^*/d_m^*)(d_a^*/\underline{\underline{d}}_a)$ stipulé par la condition (5.42), lequel vaut 0,123 ; d'autre part on a $\nu_p = \hat{\nu}_q^\#\gamma$ et $\nu_q = \hat{\nu}_q^\#/\gamma$, avec $\gamma = 1{,}2$, ce qui entraîne que $\nu_q < \nu_p$, conformément à la condition (4.49c) (alinéas 4.6.B,D). Cette condition (5.42) et les évaluations correspondantes des coefficients ν_p et ν_q, via celle des coefficients $\hat{\nu}_q^\#$ et γ, sont évidemment contingentes, ainsi que celle (5.28c) de la ponction maximum $\underline{\underline{d}}_q$: elles ont l'avantage de la netteté et celui, de convenance ([5n]), de fournir des cheminements faisant apparaître la stabilisation voulue (propriété 5.8.B1).

(F) <u>Fonctions démographiques</u> (alinéa 5.4.F). La démarche conduisant aux spécifications (5.30) et (5.31) correspond à l'option (4.68a) (alinéa 4.7.E), mais comme une variante adaptée à la spécification (5.1) de la fonction de rupture $\underline{\phi}$, variante où $\underline{\underline{d}}_w = d_w^*$ et $d_c^* > \underline{\underline{d}}_c$, mais où la condition de calage (4.65), adaptée à la fonction de base $\underline{\Psi}$, n'est vérifiée qu'approximativement. Avant d'indiquer cette démarche, on souligne, comme en ce qui concerne les précédentes (alinéas 5.5.A-E), son caractère contingent et de convenance ([5n]).

Le niveau (5.30b) de développement par tête $\underline{\underline{e}}_b$ est déterminé par la condition,

$$(5.43) \quad (a) \quad \underline{\underline{e}}_b = \hat{\rho}_b m d_c^*, \quad \text{avec} \quad (b) \quad \hat{\rho}_b = 0{,}071 \quad \text{et} \quad (c) \quad m = 2,$$

où $\hat{\rho}_b$ représente une fraction de la consommation par tête consacrée à la promotion du "contrôle des naissances", tandis que m est le nombre de périodes élémentaires que dure cette promotion. Ainsi, cette relation signifie que le niveau $\underline{\underline{e}}_b$ du savoir par tête requis pour que le taux de croissance de la population soit divisé par deux équivaut à 7 % de la consommation par tête de référence pendant deux périodes élémentaires (i.e. 20 ans) ([5p]). La valeur (5.30c) du coefficient d'étalement $\check{\nu}_b$, qui détermine le niveau absolu de développement e_b requis pour que le taux de croissance soit (ici pratiquement) nul (alinéa 4.8.D), est telle que, pour la population de référence, ce niveau est de l'ordre de deux fois le niveau absolu de référence $\underline{\underline{e}}_b e_n^* = 27{,}5$ KG$ ([5q]). De plus, pour cette valeur $\check{\nu}_b = 0{,}1818$, la condition de calage (4.65), adaptée à la fonction de base $\underline{\Psi}$, est approximativement vérifiée, car, d'une part $\Psi''_{\mathrm{g}\circ}(d_c^*) = 1$, d'après la condition (4.68a), d'autre part $\underline{\Psi}'_{\mathrm{g}\circ}(0,e_n^*) = 1 + (\underline{\underline{d}}_w - 1)\underline{\phi}(\check{\nu}_b, -1) = 1{,}1984$, ce qui fait que $\underline{\Psi}'_{\mathrm{g}\circ}(0,e_n^*)\Psi''_{\mathrm{g}\circ}(d_c^*)$ diffère de $d_w^* = 1{,}2$ de moins de 0,2 %.

Enfin, en ce qui concerne l'évaluation (5.31) du seuil de survie $\underline{\underline{d}}_c$, le point important réside en ce que ce seuil, tout en étant inférieur à la valeur de référence d_c^*, en est peu différent. Cette évaluation est une incidence de la forte hétérogénéité de la population mondiale, hétérogénéité qui n'est pas prise en compte explicitement dans le modèle (alinéa 4.14.D). Par exemple, on peut considérer que la population en cause est une "moyenne" entre une population riche, celle du Nord, de $e'_n = 1{,}5$ Gh avec une consommation unitaire $d'_c = 10$ KG$/Gh, et une population pauvre, celle du Sud, de $e''_n = 4$ Gh avec une consommation unitaire $d''_c = 1$ KG$/Gh. Dans ces conditions, la diminution absolue de $0{,}1 = d_c^* - \underline{\underline{d}}_c$ de la consommation moyenne entraine une diminution du même ordre de la consommation des pauvres, soit une diminution relative de l'ordre de 10%, ce qui compte tenu de leur situation déja précaire justifie une décroissance misérable de la population pauvre, donc de la population totale.

(G) <u>Données d'anticipation</u> (alinéas 5.4.G). La profondeur d'anticipation $\tau = 1$ correspond à une hypothèse de myopie des acteurs décentralisés dans leur appréhension de l'avenir que représentent les anticipations. Cette hypothèse est faite par convenance ([5n]), en fonction de la finalité de l'exercice qui consiste à faire apparaître une catastrophe à long terme en l'absence de contrôle des instances (alinéa 5.6.A). Les variantes $\tau = 2$ et $\tau = 4$ ont aussi été essayées, mais fournissent, comme il est raisonnable, une catastrophe moins nette (alinéa 5.11.B). Les conditions finales d'anticipation (5.33) correspondent à l'exigence minimale discutée à l'alinéa 4.11.C et sont ainsi cohérentes avec l'hypothèse précédente de myopie. Enfin, en ce qui concerne la fonction objectif d'anticipation J, les spécifications (5.35) vont au plus simple, le taux d'actualisation étant mis à zéro [relation (5.35d)] pour ne pas accentuer la myopie précédente.

§ 5.6 - SYSTEMATIQUE DES SIMULATIONS

(A) Le propos des § 5.7 et 5.8 ci-après est de "montrer" au lecteur, de lui permettre d'examiner en détail, les cheminements correspondant aux deux scénarios annoncés : au § 5.7, le cheminement aboutissant à une catastrophe par suite d'une croissance incontrôlée de la population et d'un contrôle insuffisant des émissions ; puis, au § 5.8, le cheminement conduisant à une stabilisation grâce à un contrôle convenable.

(B) Ces **cheminements** sont obtenus par **simulation libre** relativement à la structure de contrôle - primaire (condition 3.14.C1) - à anticipations $\mathring{\boldsymbol{\Sigma}} = \underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\Delta, \tau, B)$, avec $\tau = 1$, associée au jeu de données de base Δ et au protocole d'anticipation décisif B qui sont spécifiés aux § 5.4 et 5.5 (alinéas 5.2.E,F et 5.4.H).

En vertu de l'option déterministe, plans et cheminements, relatifs à la structure $\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}$, coïncident (alinéas 2.4.C et 5.4.C). Ainsi, les cheminements en cause coïncident avec les **plans viables** $v(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \mathbf{o})$ et $v(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \hat{\mathbf{u}})$ engendrés par deux schémas de contrôle, **o** et **û**, à partir de l'état initial e^* (alinéa 3.13.B), les conditions d'univocité $B0(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \mathbf{o})$ et $B0(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \hat{\mathbf{u}})$ requises résultant de ce que le protocole d'anticipation décisif B est univoque par construction (alinéas 4.10.E et 5.2.F), cela sous réserve, via la propriété (3.56), de la vérification des conditions de viabilité ponctuelle $C0(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \mathbf{o})$ et $C0(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \hat{\mathbf{u}})$, vérification, ici pratique, résultant de l'exploitation numérique, récursivement, via la résolution successive des divers problèmes (5.7).

En fait, ce sont les **déploiements** des plans $v(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \mathbf{o})$ et $v(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \hat{\mathbf{u}})$ qui sont présentés dans les tableaux des § 5.7 et 5.8, déploiements qui sont, comme ces plans, déterminés de façon unique par les schémas de contrôle **o** et **û** correspondants (alinéas 5.2.B,F).

(C) Les schémas de contrôle retenus, **o** et **û**, engendrant les plans $v(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \mathbf{o})$ et $v(\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}, e^*, \hat{\mathbf{u}})$, sont indiqués dans les tableaux des § 5.7 et 5.8 conformément aux alinéas 5.6.E-G ci-après. Le schéma **o** est le schéma identiquement nul, qui correspond au cas sans contrôle, vu la forme (5.18c,d) des contraintes stipulant l'action du contrôle. Le schéma **û** découle par contre d'une détermination préalable qui a été faite par une procédure de tâtonnements empiriques (§ 5.9), à défaut de pouvoir résoudre le problème à optimisations multiples que pose la procédure de simulation sous contraintes (alinéas 3.14.H,I), procédure qui réclamerait d'introduire un protocole de resserrement d'exploitation représentant la stabilisation à long terme voulue, ce qu'on évite ici (alinéa 5.11.C).

(D) Conformément au propos strictement méthodologique et illustratif du modèle (§ 1.2, alinéas 4.1.F et 5.1.A), on ne cherche pas ici à exploiter les résultats présentés pour en tirer des conclusions en langage décisionnel, i.e. sous une forme accessible, dans le contexte du débat politique sur le développement durable, à un lecteur non averti de l'appareil conceptuel du modèle, lui permettant ainsi d'avoir une idée de ces résultats sans examiner les tableaux de chiffres, des § 5.7 et 5.8, qui en fournissent le détail, dans le cadre de cet appareil. De même, une tentative visant à lire les tableaux de résultats des § 5.7 et 5.8 sans avoir pris connaissance au préalable, au moins dans leurs aspects conceptuels, des chapitres 2 à 4 et des § 5.1 à 5.4, ne peut conduire qu'à des incompréhensions ([5s]). On commence donc, dans le présent § 5.6, par présenter, dans ce cadre, le formalisme, le mode d'emploi, de ces tableaux.

(E) Chacun des déploiements α en cause (alinéa 5.6.B) est présenté par deux tableaux, le "tableau 1 : variables d'état" et le "tableau 2 : variables de dynamique", qui, occupant chacun près de deux pages, fournissent les valeurs des variables scalaires de base, en l'occurrence les composantes du multiplet α explicitées par la relation (5.10a) (alinéa 5.2.C). En outre, le tableau 1 fournit aussi les valeurs des variables dérivées $\Omega(\varepsilon^s_{\sigma,m})$, $\underline{\Psi}'(\varepsilon^s_{\sigma,b},\varepsilon^s_{\sigma,n})$, noté $\underline{\underline{\delta}}^s_{\sigma,w}$, $\varepsilon^s_{s,k}/\varepsilon^s_{s,n}$ et $J_s(\varepsilon^s,\delta^s)$ ($s\in S^\theta$, $\sigma\in[s,\tau]$), ainsi que celles des composantes des schémas de contrôle explicitées par la relation (5.10b).

(F) Les **unités** avec lesquelles sont mesurées les variables fournies par les tableaux sont celles qui sont indiquées à l'alinéa 5.4.B, en ce qui concerne les grandeurs de base, ou celles qui en sont dérivées conformément aux alinéas 4.3.A,B. Cela à deux exceptions près qui sont circonstancielles : les variables d'état de type m, i.e. les niveaux de pollution $\varepsilon^s_{\sigma,m}$, sont mesurés en ppm (parties par million) au lieu de l'être en Gt d'équivalent carbone, avec un rapport de conversion de 2 Gt par ppm ([5t]) ; les variables de dynamique de type c, i.e les consommations unitaires $\delta^s_{\sigma,c}$, sont mesurées en KG$ par Gh et par an au lieu de de l'être en KG$ par Gh et par période élémentaire de 10 ans. Le tableau suivant récapitule ces unités, pour les variables qui ne sont pas de purs coefficients, en notant PE la période élémentaire (de 10 ans) :

(5.45) pour chaque $s\in S^\theta$, et $\sigma\in[s,\tau]$, les variables sont mesurées en,

(a) KG$ pour $\varepsilon^s_{\sigma,k}$ et $\varepsilon^s_{\sigma,b}$, (b) ppm pour $\varepsilon^s_{\sigma,m}$, (c) Gh pour $\varepsilon^s_{\sigma,n}$,

(c) KG$/PE pour $\delta^s_{\sigma,a}$ et $\delta^s_{\sigma,k}$, (d) KG$/Ghxan pour $\delta^s_{\sigma,c}$,

(e) Gt/PE pour $\delta^s_{\sigma,m}$, (f) CF/PE pour $\delta^s_{\sigma,w}$.

(G) Dans chaque tableau, les colonnes correspondent aux divers types de variables, indiqués dans les en-têtes de colonnes, tandis que les lignes correspondent aux diverses périodes, réelles et d'anticipation, indiquées respectivement dans les colonnes "s" et "σ" ([5u]). Les variables sont réparties en blocs de lignes, de τ+1 = 2 lignes consécutives, correspondant aux diverses anticipations, chaque bloc étant repéré verticalement par la période réelle, de l'anticipation en cause, indiquée dans la colonne "s". Les variables dérivées à deux indices, i.e. les variable $\Omega(\varepsilon^s_{\sigma,m})$ et $\underline{\underline{\delta}}^s_{\sigma,w} = \underline{\Psi}'(\varepsilon^s_{\sigma,b},\delta^s_{\sigma,c})$ ($s\in S^\theta$, et $\sigma\in[s,\tau]$), ainsi que les variables de contrôle, figurent, dans le tableau 1, comme indiqué ci-dessus, par blocs et par colonnes. Par contre, les variables à un indice, i.e. les variables $\varepsilon^s_{s,k}/\varepsilon^s_{s,n}$ et $J_s(\varepsilon^s,\delta^s)$ ($s\in S^\theta$), seulement indicées par les périodes réelles, figurent sur la dernière ligne de chaque bloc.

(H) Par exemple, pour le cheminement présenté au § 5.7 : la valeur de la variable $\varepsilon^s_{\sigma,k}$, pour s = 4 et σ = 5 (i.e. pour la seconde période d'anticipation de la cinquième période réelle), soit 250,96 KG$ se trouve, dans le tableau 1, dans le bloc repéré par le nombre 4 dans la colonne "s", sur la ligne repérée par le nombre 5 dans la colonne "σ" et dans la colonne d'en-tête $\varepsilon^s_{\sigma,k}$; la valeur de la variable $\delta^s_{\sigma,c}$, pour s = 0 et σ = 0, soit 3,518 KG$ par Ghxan compte tenu du changement d'unité (alinéa 5.6.F ci-dessus), se trouve dans le tableau 2, dans le bloc repéré par le nombre 0 dans la colonne "s", sur la ligne repérée par le nombre 0 dans la colonne "σ" et dans la colonne d'en-tête $\delta^s_{\sigma,c}$; le rapport $\varepsilon^s_{s,k}/\varepsilon^s_{s,n}$ pour s = 2, soit 18,62, figure sur la dernière ligne du bloc repéré par le nombre 2 dans la colonne "s".

§ 5.7 - SCENARIO SANS CONTROLE

(A) La systématique des tableaux 1 et 2 ci-après est indiquée au § 5.6. Les commentaires qui les suivent (alinéa 5.7.B) soulignent quelques propriétés marquantes du déploiement présenté (alinéa 5.6.B), cela du point de vue de la

Tableau 1 : variables d'état

s	σ	$\varepsilon^s_{\sigma,k}$	$\varepsilon^s_{\sigma,m}$	$\varepsilon^s_{\sigma,n}$	$\varepsilon^s_{\sigma,b}$	$u_{s,\sigma,q}$	$u_{s,\sigma,r}$	$\Omega(\varepsilon^s_{\sigma,m})$	$\underline{\underline{\delta}}^s_{\sigma,w}$
0	0	128.00	350.00	5.500	0.00	0.0000	0.0000	0.9682	1.1940
	1	122.25	374.47	6.566	0.00	0.0000	0.0000	0.9637	1.1957
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	23.27	J_s =	16.335
1	1	122.25	374.47	6.566	0.00	0.0000	0.0000	0.9637	1.1957
	2	146.16	406.67	7.850	0.00	0.0000	0.0000	0.9564	1.1969
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	20.045
2	2	146.16	406.67	7.850	0.00	0.0000	0.0000	0.9564	1.1969
	3	174.90	451.58	9.394	0.00	0.0000	0.0000	0.9421	1.1978
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	25.284
3	3	174.90	451.58	9.394	0.00	0.0000	0.0000	0.9421	1.1978
	4	209.45	513.22	11.250	0.00	0.0000	0.0000	0.9091	1.1985
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	31.595
4	4	209.45	513.22	11.250	0.00	0.0000	0.0000	0.9091	1.1985
	5	250.96	576.65	13.480	0.00	0.0000	0.0000	0.8424	1.1989
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	38.313
5	5	250.96	576.65	13.480	0.00	0.0000	0.0000	0.8424	1.1989
	6	300.82	611.13	16.157	0.00	0.0000	0.0000	0.7803	1.1992
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	45.349
6	6	300.82	611.13	16.157	0.00	0.0000	0.0000	0.7803	1.1992
	7	360.68	628.01	19.373	0.00	0.0000	0.0000	0.7405	1.1995
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	49.874
7	7	360.68	628.01	19.373	0.00	0.0000	0.0000	0.7405	1.1995
	8	424.61	640.31	22.806	0.00	0.0000	0.0000	0.7070	1.1996
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	51.736
8	8	424.61	640.31	22.806	0.00	0.0000	0.0000	0.7070	1.1996
	9	458.99	653.60	24.653	0.00	0.0000	0.0000	0.6666	1.1997
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	52.565
9	9	458.99	653.60	24.653	0.00	0.0000	0.0000	0.6666	1.1997
	10	459.38	665.28	24.673	0.00	0.0000	0.0000	0.6279	1.1997
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	51.600
10	10	459.38	665.28	24.673	0.00	0.0000	0.0000	0.6279	1.1997
	11	442.83	674.83	23.785	0.00	0.0000	0.0000	0.5942	1.1996
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	49.566
11	11	442.83	674.83	23.785	0.00	0.0000	0.0000	0.5942	1.1996
	12	421.21	682.89	22.624	0.00	0.0000	0.0000	0.5646	1.1996
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	47.193

finalité de l'exercice qui consiste à faire apparaître une catastrophe en l'absence d'un contrôle convenable. Par ailleurs, l'examen détaillé de ce cheminement peut évidemment servir d'illustration numérique de l'appareil conceptuel et du formalisme précédemment introduits ([5v]).

Tableau 2 : variables de dynamique

s	σ	$\delta^s_{\sigma,a}$	$\delta^s_{\sigma,k}$	$\delta^s_{\sigma,c}$	$\delta^s_{\sigma,m}$	$\delta^s_{\sigma,q}$	$\delta^s_{\sigma,r}$	$\delta^s_{\sigma,v}$	$\delta^s_{\sigma,w}$
0	0	260.00	58.25	3.518	69.94	0.0000	0.0000	0.9682	1.1938
	1	322.90	61.12	3.809	86.86	0.0000	0.0000	0.9637	1.1954
1	1	322.90	85.03	3.444	86.86	0.0000	0.0000	0.9637	1.1956
	2	424.66	73.08	4.243	114.23	0.0000	0.0000	0.9564	1.1966
2	2	424.66	101.82	3.877	114.23	0.0000	0.0000	0.9564	1.1967
	3	558.98	87.45	4.675	150.37	0.0000	0.0000	0.9421	1.1976
3	3	558.98	122.00	4.307	150.37	0.0000	0.0000	0.9421	1.1976
	4	736.34	104.73	5.019	198.08	0.0000	0.0000	0.9091	1.1982
4	4	736.34	146.24	4.424	157.67	0.0381	0.0000	0.8745	1.1982
	5	970.50	125.48	5.134	216.99	0.0000	0.0000	0.8424	1.1987
5	5	970.50	175.34	4.049	103.55	0.1180	0.0000	0.7430	1.1987
	6	1279.63	150.41	5.249	195.30	0.0000	0.0000	0.7803	1.1990
6	6	1279.63	210.27	3.864	70.42	0.1641	0.0000	0.6523	1.1990
	7	1300.00	180.34	4.038	164.64	0.0000	0.0000	0.7405	1.1992
7	7	1300.00	244.27	2.935	62.28	0.1556	0.0000	0.6252	1.1773
	8	1300.00	212.31	3.099	169.78	0.0000	0.0000	0.7070	1.1905
8	8	1300.00	246.69	2.330	65.01	0.1535	0.0000	0.5984	1.0810
	9	1300.00	229.50	2.584	171.11	0.0000	0.0000	0.6666	1.1309
9	9	1300.00	229.88	2.015	62.58	0.1616	0.0000	0.5589	1.0008
	10	1300.00	229.69	2.377	166.13	0.0000	0.0000	0.6279	1.0914
10	10	1300.00	213.15	1.892	59.00	0.1669	0.0000	0.5231	0.9640
	11	1300.00	221.42	2.317	163.08	0.0000	0.0000	0.5942	1.0781
11	11	1300.00	199.79	1.852	56.62	0.1711	0.0000	0.4925	0.9512
	12	1300.00	210.61	2.314	160.76	0.0000	0.0000	0.5646	1.0774

Tableau 1 : variables d'état (suite et fin).

s	σ	$\varepsilon^s_{\sigma,k}$	$\varepsilon^s_{\sigma,m}$	$\varepsilon^s_{\sigma,n}$	$\varepsilon^s_{\sigma,b}$	$u_{s,\sigma,q}$	$u_{s,\sigma,r}$	$\Omega(\varepsilon^s_{\sigma,m})$	$\underline{\underline{\delta}}^s_{\sigma,w}$
12	12	421.21	682.89	22.624	0.00	0.0000	0.0000	0.5646	1.1996
	13	399.55	689.85	21.460	0.00	0.0000	0.0000	0.5385	1.1996
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 44.870
13	13	399.55	689.85	21.460	0.00	0.0000	0.0000	0.5385	1.1996
	14	379.52	695.98	20.385	0.00	0.0000	0.0000	0.5153	1.1995
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 42.730
14	14	379.52	695.98	20.385	0.00	0.0000	0.0000	0.5153	1.1995
	15	361.49	701.46	19.416	0.00	0.0000	0.0000	0.4945	1.1995
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 40.799
15	15	361.49	701.46	19.416	0.00	0.0000	0.0000	0.4945	1.1995
	16	345.36	706.39	18.550	0.00	0.0000	0.0000	0.4757	1.1994
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.067
16	16	345.36	706.39	18.550	0.00	0.0000	0.0000	0.4757	1.1994
	17	330.94	710.88	17.775	0.00	0.0000	0.0000	0.4587	1.1994
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 37.511
17	17	330.94	710.88	17.775	0.00	0.0000	0.0000	0.4587	1.1994
	18	317.99	715.00	17.079	0.00	0.0000	0.0000	0.4432	1.1993
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 36.109
18	18	317.99	715.00	17.079	0.00	0.0000	0.0000	0.4432	1.1993
	19	306.32	718.79	16.452	0.00	0.0000	0.0000	0.4291	1.1993
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 34.841
19	19	306.32	718.79	16.452	0.00	0.0000	0.0000	0.4291	1.1993
	20	295.74	722.31	15.885	0.00	0.0000	0.0000	0.4162	1.1992
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 33.688
20	20	295.74	722.31	15.885	0.00	0.0000	0.0000	0.4162	1.1992
	21	286.13	725.58	15.368	0.00	0.0000	0.0000	0.4044	1.1992
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 32.636
21	21	286.13	725.58	15.368	0.00	0.0000	0.0000	0.4044	1.1992
	22	277.35	728.64	14.897	0.00	0.0000	0.0000	0.3934	1.1991
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 31.673

(B) Commentaires. La catastrophe annoncée réside en ce que (B1) la population $\varepsilon^s_{s,n}$ monte jusqu'à 24,67 Gh à la période s = 10, puis redescend régulièrement jusqu'à 15,37 Gh à la période s = 21, cette décroissance étant misérable en ce sens qu'elle est le fait d'une baisse drastique de la consommation unitaire $\delta^s_{s,c}$ - en dessous de 2 KG$/Ghxan, alors que le seuil nominal de survie $\underline{\underline{d}}_c$ est de 3,4 - et non d'un contrôle des naissances, vu que le niveau du savoir $\varepsilon^s_{\sigma,b}$ reste nul, ce qui entraîne que le taux de croissance maximum théorique $\underline{\underline{\delta}}^s_{s,w}$ - 1 reste voisin de sa borne supérieure $\underline{\underline{d}}_w$ - 1. (B2) On souligne le caractère progressif, larvé, de cette catastrophe : elle résulte de la conjugaison, de l'accumulation, des contraintes exprimant la problématique des limites qui sont explicitées dans les commentaires suivants. (B3) La production $\delta^s_{s,a}$ atteint sa borne supérieure

Tableau 2 : variables de dynamique (suite et fin)

s	σ	$\delta^s_{\sigma,a}$	$\delta^s_{\sigma,k}$	$\delta^s_{\sigma,c}$	$\delta^s_{\sigma,m}$	$\delta^s_{\sigma,q}$	$\delta^s_{\sigma,r}$	$\delta^s_{\sigma,v}$	$\delta^s_{\sigma,w}$
12	12	1300.00	188.95	1.844	54.90	0.1743	0.0000	0.4662	0.9486
	13	1300.00	199.78	2.331	159.12	0.0000	0.0000	0.5385	1.0813
13	13	1300.00	179.75	1.848	53.65	0.1768	0.0000	0.4433	0.9499
	14	1300.00	189.76	2.355	157.87	0.0000	0.0000	0.5153	1.0865
14	14	1300.00	171.73	1.856	52.70	0.1788	0.0000	0.4232	0.9525
	15	1300.00	180.74	2.380	156.90	0.0000	0.0000	0.4945	1.0917
15	15	1300.00	164.62	1.865	51.96	0.1804	0.0000	0.4052	0.9554
	16	1300.00	172.68	2.403	156.13	0.0000	0.0000	0.4757	1.0965
16	16	1300.00	158.26	1.875	51.36	0.1818	0.0000	0.3892	0.9582
	17	1300.00	165.47	2.424	155.50	0.0000	0.0000	0.4587	1.1008
17	17	1300.00	152.52	1.883	50.88	0.1829	0.0000	0.3748	0.9609
	18	1300.00	158.99	2.443	154.99	0.0000	0.0000	0.4432	1.1045
18	18	1300.00	147.32	1.891	50.49	0.1839	0.0000	0.3617	0.9633
	19	1300.00	153.16	2.460	154.57	0.0000	0.0000	0.4291	1.1079
19	19	1300.00	142.59	1.898	50.16	0.1847	0.0000	0.3499	0.9655
	20	1300.00	147.87	2.475	154.21	0.0000	0.0000	0.4162	1.1108
20	20	1300.00	138.26	1.905	49.88	0.1854	0.0000	0.3391	0.9675
	21	1300.00	143.07	2.490	153.91	0.0000	0.0000	0.4044	1.1134
21	21	1300.00	134.29	1.911	49.65	0.1859	0.0000	0.3292	0.9693
	22	1300.00	138.68	2.502	153.66	0.0000	0.0000	0.3934	1.1158

$\underline{\underline{d}}_a$, de 1300 KG\$, à la période s = 7 et y reste ensuite. (B4) Le niveau des polluants $\varepsilon^s_{s,m}$ augmente progressivement, jusqu'à dépasser le niveau de basculement $\hat{\nu}_m e^*_m$ de 700 ppm, à la période s = 15, ce qui fait que la production est alors amputée de plus de 50% via un facteur de dommages $\Omega(\hat{\nu}_m e^*_m)$ inférieur à 1/2. (B5) Une ponction $\delta^s_{s,q}$ pour réduction des émissions polluantes apparaît à la période s = 4, puis augmente progressivement (sauf aux périodes s = 8 et 9), mais pas suffisamment pour empêcher l'augmentation du niveau des polluants, cela, sans doute à cause de la myopie des anticipations (alinéa 5.5.G), ainsi que peut le laisse entendre la constante nullité des ponctions $\delta^s_{\sigma,q}$ ($\sigma\epsilon s+$) aux secondes périodes des anticipations (^{5w}). (B6) On souligne que ces ponctions $\delta^s_{\sigma,q}$ sont spontanées, puisque les composantes correspondantes $u_{s,\sigma,q}$ du schéma de contrôle sont toutes nulles par définition de l'exercice (alinéa 5.6.C).

§ 5.8 - SCENARIO AVEC CONTROLE

(A) La systématique des tableaux 1 et 2 ci-après est indiquée au § 5.6. Les commentaires qui les suivent (alinéa 5.8.B) soulignent les principales propriétés distinguant ce cheminement avec contrôle de celui sans contrôle (§ 5.7),

Tableau 1 : variables d'état

s	σ	$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}$	$\varepsilon^{s}_{\sigma,m}$	$\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	$\varepsilon^{s}_{\sigma,b}$	$u_{s,\sigma,q}$	$u_{s,\sigma,r}$	$\Omega(\varepsilon^{s}_{\sigma,m})$	$\underline{\delta}^{s}_{\sigma,w}$
0	0	128.00	350.00	5.500	0.00	0.0000	0.0000	0.9682	1.1940
	1	122.25	374.47	6.566	0.00	0.0000	0.0000	0.9637	1.1957
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	23.27	J_s =	16.335
1	1	122.25	374.47	6.566	0.00	0.0000	0.0000	0.9637	1.1957
	2	146.16	406.67	7.850	0.00	0.0000	0.1240	0.9564	1.1969
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	19.103
2	2	146.16	406.67	7.850	0.00	0.0000	0.1240	0.9564	1.1969
	3	174.57	451.58	9.377	52.66	0.1550	0.0650	0.9421	1.0500
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	22.360
3	3	174.57	451.58	9.377	52.66	0.1550	0.0650	0.9421	1.0500
	4	183.30	466.53	9.845	62.60	0.2160	0.0700	0.9358	1.0199
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	25.243
4	4	183.30	466.53	9.845	62.60	0.2160	0.0700	0.9358	1.0199
	5	186.93	464.70	10.040	76.41	0.2410	0.0910	0.9367	1.0066
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	26.668
5	5	186.93	464.70	10.040	76.41	0.2410	0.0910	0.9367	1.0066
	6	188.12	461.79	10.104	103.99	0.2410	0.0690	0.9379	1.0017
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	28.506
6	6	188.12	461.79	10.104	103.99	0.2410	0.0690	0.9379	1.0017
	7	188.40	459.84	10.119	107.21	0.2410	0.0630	0.9388	1.0015
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	30.638
7	7	188.40	459.84	10.119	107.21	0.2410	0.0630	0.9388	1.0015
	8	188.65	459.15	10.132	109.14	0.2410	0.0560	0.9390	1.0014
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	32.621
8	8	188.65	459.15	10.132	109.14	0.2410	0.0560	0.9390	1.0014
	9	188.88	459.82	10.145	108.95	0.2410	0.0480	0.9388	1.0014
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	34.697
9	9	188.88	459.82	10.145	108.95	0.2410	0.0480	0.9388	1.0014
	10	189.11	461.93	10.157	105.81	0.2410	0.0400	0.9379	1.0016
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	36.862
10	10	189.11	461.93	10.157	105.81	0.2410	0.0400	0.9379	1.0016
	11	189.37	465.59	10.171	100.01	0.2410	0.0400	0.9363	1.0020
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	39.019
11	11	189.37	465.59	10.171	100.01	0.2410	0.0400	0.9363	1.0020
	12	189.71	470.64	10.190	101.14	0.2410	0.0400	0.9340	1.0019
					$\varepsilon^{s}_{\sigma,k}/\varepsilon^{s}_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s =	39.779

cela toujours du point de vue de la finalité de l'exercice qui consiste ici à éviter la catastrophe en provoquant une stabilisation raisonnable à long terme par un contrôle convenable. La procédure de détermination du schéma de contrôle $\hat{u}$ en cause (alinéas 5.6.B,C) est par ailleurs décrite au § 5.9.

Tableau 2 : variables de dynamique

s	σ	$\delta^s_{\sigma,a}$	$\delta^s_{\sigma,k}$	$\delta^s_{\sigma,c}$	$\delta^s_{\sigma,m}$	$\delta^s_{\sigma,q}$	$\delta^s_{\sigma,r}$	$\delta^s_{\sigma,v}$	$\delta^s_{\sigma,w}$
0	0	260.00	58.25	3.518	69.94	0.0000	0.0000	0.9682	1.1938
	1	322.90	61.12	3.809	86.86	0.0000	0.0000	0.9637	1.1954
1	1	322.90	85.03	3.444	86.86	0.0000	0.0000	0.9637	1.1956
	2	424.66	73.08	3.601	114.23	0.0000	0.1240	0.8378	1.1967
2	2	424.66	101.50	3.239	114.23	0.0000	0.1240	0.8378	1.1944
	3	557.94	87.29	3.498	56.99	0.1550	0.0650	0.7443	1.0499
3	3	557.94	96.01	3.405	56.99	0.1550	0.0650	0.7443	1.0500
	4	644.41	91.65	3.535	24.33	0.2160	0.0700	0.6823	1.0198
4	4	644.41	95.28	3.498	24.33	0.2160	0.0700	0.6823	1.0198
	5	722.89	93.47	3.722	22.06	0.2410	0.0910	0.6462	1.0064
5	5	722.89	94.66	3.710	22.06	0.2410	0.0910	0.6462	1.0064
	6	800.24	94.06	4.318	23.81	0.2410	0.0690	0.6628	1.0015
6	6	800.24	94.34	4.315	23.81	0.2410	0.0690	0.6628	1.0015
	7	881.58	94.20	4.885	26.23	0.2410	0.0630	0.6676	1.0013
7	7	881.58	94.45	4.883	26.23	0.2410	0.0630	0.6676	1.0013
	8	971.00	94.32	5.517	28.89	0.2410	0.0560	0.6728	1.0012
8	8	971.00	94.55	5.515	28.89	0.2410	0.0560	0.6728	1.0012
	9	1069.40	94.44	6.220	31.81	0.2410	0.0480	0.6783	1.0012
9	9	1069.40	94.67	6.217	31.81	0.2410	0.0480	0.6783	1.0012
	10	1177.78	94.55	6.993	35.04	0.2410	0.0400	0.6834	1.0014
10	10	1177.78	94.82	6.990	35.04	0.2410	0.0400	0.6834	1.0014
	11	1297.37	94.69	7.771	38.60	0.2410	0.0400	0.6822	1.0018
11	11	1278.22	95.03	7.639	38.03	0.2410	0.0400	0.6822	1.0018
	12	1300.00	94.86	7.751	38.67	0.2410	0.0400	0.6805	1.0017

Tableau 1 : variables d'état (suite et fin)

s	σ	$\varepsilon^s_{\sigma,k}$	$\varepsilon^s_{\sigma,m}$	$\varepsilon^s_{\sigma,n}$	$\varepsilon^s_{\sigma,b}$	$u_{s,\sigma,q}$	$u_{s,\sigma,r}$	$\Omega(\varepsilon^s_{\sigma,m})$	$\underline{\underline{\delta}}^s_{\sigma,w}$
12	12	189.71	470.64	10.190	101.14	0.2410	0.0400	0.9340	1.0019
	13	190.04	475.53	10.207	101.70	0.2410	0.0400	0.9316	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.754
13	13	190.04	475.53	10.207	101.70	0.2410	0.0400	0.9316	1.0019
	14	190.35	480.28	10.224	101.97	0.2410	0.0400	0.9292	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.727
14	14	190.35	480.28	10.224	101.97	0.2410	0.0400	0.9292	1.0019
	15	190.67	484.88	10.241	102.11	0.2410	0.0400	0.9268	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.697
15	15	190.67	484.88	10.241	102.11	0.2410	0.0400	0.9268	1.0019
	16	190.99	489.34	10.258	102.17	0.2410	0.0400	0.9244	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.666
16	16	190.99	489.34	10.258	102.17	0.2410	0.0400	0.9244	1.0019
	17	191.30	493.67	10.275	102.20	0.2410	0.0400	0.9219	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.634
17	17	191.30	493.67	10.275	102.20	0.2410	0.0400	0.9219	1.0019
	18	191.62	497.87	10.292	102.21	0.2410	0.0400	0.9194	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.601
18	18	191.62	497.87	10.292	102.21	0.2410	0.0400	0.9194	1.0019
	19	191.94	501.94	10.309	102.21	0.2410	0.0400	0.9168	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.568
19	19	191.94	501.94	10.309	102.21	0.2410	0.0400	0.9168	1.0019
	20	192.26	505.88	10.327	102.21	0.2410	0.0400	0.9142	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.533
20	20	192.26	505.88	10.327	102.21	0.2410	0.0400	0.9142	1.0019
	21	192.59	509.71	10.344	102.21	0.2410	0.0400	0.9116	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.497
21	21	192.59	509.71	10.344	102.21	0.2410	0.0400	0.9116	1.0019
	22	192.91	513.42	10.362	102.20	0.2410	0.0400	0.9090	1.0019
					$\varepsilon^s_{\sigma,k}/\varepsilon^s_{\sigma,n}$	=	18.62	J_s	= 39.461

(B) Commentaires. La stabilisation consiste en ce que (B1) les diverses variables du plan, ici du cheminement (^{5}Y), tant d'état $\varepsilon^s_{s,i}$ ($i\epsilon I$), que de dynamique $\delta^s_{s,j}$ ($j\epsilon J$), sont approximativement stables à partir de la période s = 12 ; elle est raisonnable en ce sens que, d'une part (B2) la population stabilisée, environ 10 Gh, est très inférieure à celle atteinte sans contrôle, d'autre part (B3) elle a lieu à un niveau de vie moyen et avec une natalité maîtrisée, comme l'explicitent les deux commentaires suivants. (B4) La consommation unitaire de stabilisation $\delta^s_{s,c}$ est supérieur à 7 KG$/Ghxan, soit plus de deux fois la consommation de référence. (B5) La natalité est maîtrisée en ce sens que (B5a) le taux de croissance réel $\delta^s_{s,w}$ - 1 est très faible (inférieur à de 2/1000 par 10 ans) et (B5b) pratiquement égal au taux maximum théorique $\underline{\underline{\delta}}^s_{s,w}$ - 1, lui même dû à

Tableau 2 : variables de dynamique (suite et fin)

s	σ	$\delta^{s}_{\sigma,a}$	$\delta^{s}_{\sigma,k}$	$\delta^{s}_{\sigma,c}$	$\delta^{s}_{\sigma,m}$	$\delta^{s}_{\sigma,q}$	$\delta^{s}_{\sigma,r}$	$\delta^{s}_{\sigma,v}$	$\delta^{s}_{\sigma,w}$
12	12	1278.21	95.18	7.603	38.03	0.2410	0.0400	0.6805	1.0017
	12	1300.00	95.02	7.715	38.67	0.2410	0.0400	0.6788	1.0017
13	13	1278.14	95.34	7.566	38.02	0.2410	0.0400	0.6788	1.0017
	14	1300.00	95.18	7.678	38.67	0.2410	0.0400	0.6771	1.0017
14	14	1278.06	95.49	7.530	38.02	0.2410	0.0400	0.6771	1.0017
	15	1300.00	95.34	7.642	38.67	0.2410	0.0400	0.6753	1.0017
15	15	1277.98	95.65	7.493	38.02	0.2410	0.0400	0.6753	1.0017
	16	1300.00	95.49	7.605	38.67	0.2410	0.0400	0.6735	1.0017
16	16	1277.88	95.81	7.456	38.02	0.2410	0.0400	0.6735	1.0017
	17	1300.00	95.65	7.568	38.67	0.2410	0.0400	0.6717	1.0017
17	17	1277.79	95.97	7.419	38.01	0.2410	0.0400	0.6717	1.0017
	18	1300.00	95.81	7.530	38.67	0.2410	0.0400	0.6699	1.0017
18	18	1277.70	96.13	7.382	38.01	0.2410	0.0400	0.6699	1.0017
	19	1300.00	95.97	7.493	38.67	0.2410	0.0400	0.6680	1.0017
19	19	1277.61	96.29	7.344	38.01	0.2410	0.0400	0.6680	1.0017
	20	1300.00	96.13	7.455	38.67	0.2410	0.0400	0.6661	1.0017
20	20	1277.52	96.46	7.307	38.00	0.2410	0.0400	0.6661	1.0017
	21	1300.00	96.29	7.417	38.67	0.2410	0.0400	0.6642	1.0017
21	21	1277.43	96.62	7.269	38.00	0.2410	0.0400	0.6642	1.0017
	22	1300.00	96.46	7.379	38.67	0.2410	0.0400	0.6623	1.0017

(B5c) un niveau de savoir $\varepsilon^{s}_{s,b}$ de l'ordre de deux fois le niveau de basculement $\underline{\underline{e}}_b\varepsilon^{s}_{s,n}$. (B6) Les taux de ponction $\delta^{s}_{\sigma,q}$ et $\delta^{s}_{\sigma,r}$ - calés sur les taux de contrôle $u_{s,\sigma,q}$ et $u_{s,\sigma,r}$ ([5z]), via les contraintes (5.18c,d) ici serrées - qui engendrent cette stabilisation sont très différents : le premier atteint 0,24 dès la période s = 5 et s'y maintient, tandis que le second stationne à 0,04, pour l'entretien du capital de savoir, après des pointes à 0,12 et 0,09, aux périodes s = 2 et s = 5, pour le constituer. (B7) Les ponctions élevées de réduction des émissions permettent de maintenir le niveau $\varepsilon^{s}_{s,m}$ des polluants au voisinage de 500 ppm, soit nettement en deçà du niveau de basculement de 700 ppm, ce qui fait que le facteur de dommages $\Omega(\varepsilon^{s}_{s,m})$ ne descend pas en dessous de 0,9. (B8) Enfin, la production $\delta^{s}_{s,a}$ n'atteint - pratiquement ([5A]) - sa borne supérieure qu'à la périodes s = 11, i.e lorsque la stabilisation est acquise ([5A]).

§ 5.9 - DETERMINATION DU SCHEMA DE CONTROLE

(A) Le propos de ce § est de décrire la procédure empirique de détermination préalable du schéma de contrôle $\hat{\mathbf{u}}$ qui engendre le cheminement avec stabilisation présenté au § 5.8 (alinéas 5.6.B,C). Cette procédure est dite empirique, bien qu'elle soit formellement précisée ci-après, car il y manque une justification formelle de son résultat, i.e. de ce que le schéma de contrôle auquel elle conduit engendre, par simulation libre (alinéas 5.6.B), un cheminement comportant la stabilisation voulue.

(B) La procédure repose sur la considération, d'une part de la structure à contrôle spécifié nul $\underline{\underline{\Sigma}}^{o}$, i.e. de schéma de controle nul $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, associée à un resserrement $\underline{\underline{\Sigma}}$ de la structure (à commandes doubles) de base $\Sigma = \Sigma_b(\Delta, 0)$ de profondeur nulle, correspondant au jeu de données de base Δ, d'autre part d'une fonction objectif (sous forme réduite) Q pour cette structure $\underline{\underline{\Sigma}}^{o}$: elle consiste en la détermination d'un plan optimum (ξ, ζ), pour cette structure $\underline{\underline{\Sigma}}^{o}$, relativement à la fonction objectif Q et à l'état initial e^*. Ainsi, pour définir cette procédure : il faut spécifier, dans le cadre de ce jeu de données, d'une part le protocole de resserrement (d'exploitation) $\Gamma° = (\Gamma^{o}_{s}, s\epsilon S^{\theta})$, ici de profondeur nulle (alinéa 3.12.E), qui engendre la structure $\underline{\underline{\Sigma}}$ à partir de la structure de base $\Sigma_b(\Delta, 0)$, d'autre part la fonction objectif Q ; cela est fait aux alinéas 5.9.D-F ; il faut ensuite préciser comment le schéma de contrôle $\mathbf{u}$ cherché est déduit du plan optimum (ξ, ζ) ; cela est fait à l'alinéa 5.9.H, après la présentation de ce dernier à l'alinéa 5.9.G. On souligne que, dans la procédure ainsi formulée, d'une part les anticipations ne jouent aucun rôle, la structure primaire $\Sigma_b(\Delta, 0)$ étant sans anticipation (alinéa 3.12.D), d'autre part le schéma de contrôle spécifié a priori n'intervient que dans la mesure où il est nul.

(C) Le jeu de données de base Δ en cause est celui qui correspond aux spécifications des alinéas 5.4.C,E,F (alinéa 5.4.H), sauf en ce qui concerne la durée θ qui est réduite à 14. Vu qu'un plan viable pour la structure $\underline{\underline{\Sigma}}^{o}$ ci-dessus (alinéa 5.9.B) est aussi viable pour la structure à contrôle spécifié nul associée à la structure de base $\Sigma_b(\Delta, 0)$, il importe d'expliciter le système des contraintes définissant un plan viable $(\xi, \zeta, \mathbf{u})$ pour cette dernière. Compte tenu du caractère conforme du protocole d'anticipation pérennisant (alinéas 4.10.B et 5.3.B,C,F), on obtient ce système en réécrivant les contraintes (5.16) à (5.18), avec, d'une part S^{θ} mis pour $[s, \tau]$ et s mis pour σ en toutes ses occurrences, d'autre part $\xi_{s,i}$ mis pour $\varepsilon_{\sigma,i}$ $(i\epsilon I)$ et $\zeta_{s,j}$ mis pour $\delta_{\sigma,j}$ $(j\epsilon J)$ [5B].

(D) Le protocole de resserrement d'exploitation $\Gamma° = (\Gamma^{o}_{s}, s\epsilon S^{\theta})$ de profondeur nulle en cause (alinéa 5.9.B), i.e. sans anticipation, conjugue comme suit un protocole de type délimitant et un protocole de type pérennité (§ 4.12). Ce protocole $\Gamma°$ est défini par les conditions,

(5.46) pour tout $s\epsilon S^{\theta}$, Γ^{o}_{s} est l'ensemble des couples $(e,d) \epsilon E_s{\times}D_s$ - i.e. avec e, d de la forme (4.3,a,b) - tels que,

$$\text{(a)}\quad d_c \geq \underline{d}^{+}_{s,c}, \qquad \text{(b)}\quad d_k \geq \alpha_k e_k, \quad \text{si } s\epsilon S_{\theta} \ \text{(i.e. } s = \theta).$$

où, pour chaque $s\epsilon S^{\theta}$, $\underline{d}^{+}_{s}$ est un scalaire ≥ 0 donné, les contraintes (5.46a,b) ne faisant que reprendre les contraintes (4.81a) et (4.80a), avec la même interprétation (alinéa (4.12.E). Numériquement, le protocole $(\underline{d}^{+}_{s,c}, s\epsilon S^{\theta})$ des bornes inférieures de consommation retenues - mesurées en KG\$/Ghxan (alinéas 4.3.A,B, 5.4.B, 5.6.F) - est indiquée par le tableau (5.47) :

(5.47)	s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\underline{\underline{d}}^{+}_{s,c}$	3,300	3,350	3,418	3,514	3,651	3,853	4,156	4,604	5,227
	s	10	11	12	13	14				
	$\underline{\underline{d}}^{+}_{s,c}$	5,983	6,737	7,356	7,800	8,000.				

Ce protocole satisfait aux deux conditions suivantes : (D1) la consommation $\underline{\underline{d}}^{+}_{s,c}$ est inférieure à la consommation de référence d^{*}_{c} = 3,5 KG$/Ghxan aux périodes s = 1, 2, 3 ; (D2) elle croit ensuite pour atteindre le maximum $\underline{\underline{d}}^{+}_{c}$ = 8 à la période finale s = 14, avec un ralentissement de la croissance aux périodes précédentes, s = 12 et s = 13). Il a été obtenu sous la forme,

(5.48) pour $1 \leq s \leq \theta$, $\underline{\underline{d}}^{+}_{s,c} = a + b[1 - \phi(\varepsilon, s - s_m)]$,

en déterminant les paramètres positifs a, b, ε et s_m par minimisation de s_m sous les conditions (où θ = 14),

(5.49) (a) $\underline{\underline{d}}^{+}_{1,c} = 3{,}3$, (b) $\underline{\underline{d}}^{+}_{2,c} \leq 3{,}4$, (c) $\underline{\underline{d}}^{+}_{\theta-1,c} \leq 7{,}8$, (d) $\underline{\underline{d}}^{+}_{\theta,c} \geq 8{,}1$,

puis en mettant $\underline{\underline{d}}^{+}_{\theta,c}$ à 8. De plus, on pose $\underline{\underline{d}}^{+}_{0,c} = d^{*}_{c}$, conformément à la condition initiale (5.20).

(E) La condition D1 ci-dessus, ainsi que les conditions (5.49a,b) qui la concrétisent, ont été introduites par convenance ([5n]), les essais ayant montré que des valeurs de $\underline{\underline{d}}^{+}_{s,c}$ supérieures à d^{*}_{c} pour $s \leq 3$ sont incompatibles avec l'existence d'un plan viable. De même, c'est cette existence qui justifie la valeur moyenne $\underline{\underline{d}}^{+}_{c}$ = 8 (plutôt, par exemple, que $\underline{\underline{d}}^{+}_{c}$ = 10) de la consommation maximum, ainsi, au moins en partie, que la valeur de la borne supérieure $\underline{\underline{d}}_{a}$ (alinéa 5.5.C). De plus, le ralentissement stipulé par la condition D2, qui est obtenu par les conditions (5.49c,d), est sont doute plus contingent, même s'il est raisonnable. Enfin, la condition finale (5.46b) est la seule retenue, parmi les conditions finales de stationnarité (4.27), car les autres, sans doute trop brutales pour des raisons globales, rendent aussi pratiquement problématique l'existence d'un plan viable ([5C]). Au demeurant, cette absence n'empèche pas le plan obtenu de comporter une stabilisation (alinéa 5.9.G).

(F) La fonction objectif Q, qu'il s'agit de maximiser, mesure simplement le niveau de la population à la période finale $s = \theta$, i.e.,

(5.50) $Q(\xi, \zeta) = \xi_{\theta,n}$.

On souligne le caractère typiquement normatif de cette fonction objectif (alinéa 3.12.G), caractère qui la rapproche de celles envisagées à l'alinéa 4.13.B : cette fonction n'a pas pour but de représenter un comportement spontané du système, mais de permettre la détermination d'un plan viable ayant certaines caractéristiques données, en l'occurrence une consommation par tête croissante, selon le protocole ($\underline{\underline{d}}^{+}_{s,c}$, $s \in S^{\theta}$) (alinéas 5.9.D,E), sans pour cela que le niveau de la population soit trop faible, trop pénalisé, ce à quoi vise la maximisation de la fonction objectif Q ([5D]).

(G) Le plan optimum (ξ, ζ) obtenu (alinéa 5.9.B) est présenté par les tableaux 1 et 2 ci-après dont la structure est parallèle à celle des tableaux des § 5.7 et 5.8 (alinéas 5.6.E-H), à ceci près que, dans chaque tableau, il n'y a ici qu'un bloc, mais de $\theta+1$ = 15 lignes (au lieu de $\tau+1$ = 2 lignes), les variables scalaires d'état [resp. de dynamique] étant les composantes $\xi_{s,i}$ ($i \in I$) [resp. $\zeta_{s,j}$ ($j \in J$)] de la réalisation ξ [resp. du schéma de commande ζ] du plan.

Tableau 1 : variables d'état

s	$\xi_{s,k}$	$\xi_{s,m}$	$\xi_{s,n}$	$\xi_{s,b}$	$\Omega(\xi_{s,m})$	$\underline{\zeta}_{s,w}$
0	128.00	350.00	5.500	0.00	0.9682	1.1940
1	123.22	374.47	6.566	0.00	0.9637	1.1957
2	154.13	404.67	7.845	0.00	0.9569	1.1969
3	174.79	448.09	9.388	53.34	0.9434	1.0461
4	182.84	463.17	9.821	63.00	0.9373	1.0188
5	186.26	461.42	10.004	76.01	0.9381	1.0067
6	187.46	458.42	10.069	102.68	0.9393	1.0018
7	187.76	455.47	10.085	101.36	0.9406	1.0019
8	188.07	453.21	10.101	98.73	0.9415	1.0021
9	188.42	451.95	10.120	95.56	0.9419	1.0024
10	188.83	452.02	10.142	91.53	0.9419	1.0029
11	189.33	453.65	10.169	86.09	0.9413	1.0038
12	225.68	457.13	10.206	49.59	0.9399	1.1143
13	301.31	462.97	11.369	24.79	0.9374	1.1955
14	252.99	471.59	13.589	12.40	0.9335	1.1984

Tableau 2 : variables de dynamique

s	$\zeta_{s,a}$	$\zeta_{s,k}$	$\zeta_{s,c}$	$\zeta_{s,m}$	$\zeta_{s,q}$	$\zeta_{s,r}$	$\zeta_{s,v}$	$\zeta_{s,w}$
0	260.00	59.22	3.500	69.94	0.0000	0.0000	0.9682	1.1938
1	323.55	92.51	3.300	82.87	0.0084	0.0000	0.9556	1.1948
2	430.12	97.73	3.350	111.12	0.0000	0.1240	0.8382	1.1967
3	558.63	95.45	3.418	57.04	0.1550	0.0650	0.7453	1.0461
4	642.80	94.84	3.514	24.29	0.2156	0.0692	0.6844	1.0187
5	710.14	94.34	3.651	21.68	0.2410	0.0911	0.6472	1.0065
6	726.08	94.03	3.853	21.60	0.2410	0.0689	0.6639	1.0016
7	767.12	94.19	4.156	22.82	0.2410	0.0626	0.6692	1.0017
8	829.18	94.39	4.604	24.67	0.2410	0.0557	0.6747	1.0019
9	915.99	94.62	5.227	27.25	0.2410	0.0478	0.6808	1.0022
10	1021.77	94.92	5.983	30.40	0.2409	0.0395	0.6868	1.0027
11	1148.33	131.01	6.737	34.17	0.2406	0.0057	0.7107	1.0036
12	1300.00	188.47	7.356	39.11	0.2313	0.0000	0.7225	1.1140
13	1300.00	102.34	7.800	45.01	0.1883	0.0000	0.7609	1.1952
14	1300.00	126.50	8.000	152.65	0.0000	0.0000	0.9335	1.1982

De ce plan, on retient essentiellement qu'il comporte une stabilisation approximative, au moins entre les périodes s = 7 et s = 12, les périodes finales étant plus irrégulières par déficience des conditions finales (alinéa 5.9.E).

(H) Le schéma de contrôle $\hat{u} = (\hat{u}_{s,\sigma,h},\ s\in S^{\theta},\ h\in H)$ cherché - qui est celui indiqué dans les colonnes correspondantes du tableau 1 du § 5.8 - est directement tiré, par un procédé glissant, du multiplet $(\zeta_{s,h},\ s\in S^{\theta},\ h\in H)$ des variables de ponction du plan $(\xi,\ \zeta)$ précédemment déterminé (alinéa 5.9.G), ce qui se traduit ici par les relations,

(5.51) pour tous $s\in S^{\theta}$, $\sigma\in[s,\tau]$ et $h\in H$, $\hat{u}_{s,\sigma,h}\ \#\ \zeta_{\sigma,h}$, où le signe "#" signifie une régularisation, dont un arrondi à 3 décimales, le remplacement par zéro de $\zeta_{1,q}$ et la reproduction par constance à partir de la période s = 9, pour éviter les irrégularités finales du plan.

(I) Une fois ainsi - laborieusement - explicitée la construction du schéma de contrôle en cause, on peut poser, comme conclusion de ce § et des § 5.6 à 5.8, la question de (I1) la justification formelle du résultat que fournit ce schéma de contrôle (alinéa 5.9.A). Bien que distincte de la question téléologique, cette question lui est évidemment liée (§ 5.10).

§ 5.10 - <u>OPTIMISATION ET QUESTION TELEOLOGIQUES</u>

(A) Les résultats de l'exploitation par simulation libre, qui sont présentés aux § 5.7 et 5.8, sont complétés par la présentation ci-après (alinéas 5.10.D et 5.10.E) de deux résultats correspondant à des conditions comparables (alinéa 5.10.B), mais obtenus par optimisation comportementale (alinéa 5.10.C). Ainsi, la comparaison de ces derniers avec les précédents permet une approche de la question téléologique (alinéa 5.10.F).

(B) Désignant toujours par Σ la stucture de base $\Sigma_b(\Delta,0)$, de profondeur nulle, correspondant au jeu de données de base Δ (alinéa 5.9.B), on considère la fonction objectif (sous forme réduite) Q, pour les structures à contrôles spécifiés Σ^u $[u \in U(\Delta,0)]$, qui est définie par la condition,

(5.53) pour tout plan (ξ, ζ) relatif à une structure à contrôles spécifiés Σ^u, avec $u \in U(\Delta,0)$,

$$\text{(a)}\quad Q(\xi,\zeta) = \sum_{s\in S^\theta\setminus S_\theta} \xi_{s,n}\theta_s\left(\frac{\zeta_{\sigma,c}}{d_c^{\#}}\right)\underline{\kappa}\left(\gamma^J,\ \check{\nu}^J,\ \frac{\zeta_{s+1,c}-\zeta_{s,c}}{d_c^{\#}}\right) + \sum_{s\in S_\theta} \xi_{s,n}\theta_s\left(\frac{\zeta_{s,c}}{d_c^{\#}}\right),$$

les fonctions, numériques sur R_+, θ_s $(s\in S^\theta)$ étant définies par la relation,

(5.54) pour tous $\sigma\in S^\theta$ et $x \in R_+$, (a) $\theta_s(x) = (1+\rho)^{-s}(\hat{\nu}^J + x)^\mu$,

et les données scalaires γ^J, $\check{\nu}^J$, $d_c^{\#}$, ρ, $\hat{\nu}^J$, μ, par les relations (5.35). On note la parenté de cette fonction avec les fonctions objectif locales d'anticipation J_s $(s\in S^\theta)$ de classe nc à actualisation définies par la relation (5.34), parenté qui est concomitante d'une interprétation de type comportemental de la fonction Q (alinéas 3.12.G et 4.13.C-E) et qui motive la nullité - contingente - du coefficient d'actualisation ρ [relation (5.35d) et alinéa 5.5.G].

(C) L'optimisation comportementale en cause (aliné 5.10.A) réside alors dans la détermination de plans optimums pour les structures à contrôles spécifiés Σ^u, relativement, d'une part à la fonction objectif Q ci-dessus et à l'état initial de référence e^*, d'autre part à deux schémas de contrôle u, ici de profondeur nulle : le schéma nul o et le schéma de profondeur nulle $\check{u} = (\check{u}_s,\ s\in S^\theta)$ induit par le schéma $\hat{u} = (\hat{u}_{s,\sigma},\ s\in S^\theta,\ \sigma\in[s,\tau])$, qui engendre le plan présenté au § 5.8 [relation (5.51)], schéma $\check{u}$ défini par la relation,

(5.55) pour tout $s\in S^\theta$, $\check{u}_s = \hat{u}_{s,s}$.

On souligne que les structures Σ^o et $\Sigma^{\check{u}}$ en cause ne comportent aucune condition finale, en dehors de celles éventuellement stipulées par le contrôle spécifié, cela contrairement à la structure $\underline{\underline{\Sigma}}^o$ envisagée au § 5.9 (alinéa 5.9.D).

Les plans optimums (ξ, ζ) obtenus relativement à ces structures Σ^{o} et $\Sigma^{\check{u}}$ sont présentés par les tableaux des alinéas 5.10.D et 5.10.E ci-après, tableaux dont la structure, parallèle à celle des tableaux des § 5.7 et 5.8 (alinéas 5.6.E-H), est celle des tableaux du § 5.9 (alinéa 5.9.G). Ces plans ont été obtenus au moyen du code d'optimisation non linéaire MINOS 5 du progiciel GAMS (alinéa 5.2.F). Ils sont viables, pour les structures respectives, mais ne sont, a priori, que localement optimums ([5E]).

(D) Plan optimuum (ξ, ζ) relativement à la structure Σ^{o} (alinéa 5.10.C).

<u>Tableau 1</u> : <u>variables d'état</u>

s	$\xi_{s,k}$	$\xi_{s,m}$	$\xi_{s,n}$	$\xi_{s,b}$	$u_{s,q}$	$u_{s,r}$	$\Omega(\xi_{s,m})$	$\underline{\zeta}_{s,w}$
0	128.00	350.00	5.500	0.00	0.0000	0.0000	0.9682	1.1940
1	122.25	373.69	6.566	0.00	0.0000	0.0000	0.9639	1.1957
2	145.79	394.33	7.831	0.00	0.0000	0.0000	0.9594	1.1969
3	174.19	403.16	9.356	0.00	0.0000	0.0000	0.9573	1.1978
4	208.49	403.98	11.198	0.00	0.0000	0.0000	0.9571	1.1984
5	249.77	403.27	13.415	0.00	0.0000	0.0000	0.9573	1.1989
6	325.13	404.44	16.079	0.00	0.0000	0.0000	0.9570	1.1992
7	580.43	411.79	19.277	0.00	0.0000	0.0000	0.9550	1.1995
8	430.32	419.34	23.113	246.04	0.0000	0.0000	0.9529	1.0003
9	430.22	429.01	23.108	147.67	0.0000	0.0000	0.9500	1.0045
10	431.94	443.41	23.200	136.66	0.0000	0.0000	0.9451	1.0100
11	436.08	462.25	23.422	134.15	0.0000	0.0000	0.9377	1.0138
12	441.98	485.18	23.739	124.20	0.0000	0.0000	0.9267	1.0518
13	464.84	510.59	24.967	62.10	0.0000	0.0000	0.9110	1.1988
14	557.20	588.53	29.928	31.05	0.0000	0.0000	0.8237	1.1996

$Q = 329.840$

<u>Tableau 2</u> : <u>variables de dynamique</u>

s	$\zeta_{s,a}$	$\zeta_{s,k}$	$\zeta_{s,c}$	$\zeta_{s,m}$	$\zeta_{s,q}$	$\zeta_{s,r}$	$\zeta_{s,v}$	$\zeta_{s,w}$
0	260.00	58.25	3.500	68.38	0.0039	0.0000	0.9644	1.1938
1	322.91	84.67	3.222	63.70	0.0482	0.0000	0.9174	1.1926
2	423.60	101.30	3.252	41.32	0.1242	0.0000	0.8403	1.1948
3	556.73	121.39	3.298	25.83	0.1932	0.0000	0.7724	1.1969
4	712.90	145.53	3.327	22.81	0.2407	0.0000	0.7267	1.1980
5	892.18	200.25	3.336	26.53	0.2416	0.0000	0.7260	1.1986
6	1300.00	417.87	3.333	38.98	0.2333	0.0000	0.7337	1.1989
7	1300.00	140.10	3.324	39.80	0.2243	0.1893	0.6006	1.1990
8	1300.00	215.06	3.315	44.50	0.1926	0.0190	0.7548	0.9998
9	1300.00	216.83	3.315	54.54	0.1637	0.0483	0.7561	1.0040
10	1300.00	220.10	3.322	64.27	0.1505	0.0506	0.7622	1.0096
11	1300.00	223.94	3.342	73.59	0.1363	0.0439	0.7744	1.0135
12	1300.00	243.85	3.377	79.94	0.1322	0.0000	0.8042	1.0517
13	1300.00	324.78	3.442	186.50	0.0000	0.0000	0.9110	1.1987
14	1300.00	0.00	3.578	349.70	0.0000	0.0000	0.8237	1.1994

(E) Plan optimum (ξ, ζ) relativement à la structure $\Sigma^{\check{u}}$ (alinéa 5.10.C).

Tableau 1 : variables d'état

s	$\xi_{s,k}$	$\xi_{s,m}$	$\xi_{s,n}$	$\xi_{s,b}$	$u_{s,q}$	$u_{s,r}$	$\Omega(\xi_{s,m})$	$\underline{\xi}_{s,w}$
0	128.00	350.00	5.500	0.00	0.0000	0.0000	0.9682	1.1940
1	123.22	374.47	6.566	0.00	0.0000	0.0000	0.9637	1.1957
2	176.93	406.75	7.740	0.00	0.0000	0.1240	0.9564	1.1968
3	169.55	444.29	9.107	45.86	0.1550	0.0650	0.9448	1.0968
4	185.62	458.11	9.970	57.48	0.2160	0.0700	0.9395	1.0393
5	200.68	456.69	10.362	74.42	0.2410	0.0910	0.9401	1.0085
6	213.92	454.48	10.449	105.77	0.2410	0.0690	0.9409	1.0017
7	248.90	453.45	10.464	111.36	0.2410	0.0630	0.9414	1.0014
8	273.82	454.27	10.477	116.74	0.2410	0.0560	0.9410	1.0012
9	251.89	456.89	10.487	119.57	0.2410	0.0480	0.9400	1.0011
10	206.39	460.71	10.496	116.33	0.2410	0.0400	0.9384	1.0012
11	195.61	465.24	10.506	107.52	0.2410	0.0400	0.9364	1.0016
12	216.88	470.62	10.521	105.76	0.2410	0.0400	0.9340	1.0017
13	213.10	475.84	10.537	104.88	0.2410	0.0400	0.9315	1.0018
14	196.48	480.90	10.553	104.44	0.2410	0.0400	0.9289	1.0018

Q = 229.816

Tableau 2 : variables de dynamique

s	$\zeta_{s,a}$	$\zeta_{s,k}$	$\zeta_{s,c}$	$\zeta_{s,m}$	$\zeta_{s,q}$	$\zeta_{s,r}$	$\zeta_{s,v}$	$\zeta_{s,w}$
0	260.00	59.22	3.500	69.94	0.0000	0.0000	0.9682	1.1938
1	323.55	115.32	2.993	87.03	0.0000	0.0000	0.9637	1.1787
2	369.82	81.08	2.956	99.48	0.0000	0.1240	0.8378	1.1766
3	531.63	100.85	3.250	54.30	0.1550	0.0650	0.7465	1.0948
4	652.57	107.87	3.402	24.64	0.2160	0.0700	0.6850	1.0393
5	753.44	113.58	3.620	22.99	0.2410	0.0910	0.6486	1.0084
6	847.41	141.94	4.034	25.21	0.2410	0.0690	0.6649	1.0015
7	969.19	149.37	4.773	28.83	0.2410	0.0630	0.6695	1.0012
8	1092.82	114.98	5.936	32.51	0.2410	0.0560	0.6742	1.0010
9	1178.13	80.44	6.863	35.05	0.2410	0.0480	0.6792	1.0009
10	1233.79	92.41	7.157	36.70	0.2410	0.0400	0.6837	1.0010
11	1300.00	119.07	7.309	38.67	0.2410	0.0400	0.6823	1.0014
12	1300.00	104.66	7.414	38.67	0.2410	0.0400	0.6805	1.0015
13	1300.00	89.94	7.520	38.67	0.2410	0.0400	0.6787	1.0016
14	1300.00	0.00	8.338	38.67	0.2410	0.0400	0.6769	1.0016

(F) L'approche de la question téléologique que permettent les résultats présentés ci-dessus dans ce chapitre repose, dans les deux cas envisagés, le cas sans contrôle (alinéa 5.10.D et § 5.7) et le cas avec contrôle (alinéa 5.10.E et § 5.8), sur la comparaison du plan obtenu par optimisation comportementale (alinéas 5.10.D et 5.10.E) avec le plan obtenu par simulation libre (§ 5.7 et 5.8). On note d'abord à ce sujet que, dans les deux cas, les conditions sont comparables (alinéa 5.10.A) et les modes d'exploitation les mêmes : même structure de base et même absence de protocole de resserrement d'exploitation, en particulier de condition finale (alinéas 5.6.B et 5.10.C), même fonction objectif et même protocole d'anticipation. Cela étant, les comparaisons conduisent aux observations suivantes : (F1) le cas sans contrôle ne fournit pas de réponse claire à la question téléologique en ce sens que le plan obtenu par optimisation comportementale est notablement différent de celui obtenu par simulation libre, en particulier ne fait pas apparaître de catastrophe à long terme par décroissance misérable de la population ; (F2) par contre, le cas avec contrôle fournit une réponse positive en ce sens que le plan obtenu par optimisation comportementale est assez voisin de celui obtenu par simulation libre, en particulier comporte une stabilisation analogue.

Cette expérimentation numérique montre que l'optimisation comportementale peut être justifiée, par une simulation libre avec anticipations donnant un résultat voisin, dans certains cas, mais pas dans d'autres. Ainsi, elle suggère, en liaison avec la question 5.9.I1 : (F3) la recherche de raisons formelles faisant que l'optimisation comportementale est justifiée dans le cas avec contrôle (observation F2 ci-dessus), mais pas dans le cas sans contrôle (observation F1). Plus généralement, par référence à la problématique du § 3.16, elle suggère : (F4) la recherche de critères, exprimés par des conditions sur les données, permettant de distinguer les cas où elle est justifiée.

§ 5.11 - EPILOGUE DU CHAPITRE 5

(A) Comme suite à l'épilogue du chapitre 4 (§ 4.14) et dans l'esprit des épilogues des chapitres 2 et 3, qui visent à préparer la suite du travail (alinéa 1.3.B, § 2.16 et 3.18), on revient ci-après sur certains passages du chapitre pour en souligner les lacunes et envisager les développements qu'elles réclament, en particulier via la poursuite de l'expérimentation numérique du modèle.

(B) A propos de la question téléologique, et plus spécialement de la question 5.10.F3, le rôle de la profondeur τ des anticipations est à étudier, au-delà de la valeur $\tau = 1$ retenue pour l'expérimentation présentée (alinéas 5.5.G et 5.6.B), cela entre autres en fonction de l'idée - à préciser - que l'exploitation par simulation se rapproche de celle par optimisation comportementale lorsque la profondeur τ augmente.

(C) En ce qui concerne la question 5.9.I1, qui est évidemment à aborder en même temps que la question 5.10.F3, on rappelle d'abord que la procédure empirique du § 5.9 n'a été utilisée qu'à défaut de pouvoir mettre en oeuvre la procédure de simulation sous contraintes (alinéas 5.6.C et 5.9.A). Toutefois, vu la lourdeur prévisible de cette dernière, sans parler du dénuement concernant la résolution des problèmes à optimisations multiples qu'elle pose (alinéas 3.15.F et 3.14.I), il peut être tentant d'essayer de (C1) systématiser la procédure du § 5.9, de l'étendre à la détermination de schémas de contrôle engendrant, par simulation libre, des plans satisfaisant d'autres conditions que la stabilisation à long terme, par exemple un scénario de croissance du niveau de pollution. A propos d'une telle extension, on souligne que la procédure empirique, telle qu'elle est mise en oeuvre au § 5.9, présente l'inconvénient de résoudre un problème qui n'est pas précisément, formellement, posé, en ce sens que la détermination du schéma de contrôle $\hat{u}$, par la relation (5.51), après la détermination du plan optimum présenté à l'alinéa 5.9.G, ne repose pas sur une définition précise, en termes de protocole d'exploitation, de la stabilisation voulue, définition que réclamerait par contre la procédure de simulation sous contraintes (alinéa 5.6.C). Ainsi, l'extension envisagée réclamerait d'abord (C2) l'explicitation de cette définition, qui est d'ailleurs aussi nécessaire à l'approche de la question 5.9.I1.

(D) En attendant, mais aussi pour contribuer à cette explicitation, on peut envisager d'aborder le propos 5.11.C1 par une expérimentation numérique consistant à faire varier, dans la procédure du § 5.9, le protocole de resserrement d'exploitation Γ^{o} et la fonction objectif Q (alinéas 5.9.D,F). Le modèle et le logiciel correspondant sont disponibles pour de tels essais, mais, tout en les réalisant et spécialement s'ils sont concluant, il faut se garder d'attribuer à la procédure en cause une valeur opérationnelle, sauf, bien sûr en cas de réponse satisfaisante à la question 5.9.I1 et à la question que pose l'explicitation 5.11.C2 ci-dessus.

(E) Parmi les variantes à essayer on souligne celle consistant à se donner un scénario de croissance de la population plutôt qu'un scénario de croissance de la consommation unitaire (alinéa 5.9.D). Plus généralement, le modèle présenté peut aussi être utilisé, comme les modèles usuels, avec une évolution exogène de la population (aliné 4.14.C). En particulier, une telle exploitation à scénario de population exogène est utile - et a été utilisée lors de l'expérimentation préalable (alinéas 4.14.A,B,D) - pour caler le modèle en ce qui concerne la représentation du système productif.

(F) Enfin, parmi les lacunes de l'expérimentation présentée, figure évidemment la limitation au cas déterministe (alinéa 5.4.C). Pour dépasser cette limitation, on pourrait, pour commencer, introduire un arbre d'événements S comportant, à une date > 0, une seule bifurcation faisant ainsi apparaître deux chemins, un chemin régulier et un chemin à surprises, se distinguant par des valeurs différentes des principales données (coefficients de dépréciation, d'absorption, etc.). Pour des arbres S plus complexes, cette expérimentation devrait accompagner la réflexion qui est a mener sur les liens entre la représentation de l'incertitude utilisée ici et la théorie usuelle, probabiliste, du contrôle stochastique (alinéas 1.3.F, 2.1.H, 2.16.A).

ANNEXE - COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

Cette annexe contient divers compléments mathématiques : au § A.1, lien entre les deux formes des fonctions objectif séparables [relation (2.49)] ; aux § A.2 à A.4, démonstration du théorème de Bellman (§ 2.12) ; au § A.5, caractérisation des structures de contrôle à anticipations [propriété (3.44)] ; au § A.6, indications sur les problèmes de double optimisation. Pour simplifier les notations aux § A.1 à A.4, on y suppose que θ = T, i.e. que $S^{\theta} = S$ (alinéa 2.1.E).

§ A.1 - LIENS ENTRE FONCTIONS OBJECTIFS SEPARABLES

(A) Etant donné un plan (ξ, η), l'égalité (2.49) annoncée résulte de la succession de transformations suivante :

(A.1) $$\hat{q}^{\pi}(\xi, \eta) = \sum_{s \in S} \pi(\{s\})\, \hat{q}^{\#}_{s}(x^{\xi}_{s}, y^{\eta}_{s}),$$ par définition (2.46) de $\hat{q}^{\pi}$,

(A.2) $$= \sum_{s \in S} \pi(\{s\}) \sum_{t \in T} q_{s(t)}(\xi_{s(t)}, \eta_{s(t)}),$$

par définitions, (2.14) de $(x^{\xi}_{s}, y^{\eta}_{s})$ et (2.48) de $\hat{q}^{\#}_{s}(x^{\xi}_{s}, y^{\eta}_{s})$,

(A.3) $$= \sum_{t \in T} \sum_{s \in S} \pi(\{s\})\, q_{s(t)}(\xi_{s(t)}, \eta_{s(t)}),$$

par inversion des sommations sur S et sur T,

(A.4) $$= \sum_{t \in T} \sum_{s \in S_t} \sum_{s \in S_s} \pi(\{s\})\, q_{s(t)}(\xi_{s(t)}, \eta_{s(t)}),$$

puisque, pour chaque $t \in T$, S est la réunion des ensembles disjoints S_s $(s \in S_t)$,

(A.5) $$= \sum_{t \in T} \sum_{s \in S_t} \sum_{s \in S_s} \pi(\{s\})\, q_s(\xi_s, \eta_s),$$

puisque, par définition de S_s, $s(t) = s$ pour tous $s \in S_t$ et $s \in S_s$,

(A.6) $$= \sum_{t \in T} \sum_{s \in S_t} q_s(\xi_s, \eta_s) \sum_{s \in S_s} \pi(\{s\}),$$

puisque $\hat{q}_s(\xi_s, \eta_s)$ ne dépend pas de s,

(A.7) $$= \sum_{t \in T} \sum_{s \in S_t} q_s(\xi_s, \eta_s)\, \pi(S_s)$$

par additivité de la mesure π sur S.

(A.8) $$= \sum_{s \in S} q_s(\xi_s, \eta_s)\, \pi(S_s),$$

puisque S est la réunion des ensembles disjoints S_t $(t \in T)$.

§ A.2 - THEOREME DE BELLMAN : PRELIMINAIRES

(A) Se plaçant dans la situation du théorème (alinéa 2.12.C), on suppose donnée une structure de Bellman **valuée** (X, Y, F, G, q) (alinéa 2.12.A), à laquelle sont associés les multiplets $(V_s, s \in S)$ et $(W_s, s \in S)$ des fonctions de Bellman, par les relations (2.51) à (2.54) [Ab].

(B) On va utiliser les propriétés (A.10) à (A.12) ci-après d'un plan viable $(\xi, \eta) = (\xi_s, \eta_s, s\epsilon S)$:

(A.10) pour tout $s\epsilon S$, $\quad W_s(\xi_s, \eta_s) \leq V_s(\xi_s)$;

(A.11) pour tout $s\epsilon S\backslash S_T$, $\quad W_s(\xi_s, \eta_s) = q_s(\xi_s, \eta_s) + \sum_{\hat{s}\epsilon s+} V_{\hat{s}}(\xi_{\hat{s}})$;

(A.12) pour tout $s\epsilon S$, (a) pour tout $\sigma\epsilon [s>$, $\quad V_\sigma(\xi_\sigma) = W_\sigma(\xi_\sigma, \eta_\sigma)$,

entraîne (b) $V_s(\xi_s) = \sum_{\sigma\epsilon [s>} q_\sigma(\xi_\sigma, \eta_\sigma)$.

Les propriétés (A.10) et (A.11) résultent directement des définitions, d'un plan viable, des fonction V_s et des fonctions W_s $(s\epsilon S)$. La relation (A.12) pour $s\epsilon S_t$ peut être établie par récurrence décroissante sur $t\epsilon \mathbf{T}$ à partir de la propriété (A.11), compte tenu de ce que les ensembles $]\hat{s}>$, $\hat{s}\epsilon s+$, forment une partition de $]s>$.

§ A.3 - <u>THEOREME DE BELLMAN</u> : <u>CONDITION NECESSAIRE</u>

(A) Afin d'établir la **condition nécessaire** du théorème, il s'agit de montrer que, si la structure de Bellman est **strictement valuée**, la relation locale (2.55) est vérifiée, dès lors que (ξ^*, η^*) est un plan optimum, i.e. un plan viable tel que,

(A.13) pour tout plan viable (ξ, η),

(a) $\sum_{s\epsilon S} q_s(\xi_s, \eta_s) \leq \sum_{s\epsilon S} q_s(\xi^*_s, \eta^*_s)$.

(B) Pour cela, on va d'abord montrer que,

(A.14) pour tout $s\epsilon S$ et tout $y \in G_s(\xi^*_s)$, (a) $W_s(\xi^*_s, y) \leq \sum_{\sigma\epsilon [s>} q_\sigma(\xi^*_\sigma, \eta^*_\sigma)$.

D'où on déduira la relation (2.55), i.e.,

(A.15) pour tout $s\epsilon S$, (a) pour tout $y \in G_s(\xi^*_s)$, $\quad W_s(\xi^*_s, y) \leq W_s(\xi^*_s, \eta^*_s)$,

et la relation (2.56) annoncées.

(C) Afin d'établir la propriété (A.14), fixant $s\epsilon S$ et $y \in G_s(\xi^*_s)$, on construit un plan viable (ξ, η) tel que,

(A.16) (a) si $s \neq s°$, pour tout $\sigma\epsilon S\backslash[s>$, $\quad \xi_\sigma = \xi^*_\sigma$ et $\eta_\sigma = \eta^*_\sigma$,

(b) $\xi_s = \xi^*_s$ et $\eta_s = y$,

(c) pour tout $\sigma\epsilon]s>$, (c_σ) $V_\sigma(\xi_\sigma) = W_\sigma(\xi_\sigma, \eta_\sigma)$.

On montre qu'un tel plan existe, par récurrence descendante dans le sous-arbre $[s>$, en vertu de l'hypothèse que la structure est strictement valuée, qui assure, pour chaque $\sigma\epsilon]s>$, l'existence de $\eta_\sigma \in G_\sigma(\xi_\sigma)$ vérifiant $(A.16c_\sigma)$.

Cela étant, supposant d'abord que $s\epsilon S\backslash S_T$, la relation (A.16c) entraîne que la condition (A.12a), avec $\hat{s}$ mis pour s, est satisfaite pour tout $\hat{s}\epsilon s+$. Il résulte donc de l'implication (A.12), appliquée à ce plan (ξ, η), que (A.12b) a lieu pour tout $\hat{s}\epsilon s+$. Ainsi, puisque les ensembles $]\hat{s}>$, $\hat{s}\epsilon s+$, forment une partition de $]s>$, on obtient, en sommant sur ces $\hat{s}$, (A.17) $$\sum_{\hat{s}\in s+} V_{\hat{s}}(\xi_{\hat{s}}) = \sum_{\sigma\in]s>} q_\sigma(\xi_\sigma, \eta_\sigma).$$

Donc, d'après la relation (A.11), avec $\hat{s}$ mis pour s, et la condition (A.16b),

(A.18) $$W_s(\xi_s^*, y) = \sum_{\sigma\in[s>} q_\sigma(\xi_\sigma, \eta_\sigma).$$

D'où la relation (A.14a) pour $s\epsilon S\backslash S_T$, d'après la propriété d'optimalité (A.13) de (ξ^*, η^*), vu que $\Sigma_{\sigma\epsilon S\backslash[s>} q_\sigma(\xi_\sigma, \eta_\sigma) = \Sigma_{\sigma\epsilon S\backslash[s>} q_\sigma(\xi_\sigma^*, \eta_\sigma^*)$, d'après la relation de définition (A.16a). Enfin, lorsque $s\epsilon S_T$, la relation (A.14a) se réduit à $q_s(\xi_s^*, y) \leq q_{\hat{s}}(\xi_{\hat{s}}^*, \eta_s^*)$ et sa démonstration à l'argument précédent.

(D) Pour achever d'établir la condition nécessaire, on va déduire de (A.14), par récurrence décroissante sur $t\epsilon T$, que les relations (A.15a) et (2.56a,b) sont vérifiées pour tout $s\epsilon S_t$. D'abord, pour $s\epsilon S_T$, (A.15a) et (2.56a,b) résultent directement de la relation (A.14a) et des définitions (2.51) à (2.54) de V_s et de W_s. Supposant ensuite que les relations (A.15a) et (2.56a,b) sont vérifiées pour tout $s\epsilon S_t$, avec $t > 0$, et fixant $s\epsilon S_{t-1}$, on écrit, pour $y \in G_s(\xi_s^*)$, la relation (A.14a) sous la forme,

(A.19) $$W_s(\xi_s^*, y) \leq q_s(\xi_s^*, \eta_s^*) + \sum_{\hat{s}\in s+} \sum_{\sigma\in[\hat{s}>} q_\sigma(\xi_\sigma^*, \eta_\sigma^*).$$

Mais, puisque s+ est contenu dans S_t, l'hypothèse de récurrence relative à la relation (2.56a) entraîne que,

(A.20) $$\text{pour tout } \hat{s}\epsilon s+, \quad \sum_{\sigma\in[\hat{s}>} q_\sigma(\xi_\sigma^*, \eta_\sigma^*) = V_{\hat{s}}(\xi_{\hat{s}}^*).$$

Or, en portant cette égalité au second membre de (A.19), on obtient,

(A.21) $$W_s(\xi_s^*, y) \leq q_s(\xi_s^*, \eta_s^*) + \sum_{\hat{s}\in s+} V_{\hat{s}}(\xi_{\hat{s}}^*).$$

D'où (A.15a), pour $s\epsilon S_t$, puisque, d'après (A.11),

(A.22) $$W_s(\xi_s^*, \eta_s^*) = q_s(\xi_s^*, \eta_s^*) + \sum_{\hat{s}\in s+} V_{\hat{s}}(\xi_{\hat{s}}^*).$$

Par ailleurs, par définition de V_s, (2.56b) résulte directement de (A.15a). Enfin, (2.56a), pour $s\epsilon S_t$, résulte de ce que l'hypothèse de récurrence correspondante et (A.22) entraînent,

(A.23) $$W_s(\xi_s^*, \eta_s^*) = q_s(\xi_s^*, \eta_s^*) + \sum_{\hat{s}\in s+} \sum_{\sigma\in[\hat{s}>} q_\sigma(\xi_\sigma^*, \eta_\sigma^*).$$

Ce qui achève d'établir la condition nécessaire et les relations (2.56).

§ A.4 - THEOREME DE BELLMAN : CONDITION SUFFISANTE

(A) La **condition suffisante** résulte des propriétés (F1) et (F2) ci-après, en faisant $s = s°$ dans les relations (A.24a) et (A.25a) correspondantes :

(F1) pour tout plan viable (ξ, η),

(A.24) $$\text{pour tout } s\epsilon S, \quad \text{(a)} \quad W_s(\xi_s, \eta_s) \geq \sum_{\sigma\in[s>} q_\sigma(\xi_\sigma, \eta_\sigma) \;;$$

(F2) pour tout plan viable (ξ^*, η^*) vérifiant (A.15),

(A.25) pour tout $s \epsilon S$, (a) $W_s(\xi_s^*, \eta_s^*) = \sum_{\sigma \epsilon [s>} q_\sigma(\xi_\sigma^*, \eta_\sigma^*)$.

Ces propriétés peuvent être établies comme suit sous la seule hypothèse que la structure est **valuée**. D'abord, la relation (A.25) résulte immédiatement de la l'implication (A.12), puisque l'hypothèse (A.15) sur (ξ^*, η^*) entraîne que la condition (A.12a) est vérifiée pour tout $s \epsilon S$. Ensuite, on établit la relation (A.24a) pour $s \epsilon S_t$ par récurrence décroissante sur $t \epsilon \mathbf{T}$ à partir des propriétés (A.10) et (A.11). En effet, d'une part cette relation est immédiate pour $s \epsilon S_T$, par définition (2.53) de W_s, d'autre part qu'elle soit vérifiée pour tout $s \epsilon S_{t-1}$, avec $t > 0$, dès qu'elle l'est pour tout $\hat{s} \epsilon S_t$ résulte de la relation,

(A.26) $W_s(\xi_s, \eta_s) \geq q_s(\xi_s, \eta_s) + \sum_{\hat{s} \epsilon s+} W_{\hat{s}}(\xi_{\hat{s}}, \eta_{\hat{s}})$,

elle même obtenue en conjuguant (A.10) avec $\hat{s}$ mis pour s et (A.11). Ce qui achève d'établir la condition suffisante et le théorème.

(B) Les propriétés (F1) et (F2) ci-dessus contiennent le **principe d'optimalité de Bellman** [Ac] qui s'énonce ici :

(A.27) pour chaque $s \epsilon S$, le multiplet $(\xi_\sigma^*, \eta_\sigma^*, \sigma \epsilon [s>)$ maximise la fonction objectif après s, $\sum_{\sigma \epsilon [s>} q_\sigma(\xi_\sigma^*, \eta_\sigma^*)$, parmi tous les plans viables après s, $(\xi_\sigma, \eta_\sigma, \sigma \epsilon [s>)$, telles que $\xi_s = \xi_s^*$.

Pour cet énoncé, on définit un plan viable après $s \epsilon S$, comme un multiplet $(\xi_\sigma, \eta_\sigma, \sigma \epsilon [s>)$ vérifiant, pour tout $\sigma \epsilon [s>$, les relations (2.6a,b), (2.7a) et (2.8a), avec σ mis pour s [Ad].

§ A.5 - CARACTERISATION DES STRUCTURES DE CONTROLE A ANTICIPATIONS

(A) La caractérisation (3.44) découle en fait presque immédiatement des définitions, la difficulté résidant surtout dans l'accumulation de ces dernières et dans le caractère abstrait, non usuel, des êtres mathématiques en cause. On détaille donc ci-après une démonstration.

(B) Afin de concentrer la terminologie, on désigne, d'abord par **Pa** l'ensemble des plans qui sont admissibles pour la structure de base $\mathbf{\Sigma}_b = \mathbf{\Sigma}_b(\Delta, \tau)$ et simplement conditionnés par le protocole d'anticipation B, puis par $\mathbf{P_a}(\mathbf{\Sigma})$ l'ensemble des plans admissibles pour la structure (de contrôle à commandes doubles) $\mathbf{\Sigma}$, enfin par $\underline{\mathbf{\Sigma}}$ la structure $\underline{\mathbf{\Sigma}}(\Delta, \tau, B)$ en cause.

(C) Cela étant, on va d'abord montrer que la caractérisation (3.44) résulte des propriétés (A.29) et (A.30) ci-après, où $\mathbf{\Sigma}'$ et $\mathbf{\Sigma}''$ désignent des structures à commandes doubles :

(A.29) $\mathbf{P_a}(\underline{\mathbf{\Sigma}}) = \mathbf{Pa}$;

(A.30) si (a) les structures $\mathbf{\Sigma}'$ et $\mathbf{\Sigma}''$ possèdent la propriété (3.44a) et si (b) la structure $\mathbf{\Sigma}'$ est consistante, alors,

(c) $\mathbf{\Sigma}'$ est un resserrement de $\mathbf{\Sigma}''$ dès que (c1) $\mathbf{P_a}(\mathbf{\Sigma}') \subset \mathbf{P_a}(\mathbf{\Sigma}'')$.

D'abord, la propriété (A.29) signifie que la structure $\underline{\mathbf{\Sigma}}$ vérifie la propriété (3.44b). Ensuite, soit $\mathbf{\Sigma}$ une structure vérifiant les propriétés (3.44a,b), en particulier telle que $\mathbf{P_a}(\mathbf{\Sigma}) = \mathbf{Pa}$. Ainsi, on a $\mathbf{P_a}(\mathbf{\Sigma}) = \mathbf{P_a}(\underline{\mathbf{\Sigma}})$, d'après la propriété (A.29). Dès lors, supposant que la structure $\underline{\Sigma}$ est consistante, la propriété (A.30c), avec $\underline{\Sigma}$ mis pour Σ' et Σ mis pour Σ'', entraine que $\underline{\Sigma}$ est un resserrement de Σ, donc que la structure Σ est aussi consistante. La propriété (A.30c), avec Σ mis pour Σ' et $\underline{\Sigma}$ mis pour Σ'' entraîne alors que Σ est un resserrement de $\underline{\Sigma}$; d'où $\Sigma = \underline{\Sigma}$, d'après la propriété (2.20), et l'unicité de la structure $\underline{\Sigma}$.

(D) La propriété (A.29) résulte directement des définitions, vu que, pour qu'un plan $(\xi, \zeta, u) = (\xi_s, \zeta_s, u_s, s \epsilon S^{\theta})$, relatif à la structure de base Σ_b, soit simplement conditionné par le protocole d'anticipation $B = (B_s, s \epsilon S^{\theta})$, il faut et il suffit qu'il vérifie (alinéa A.5.G) :

(A.31) pour tout $s \epsilon S^{\theta}$, (a) il existe une anticipation (ε, δ) après s telle que (a1) $(\varepsilon, \delta) \in B_s(\xi_s, u_s)$.

(E) Afin d'établir la propriété (A.30), on suppose que les structures Σ' et Σ'' vérifient les conditions (A.30a,b) et on désigne leurs correspondances d'admissibilité par $G' = (G'_s, s \epsilon S^{\theta})$ et $G'' = (G''_s, s \epsilon S^{\theta})$. Ainsi, il s'agit de montrer que, sous la condition (A.30c1), on a, pour $s \epsilon S^{\theta}$ et $(e, d, \underline{u}) \in G'_s$ arbitraires,

(A.32) $(e, d, \underline{u}) \in G''_s$.

Or, en vertu de sa consistance [relation (2.5)], la structure Σ' admet un plan $(\xi, \zeta, u) = (\xi_{\sigma}, \zeta_{\sigma}, u_{\sigma}, \sigma \epsilon S^{\theta})$, admissible et tel que,

(A.33) $(\xi_s, \zeta_s, u_s) = (e, d, \underline{u})$.

D'après la condition (A.30c1), ce plan est aussi admissible pour la structure Σ''. En particulier,

(A.34) $(\xi_s, \zeta_s, u_s) \in G''_s$.

D'où la relation (A.32), d'après les relations (A.33) et (A.34). Ce qui achève d'établir la propriété (A.30).

(F) On note que la démarche précédente - en particulier dans son caractère élémentaire, basé sur les propriétés (A.29) à (A.31), qui permet de ne pas faire intervenir les déploiements de plans (alinéa A.5.G) - ne s'étend pas au mode de conditionnement fort : la définition, parallèlement à celle de la structure $\underline{\Sigma}(\Delta, B)$, d'une structure $\underline{\Sigma}(\Delta, \tau, B)$ fortement conditionnée par le protocole d'anticipation B, va être plus complexe, car devant s'exprimer en termes de déploiement. Cette définition est à éclaircir en même temps que la caractérisation correspondante (alinéa 3.11.F).

(G) On aurait pu définir directement, par la condition (A.31), i.e. sans la considération de déploiements, les plans simplement conditionnés par un protocole d'anticipation B. La définition en termes de déploiement a été plutôt retenue à cause du conditionnement fort qui réclame cette considération (alinéa A.5.F).

§ A.6 - PROBLEMES A OPTIMISATIONS MULTIPLES

(A) Dans ce § A.6, on donne une formulation générale des problèmes à optimisations multiples qui inclut comme cas particuliers, outre les problèmes de double optimisation, ceux posés par la détermination des plans viables ou optimums relatifs aux structures de contrôle à anticipations (§ 3.15) et ceux posés par la déterminations de l'équilibre général sous sa forme classique. On souligne que, conformément à l'orientation générale de ce texte (alinéa 1.3.A), il s'agit ici seulement de la formulation de ces problèmes et non des méthodes de résolution.

(B) On suppose donnés : d'abord, un ensemble Z, un ensemble fini H d'indices et, pour chaque $h \in H$, un ensemble A_h, tous ensembles non vides ; puis, pour chaque $h \in H$, une correspondance β_h de Z dans A_h et une fonction numérique J_h sur $Z \times A_h$; enfin un sous-ensemble C de l'ensemble produit $Z \times \mathbf{A}$ et une fonction numérique $\mathbf{Q}$ sur ce dernier ensemble, en désignant par $\mathbf{A}$ l'ensemble produit $\prod_{h \in H} A_h$, ensemble dont les éléments sont les multiplets $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_h,\ h \in H)$, avec $\mathbf{a}_h \in A_h$, pour tout $h \in H$. Cela étant, les deux problèmes envisagés ci-après (alinéas A.6.C,D) concernent la déterminations de couples $(z,\mathbf{a})$, éléments de l'ensemble produit $Z \times \mathbf{A}$, qui sont appelés **programmes**.

(C) Le premier problème, ou **problème de base**, consiste en la détermination d'un programme $(\underline{z},\underline{\mathbf{a}})$ tel que :

(A.35) pour tout $h \in H$, (a) $\underline{\mathbf{a}}_h \in \beta_h(\underline{z})$,

(b) $J_h(\underline{z},\underline{\mathbf{a}}_h) = \operatorname{Sup}\{J_h(\underline{z},a) \mid a \in \beta_h(\underline{z})\}$;

(A.36) $(\underline{z},\underline{\mathbf{a}}) \in C$.

On désigne par **Pb** l'ensemble des solutions de ce problème, i.e. le sous-ensemble de l'ensemble $Z \times \mathbf{A}$ constitué des programmes $(\underline{z},\underline{\mathbf{a}})$ vérifiant les contraintes (A.35) et (A.36). Pour chaque $h \in H$, l'optimisation (A.35a,b), consistant en la détermination de $\underline{\mathbf{a}}_h$ lorsque $\underline{z}$ est donné, est dite de **second rang**. De plus, la relation (A.36) est appelée **contrainte commune** et le problème est dit **sans contrainte commune** si cet contrainte est tautologique, i.e. si $C = Z \times \mathbf{A}$. Il est alors en général très sous-déterminé. Par ailleurs, la fonction objectif $\mathbf{Q}$ ne joue aucun rôle dans ce problème.

(D) Le second problème, ou **problème complet**, consiste en la détermination de programmes $(\underline{\underline{z}},\underline{\underline{\mathbf{a}}})$ tels que :

(A.37) (a) $(\underline{\underline{z}},\underline{\underline{\mathbf{a}}}) \in \mathbf{Pb}$,

(b) $\mathbf{Q}(\underline{\underline{z}},\underline{\underline{\mathbf{a}}}) = \operatorname{Sup}\{\mathbf{Q}(\underline{z},\underline{\mathbf{a}}) \mid (\underline{z},\underline{\mathbf{a}}) \in \mathbf{Pb}\}$.

On désigne par **Pc**($\mathbf{Q}$) l'ensemble des solutions de ce problème. L'optimisation (A.35) est alors dite de **premier rang**.

(E) Les problèmes dits usuellement de **double optimisation** correspondent au problème complêt ci-dessus (alinéa A.6.D), lorsque, d'une part l'ensemble H est un singleton, d'autre part ce problème est sans contrainte commune ([Ae]).

(F) La détermination de plans viables envisagée à l'alinéa 3.15.B correspond au problème de base (alinéa A.6.C), lorsque le protocole d'anticipation B est de type argument max (alinéa 3.15.E) : d'abord, l'ensemble Z est l'ensemble $\mathbf{P}(\boldsymbol{\Sigma})$ des plans relatifs à la structure de contrôle $\boldsymbol{\Sigma}$ en cause, l'ensemble H est le sous-arbre S^θ et, pour chaque $s \in S^\theta$, l'ensemble A_s est l'ensemble $A_s(\Delta,\tau)$ des anticipations après s (alinéa 3.5.A) ; puis, pour chaque $s \in S^\theta$, la correspondance β_s associe, à chaque plan $z = (\xi_s,\zeta_s,u_s,\ s \in S^\theta)$, le sous-ensemble $\mathring{B}_s(\xi_s,u_s)$ de A_s, tandis que J_s est la fonction objectif locale (alinéa 3.15.E) ; enfin l'ensemble C est associé au protocole de resserrement d'exploitation Γ, en ce sens que C est l'ensemble des programmes $(z,\mathbf{a})$, avec $z = (\xi_s,\zeta_s,\mathbf{u}_s,\ s \in S^\theta)$, tels que, pour tout $s \in S^\theta$, $(\xi_s,\zeta_s,\mathbf{u}_s) \in \Gamma_s$.

Le problème de contrôle optimal (3.65) correspond alors au problème complêt ci-dessus (alinéa A.6.D) lorque la fonction objectif **Q** est telle que, pour tout programme (z,**a**), **Q**(z,**a**) = $Q(z)$, où Q est la fonction objectif considérée à l'alinéa 3.15.D.

(G) Dans le cas de l'équilibre général, classique, c'est d'abord le problème de base (alinéa A.6.C) qui est concerné selon le schéma standard, limité pour simplifier au cas d'une économie d'échange [Af] : l'ensemble Z est le simplexe des prix et l'ensemble H est la nomenclature des consommateurs, tandis que, pour chaque $h \in H$, A_h, β_h et J_h sont respectivement l'ensemble de consommation, la correspondance de budget et la fonction d'utilité du consommateur h ; enfin la contrainte commune exprime l'équilibre physique. Les éléments de l'ensemble **Pb** sont alors les équilibres. Cependant, il est aussi possible, selon l'approche dite de l'optimisation simultanée [Ag], de faire apparaître, dans certains cas, l'équilibre comme solution du problème complêt, sans contrainte commune, en prenant comme fonction objectif **Q** la valeur de la demande excédentaire. De plus, en cas de non unicité du problème de base, en particulier dans le cadre de l'extension du schéma classique ci-dessus par la prise en compte de l'Etat [Ah], la multiplicité des solutions de ce problème peut être analysée par appel au problème complêt relativement à diverses fonctions objectif **Q** [Aj].

NOTES

1a [1.1.A, 3.1.D] Le qualificatif "macroéconomique" est employé ici au sens large, qu'il a dans l'expression "modèle macroéconomique empirique" (1w), pour signifier la prise en compte de l'ensemble des activités économiques ayant lieu sur un territoire, sans limitation du détail de la représentation, tant de la base physique que des superstructures, en particulier, sans la limitation du haut niveau d'agrégation qui marque le modèle ISLM (par ex., [104], chap. 5) et les modèles de croissance endogène (par ex., [94], p. 6-8, [8], chap. 1 à 5), même si ces derniers jouent un rôle (§ 1.4, chap. 4 et 5). Par contre, le qualificatif "dynamique", concernant un modèle macroéconomique, est employé au sens strict, pour signifier que le modèle prend en compte les comportements des acteurs décentralisés, en principe, de façon exhaustive, au niveau d'agrégation considéré (alinéa 3.1.F). Ainsi, les principaux exemples de modèles dynamiques sont les modèles pouvant être exploités par simulation récursive, mais ils ne sont pas les seuls : cette multiplicité est un des motifs du texte, comme il ressort du § 1.1.

1b [1.1.B] Par ex., [45], p. 110 et 281, [98], p. 57-8, [6], p. xviii, [99].

1c [1.1.B] Par ex., [98], p. 58. Le terme "clairvoyance" pose question tant que le sujet, l'acteur, de la clairvoyance n'est pas précisé, ce que ne suffit évidemment pas à faire l'expression désastreuse "forward-looking model" qui, c'est un comble, semble l'attribuer (la clairvoyance) au modèle (par ex., [98], p. 57).

1d [1.1.C] Par ex., [45], chap. 9.

1e [1.1.D, 3.14.C] Par principe de causalité, on entend ici, au risque d'être un peu schématique, la conception selon laquelle il n'existe pas de causalité en sens inverse du temps, i.e. selon laquelle c'est le passé et le présent qui conditionnent l'avenir et non l'inverse. Il est appelé aussi principe de raison suffisante (par ex., [85], p. 133, 136, 155, 187) ou principe d'objectivité (par ex., [101], p. 32). Cette mention du principe de causalité est mise ici pour marquer la différence avec la conception inverse qui semble sous-jacente aux justifications directes de l'optimisation intertemporelle (alinéas 1.1.B, 2.14.F, 3.16.D).

1f [1.1.E] Cette problématique est délimitée au début du chapitre 3 (alinéas 3.1.D-F). Que la théorie du contrôle ne soit guère mêlée à la théorie de l'équilibre général intertemporel ne tient pas seulement au cloisonnement des disciplines académiques : cela tient aussi à la prégnance de la doctrine libérale en économie mathématique, prégnance qui tend à exclure, au moins en dehors de l'économie de l'entreprise, tout ce qui rappelle la planification dirigiste, en particulier la théorie du contrôle, considérée comme une discipline pour ingénieurs. Par contre, on ne peut pas expliquer ainsi que les travaux d'économie de l'environnement, comme ceux envisagés ici (1o), ne fassent pas plus appel à la théorie du contrôle, vu leur orientation souvent assez dirigiste.

1g [1.1.E] Par ex., dans le traité de Lions [89], fondamental pour ce qui est des méthodes mathématiques d'optimisation, l'aspect intertemporel de la théorie n'apparait que comme cas particuliers (par ex., p. 125 et 302) d'un problème général, intemporel, d'optimisation qui est présenté, de façon informelle, dans l'introduction (p. VII). Inversement, dans les exposés plus appliqués, si l'approche conceptuelle et méthodologique existe, elle repose essentiellement sur le traitement d'exemples, sans vraie présentation axiomatique du cadre mathématique (par ex., [16], chapitre 1). C'est à défaut d'avoir trouvé une telle présentation qu'on la tente dans le présent texte (alinéa 1.2.D), conformément à son orientation constructive.

1h [1.3.B] Comme précédents de la réflexion présentée ici sur la structure et l'exploitation des modèles macroéconomiques, en particulier en liaison avec la théorie du contrôle, on cite, parmi d'autres : d'une part les travaux menés dans les années 70 à partir des modèles français (par ex., [52], chap. 2, [19], chap. I), d'autre part ceux qui ont accompagné le développement du modèle ATHEMA (par ex., [34], [36] et [38]), enfin la théorie de la viabilité. Par rapport aux premiers, l'approche est ici plus formelle, axiomatique (alinéa 1.3.D), comme dans les seconds (par ex., chap. 2 de [34]), dans le prolongement de [41] (chap. 1, en particulier alinéa 1.2.G). Par rapport à la théorie de la viabilité, qui peut être considérée comme une axiomatisation partielle de la théorie du contrôle, on élargit le champ conceptuel - dans le cas du temps discret - en reprenant l'ensemble (alinéa 1.2.D), alors que la théorie de la viabilité ignore l'aspect "contrôle optimal" (alinéa 2.14.B,E).

1i [1.3.B, 4.14.B] Le qualificatif "artisanal", s'opposant surtout ici au qualificatif "institutionnel", signifie que le travail qui a conduit à ce texte, dans son propos méthodoligique, n'a résulté d'aucun demande institutionnelle. En fait, la réflexion méthodologique est actuellement très peu valorisée, si ce n'est totalement ignorée, par les experts, académiques ou technocratiques, qui ne s'intéressent guère qu'aux résultats, soit théoriques (un théorème, une méthode de calcul) pour les premiers, soit exploitables de façon opérationnelle (i.e. politique) pour les seconds. D'où la carence générale de réflexion méthodologique qui contribue à livrer le développement scientifique à l'influence des modes ou des marchés.

1j [1.3.B] Que de telles équipes soient difficiles à trouver ou à constituer actuellement - dans la discipline macroéconomique, s'entend, car il en existe évidemment, par exemple dans la grande industrie ou dans certains centres de recherche en physique - n'est pas une raison de ne pas se préoccuper de leur support théorique (sic).

1k [1.3.C] Voir à ce sujet [36], alinéa 1.d, p. 10.

1l [1.3.D, 3.1.A,B] Le caractère très général des structures étudiées aux chapitres 2 et 3 fait que les interprétations n'y concernent souvent que des catégories conceptuelles. Par contre, le modèle présenté au chapitre 4 et 5 donne lieu à des interprétations plus concrètes (par ex., § 4.3, 4.8, 4.11).

1m [1.3.E] Les articles de Shiller [118], Futia [66], Gouriéroux & al. [73], entre autres, joints à ceux (dits fondateurs) de Muth [105], Lucas & al. [92], Sargent & al. [116], donnent un exemple d'une telle opacité de l'interprétation, opacité qui est aggravée par l'utilisation systématique du formalisme le plus ambigu, à la Doob [57], en ce qui concerne les processus stochastiques. Les tentatives d'axiomatisation ultérieures (par ex., de Guesnerie [75], [76]) ne suffisent pas à la dissiper, en dépit de leur intérêt mathématique.

1n [1.3.F, 2.int.] La simplicité du cadre formel utilisé ici, qui généralise directement celui du cas déterministe, permet de centrer le propos sur l'expression des schémas d'utilisation des modèles intertemporels qui motive ce texte, plutôt que sur les difficultés de l'appareil probabiliste de la théorie du contrôle stochastique (par ex., [2], chap. 2 et 3, [58], [119], [121], chap. III), donc d'espérer rendre ce propos accessible à tout un milieu de praticiens des modèles macroéconomiques intertemporels qui, peut-être découragés par ces difficultés, font pratiquement de la théorie du contrôle sans le dire ou même le savoir, ce qui a des conséquences méthodologiques dommageables sur leurs travaux (alinéa 1.1.B,C,E, § 1.4 et 1.5). Cependant, le cadre utilisé est évidemment trop étroit, non seulement pour les applications usuelles de la théorie du contrôle stochastique, mais aussi pour la prise en compte des aléas locaux dans les modèles visés ici (alinéas 3.1.D-F). Il doit être dépassé par une conjugaison deux approches (alinéas 2.1.H et 2.16.A).

1o [1.4.A] Par ex., [59], [107], [108], [109], [97], [98], [25], [68].

1p [1.4.B] Ces fonctions d'utilité sociale sont surtout utilisées dans les modèles très agrégés (par ex., [107], p. 1315, et [108], p. 10) qui sont dérivés du modèle de croissance de Ramsey-Harod-Domar-Solow (par ex., [94], p. 7,8), mais elles le sont aussi dans certains modèles de plus grande taille (par ex., [97], p. 126, [109], p. 746, [68], p. 29).

1q [1.4.B] Plutôt que d'une application du théorème de Negishi [106], il s'agit de l'utilisation de la fonction d'utilité globale ("de bien-être social") qu'introduit ce théorème (par ex., [102], p. 106-8 et [68], p. 11 et 29).

1s [1.4.B] Par ex., [78], p. 271.

1t [1.4.B] Par ex., [11], p. 1,2. Une telle combinaison de deux critères cache en fait une double optimisation, l'optimisation de second rang représentant une évolution naturelle, via la maximisation d'une fonction d'utilité sociale, tandis que celle de premier rang représente une visée normative. L'introduction des modèles à anticipation (alinéa 1.2.B) va faire apparaître cette double optimisation (alinéas 3.15.E, 4.9.C, 5.6.C), tout en levant l'ambiguïté d'interprétation de l'optimisation en cause (alinéa 1.1.C) par son dédoublement.

1u [1.4.B, 4.13.B] Par ex., [45], p. 270-75, [11], § 4, p. 7, [83], p. 10.

1v [1.4.C] Par ex., [59].

1w [1.4.C] Par ex., modèle METRIC [84], modèle DMS et dérivés ([64], [22], [103]).

1x [1.4.C] Par ex., [82], chap. 1.

1y [1.4.D] Le formalisme introduit au chapitre 3 est conçu pour pouvoir inclure un "grand modèle" macroéconomique dont la base physique correspondrait au modèle chimérique de la planète brossé par Lions dans [91], p. 83. On souligne, à propos de ce modèle, l'ambition de rigueur axiomatique du formalisme présenté (alinéa 1.3.D) : on cherche à dépasser la présentation usuelle, mathématico-heuristique, des considérations générales sur les modèles opérationnels (comme celle ci-dessus de Lions, celle de Deleau & al. [52] ou celle de Boyer [19] ([1h])), par l'introduction de structures abstraites dont ces modèles puissent être, en toute rigueur, des cas particuliers (alinéas 1.2.C et 1.3.B-D).

1z [1.5.A] Théorie de l'équilibre général intertemporel (par ex., [65], [74]) et théorie des marchés incomplets (par ex., [112], [113], [95], [63]).

1A [1.5.A] Par ex., [63], p. 91.

1B [1.5.A] Par ex., [63], p. 92, [113], p. 937. Cette représentation de l'incertitude est reprise de façon autonome au § 2.1.

1C [1.5.B] Le lien entre anticipation et déroulement temporel est plus explicite dans les travaux sur l'équilibre général intertemporel où l'incertitude n'est pas prise en compte au moyen d'un arbre d'événements externes (par ex., [65], p. 1157). L'interprétation du multiplet $(x_\sigma, \sigma\epsilon[s]>)$ comme une anticipation est claire dans les écrits de Radner sous le vocable anglais "expectation" (par ex., [113], p. 940 et 955 sq), mais le lien avec le déroulement temporel manque. Le terme "anticipation" est utilisé dans [18], p. 8 et 40.

1D [1.5.C] On peut aussi mentionner à ce propos les travaux liant la théorie de l'équilibre général en avenir incertain et la théorie des assurances (par ex., [26]).

1E [1.6.A] Caractère inhabituel, du propos méthodologique, par rapport aux travaux usuels concernant les modèles économiques, travaux où les résultats priment sur les considérations méthodologiques : résultats théoriques à visée académique pour les travaux d'économie mathématique, résultats exploitables de façon opérationnelle pour ceux d'économie appliquée ([1i]).

1F [1.6.B] L'aboutissement naturel du travail qui a conduit à ce texte (§ 4.14) serait, au-delà de la modélisation économique, un traité général de modélisation. En effet, la question de la justification des modèles se pose dans tous les domaines de la science. En particulier, dans les sciences expérimentales l'intuition phénoménologique ("le sens physique") et la vérification expérimentale tendent à remplacer la réflexion formelle sur la justification (par ex., [85], p. 203, et [48]). Les conditions artisanales du travail effectué (alinéa 1.3.B) n'ont pas permis d'envisager un tel aboutissement : il devrait être une oeuvre collective.

2a [2.Int.] La théorie de la viabilité est annoncée dans [4], présentée dans [5] et illustrée dans [6], cela seulement à temps continu ; des éléments de la théorie du contrôle optimal à temps discrêt figurent, par ex., dans [2], § 1.7, p. 30, et § 2.1, p. 40, [16], p. 21, 59, 361, [61], chap. 4, p. 105 et 139 ; une approche de la programmation dynamique à temps discret - participant des deux théories, car conjuguant une optimisation intertemporelle avec un système d'inclusions aux différences finies - est utilisée par Stokey & al. dans [121], chap. 4 et 9. La présentation faite dans ce chapitre est à la fois indépendante et complémentaire de ces références, vu son propos méthodologique, axé sur l'agencement et l'interprétation des concepts plutôt que sur les méthodes de résolution (alinéa 1.3.A).

2b [2.1.A] Comme dans [16] ou [61].

2c [2.1.B] En fonction de la segmentation du temps (alinéa 2.1.G), on identifie couramment une date $t\epsilon\mathbf{T}$ et la période (élémentaire) commençant à cette date, ce qui permet des expressions comme, "à la période t", "pendant la période t", "période courante", "période précédente", etc.

2d [2.1.B] Un arbre (orienté), ou arborescence, sur S (ayant S comme ensemble de noeuds, de sommets) peut être considéré ici, sous la forme primitive qui est usuelle (par ex. [13], p. 149, [72], p. 113, [54], p. 3), comme une relation binaire R sur S, i.e. comme un sous-ensemble R de S×S, qui exprime la descendance directe en cause, en ce sens que (s',s") ∈ R équivaut à «s" est un descendant direct de s'». De plus, un arbre sur S est dit stratifié par **T** = [0,T] si tous les chemins menant de la racine aux feuilles ont la même longueur T. Dans ce cadre formel, les divers termes introduits aux alinéas 2.1.C-E - termes S_t ($t \in$ **T**), s+, s-, [s>, etc. - dérivent de la structure R d'arbre sur S statifié par **T**. Pour une approche axiomatique, directement en termes de la stratification, on peut définir la structure d'arbre sur S stratifié par **T** à partir de la suite (S_t, $t \in$ **T**) de sous-ensembles de S et de l'application p, s ⟶> s-, de $S \backslash S_0$ dans S, en supposant ces données telles que : (a1) la suite (S_t, $t \in$ **T**) forme une partition de S ; (a2) S_0 est un singleton {s°} ; (a3) pour chaque $t \in$ **T** tel que $t < T$, p applique S_{t+1} sur S_t. La relation primitive R de l'arbre est alors la relation p^{-1}, inverse de p, en ce sens «s" est un descendant direct de s'» équivaut à s' = p(s").

2e [2.1.G] La plupart des modèles macroéconomiques donnant lieu à des applications numériques sont à temps discret : modèles, très agrégés, dérivant du modèle ISLM (par ex., [88] et [107]) ou modèles de plus grande taille (par ex., [84] et [59]). Le rôle du temps discret apparaît clairement dans [88], p. 37.

2f [2.1.H] Voir, par ex., [47], chap. 7, p. 107-8, ou [63], p. 92.

2g [2.1.H] Au sens de [24].

2h [2.2.B] Cette convention formelle est, en particulier, utile pour la définition du noyau d'une structure (alinéa 2.8.B). Plus généralement, la possibilité que certains des ensembles considérés soient vides joue un rôle important dans la présentation de la théorie (en particulier, § 2.7 et 2.8).

2i [2.2.B,D] L'utilisation locale du qualificatif "admissible" - pour désigner une commande compatible avec un état du système, à un instant - est conforme à celle qui est usuelle en théorie du contrôle (par ex. [16], p. 22). Mais son utilisation globale - pour désigner un plan, dont toutes les commandes sont admissibles, sans qu'il soit nécessairement viable (alinéa 2.3.B) - est spécifique.

2j [2.2.C] Les concepts (de variables) d'état et de (paramètres de) commande, relatifs à un système dynamique, sont à la base de la théorie du contrôle et, plus généralement, de la démarche scientifique, via la théorie des systèmes (par ex., à défaut de mieux, [123], p. 9, et [85], p. 24 et 27). Dans la généralité de ce chapitre, leurs interprétations ne sont que conceptuelles, résident dans leurs agencements formels. Par exemple, la dépendance des espaces d'états X_s vis-à-vis de la date t, via celle vis-à-vis de l'aléa s, indique le caractère instantané du concept d'état adopté. Des interprétations concrètes ne seront envisagées qu'au chapitre 3, en termes des systèmes correspondant aux modèles macroéconomiques (alinéa 3.1.D). Du point de vue terminologique, on utilise ici systématiquement le terme "commande" plutôt que le terme "contrôle" de façon à réserver ce dernier pour désigner, dans la situation plus spécifique du chapitre 3, les composantes des commandes qui expriment les interventions des instances régulatrices (alinéas 3.1.D et 3.2.C). Par ailleurs, la dénomination "espace des états" semble plus adaptée aux systèmes, de type économique, envisagés (alinéas 1.1.A et 3.1.D) que celle "espace de phase" de la physique, surtout vu la variabilité du rapport de l'état au temps (état instantané ou état intertemporel) dans les divers types d'espace de phase, en mécanique classique, en mécanique quantique, en théorie des champs.

2k [2.2.D] Cette précision du formalisme est surtout nécessaire dans le cas où l'incertitude est effective, i.e. pour les événements $s \epsilon S^{\theta}$ tels que s+ n'est pas un singleton. Par contre, dans le cas déterministe, écrire $F_t(x,y)$ au lieu de $F_{t+1}(x,y)$, lorsque $(x,y) \epsilon G_t$, ne prête pas formellement à conséquence, même si la seconde écriture est sémantiquement plus correcte. On trouve d'ailleurs les deux écritures dans la littérature sur la théorie du contrôle à temps discrêt : par ex., la première dans [61], p. 103 et 105, la seconde dans [2], p. 30 et 40.

2m [2.3.A] L'expression "schéma de commande", qui n'est pas courante en théorie du contrôle, est introduite afin de réserver le mot "commande" pour désigner les commandes ponctuelles, i.e. les éléments des espaces Y_s ($s \epsilon S^{\theta}$), alors que ce mot, ou le mot "contrôle", désigne parfois - aussi - les multiplets de commandes individuelles (par ex., [16], p. 21, [61], p. 106, [2], p. 31). Elle correspond à l'expression anglaise "open loop control" (par ex. [5], p. 200) et son signifié n'est pas à confondre avec celui de l'expression "loi de commande" (par ex., [61] p. 106), remplacée ici par "stratégie" (§ 2.9) ([2y]).

2n [2.3.B, 2.4.B] Le qualificatif "viable" est emprunté à la théorie de la viabilité, bien que la propriété qu'il désigne soit plus forte ici que dans cette théorie ([5], par ex., p. 23, 88, 381). Dans les exposés usuels de théorie du contrôle, la viabilité telle qu'elle est entendue ici est couverte de façons diverses : entre autres, dans le cas déterministe, par le terme "trajectoire" ([16], p. 22, [2], p. 31) et, dans le cas stochastique, par l'expression "processus admissible" ([2], p. 40). On note que la signification globale donnéee ici au qualificatif "admissible", pour un plan ([2i]), est différente de celle de cette dernière. Par ailleurs, l'usage de la théorie de l'équilibre général, suggère le qualificatif "réalisable" (par ex., [47], p. 82).

2o [2.3.D] Les plans qui sont admissibles sans êtres viables interviennent seulement comme intermédiaires formels dans certaines caractérisations (alinéa 3.10.A). Ainsi, ils n'ont pas à être interprétés.

2p [2.4.D] On note que le cheminement $c_s(x°,\eta)$ ne dépend que de la restriction du schéma de commande η au chemin **s** et ne réclame que la viabilité sur ce dernier. Ainsi on pourrait introduire une simulation engendrée par un schéma de commande défini seulement sur le chemin **s**.

2q [2.4.E] Cet alinéa peut être sauté en première lecture. Il est surtout destiné à préparer l'étude des liens entre l'approche de l'incertitude utilisée ici et l'approche probabiliste de la théorie du contrôle stochastique, étude que l'on évite ici ([1n]), mais qui est à faire (alinéa 2.16.A). En particulier, la propriété de progressivité (2.16) correspond à celle de mesurabilité progressive des processus stochastiques par lesquels cette théorie représente les plans sous forme extensive.

2s [2.5.B] Que les espaces des commandes Y_s ($s \epsilon S^{\theta}$) ne soient pas affectés par le resserrement n'est qu'une convention commode. Par contre, il est important que les espaces des états puissent l'être (alinéas 2.8.B et 2.9.B), même s'ils ne le sont pas toujours (alinéa 2.6.A). Par ailleurs, on souligne que le vocable "resserrement" désigne une structure de contrôle et non l'opération de (res)serrage qui y conduit.

2t [2.6.D] On peut dire que tout protocole d'exploitation d'un modèle comporte un fond de "naturalité" du phénomène concerné, fond qui est aussi celui des variables de commande. Cependant, le champ d'application de cette remarque est considéré ici comme suffisamment limité pour ne pas supprimer la pertinence de la distinction faite entre protocoles (de resserrements) comportementaux et d'exploitation, de même que, conformément à la perspective d'économie régulée qui est envisagée au chapitre 3 (alinéa 3.1.D,E), on conserve aux variables de commande - au moins à certaines de leurs composantes - une interprétation en termes de politique publique, même pour des modèles d'économie libérale. Cette option distingue nettement la problématique de la théorie du contrôle envisagée ici de celle qui est sous-jacente à la théorie de la viabilité (alinéas 2.14.B,E).

2u [2.7.B] La propriété de définition (2.26) constitue une variante, adaptée au cadre à temps discret et incertitude finie, de celles des domaines et tubes de viabilité de la théorie à temps continu ([5], définitions 3.2.1, p. 84, et 11.1.2, p. 382), tandis que les propriétés (2.28) et (2.29b) constituent une variante du théorème de viabilité ([5], théorème 3.3.4, p. 91, théorème 6.1.4, p. 203, théorème 11.1.3, p. 382).

2v [2.8.B] La notion de noyau de viabilité constitue une variante, adaptée au cadre à temps discret et incertitude finie, de celle de même nom de la théorie à temps continu ([5], définition 4.1.1 et théorème 4.1.2, p. 121, théorème 11.1.3, p. 382) : la construction reposant sur les relations (2.31) à (2.34) correspond à celle introduite, dans [5], pour la démonstration du théorème 4.1.2 (haut de la page 122), tandis que la définition de [5] (p. 121) correspond à la propriété d'extrémalité (2.35).

2w [2.8.D] Dans les travaux concernant la théorie de la viabilité - théorie à temps continu présentée dans [5] - la détermination explicite des noyaux de viabilité occupe une place importante. Mais ces déterminations ne sont possibles que grâce au caractère schématique des exemples traités, en particulier grâce, outre l'absence d'incertitude, à un horizon infini, donc à l'absence de conditions finales (par ex., [5], § 6.2, p. 204, ou [6], chap. 2). Il serait intéressant d'identifier, d'un point de vue mathématique, le rôle du temps continu dans ces déterminations, cela en étudiant si elles peuvent être transposées dans des modèles déterministes à temps discret du type de ceux définis ici par les structures de contrôle, mais (éventuellement) à horizon infini.

2y [2.9.A] Le terme "stratégie", dans le sens général où il est entendu ici, n'est pas courant en théorie du contrôle. Comme expressions équivalentes, on trouve, dans cette dernière : "loi de commande" ou "feedback", dans [61], p. 106 ; "feedback" et "closed loop control", dans [5], p. 4 et 200 ; "feedback function", dans [2], p. 82. Le terme "strategy" est aussi utilisé dans [2], mais de façon plus spécifique, dans l'expression "markov strategy" (p. 83). Par ailleurs, on se gardera d'un rapprochement hatif entre la signification donnée ici à ce terme "stratégie" et celle qu'il a en théorie des jeux.

2z [2.9.B] D'où la mention ci-dessus de l'axiome du choix.

2A [2.10.B] Le domaine de définition d'une fonction objectif sous forme réduite est limité à l'ensemble $\mathbf{P}_{\mathbf{v}}(\mathbf{\Sigma})$ des plans viables car seuls ces derniers interviennent [par ex. dans l'énoncé (2.45)], mais rien n'empêche, en pratique, que ces fonctions soient définies sur un ensemble plus grand, par exemple sur l'ensemble $\mathbf{P}(\mathbf{\Sigma})$ de tous les plans.

2B [2.10.C] Cette interprétation sommaire, minimale, de la mesure de probabilité π correspond à l'orientation plus algébrique que probabiliste de ce chapitre. Elle n'exclut évidemment pas un appel ultérieur à l'appareil probabiliste que l'on a cherché à minimiser ici (alinéas 2.1.H et 2.16.A).

2C [2.12.A,C] L'énoncé du théorème de Bellman donné ici est la transposition, au cas à incertitude finie, du théorème 40.1, p. 362, de [16], dans le cas déterministe. Pour un énoncé faisant appel à l'appareil probabiliste, voir, par ex., [2], théorème 4, p. 99. Voir aussi l'alinéa A.4.B.

2E [2.12.B] Par ex., [61], p. 140, et [2], p. 99-100, 200.

2F [2.14.B] La démarche méthodologique et la terminologie concernant ces "ensembles et tubes définissant les contraintes de viabilité" est à lire entre les lignes dans [5] (par ex. p. 1, 84, 381), car elles sont masquées par les difficultés techniques dues au temps continu, par ex. celles concernant la régularité des trajectoires ([5], § 3.1 et 3.2, p. 79-84), difficultés qui n'ont pas lieu à temps discret. Ces ensembles et tubes ne sont évidemment pas à confondre avec les "domaines et tubes de viabilité" ([2u]).

2G [2.14.B] Outre l'exclusion de toute finalité, en théorie de la viabilité (par ex., [6], p. xii, xiii, xviii), l'esprit naturaliste y apparaît dans la suppression des variables de commande explicites qui accompagne le remplacement, via un élargissement de l'espace des états, des systèmes de contraintes usuelles de la théorie du contrôle en cause par des systèmes d'inclusions différentielles portant aussi sur les variables de commande : par ex., dans [5], relation (6.7ii), p. 206, dans [6], relation (2.4.1ii), p. 64. De cet esprit naturaliste, on retient ici, dans la démarche méthodologique que présente ce texte, d'une part la mise en cause de l'optimisation intertemporelle qui se traduit par la question téléologique (alinéas 1.1.D, 1.4.A, 1.5.A, 2.14.F, 2.15.B, 3.16.D, 4.9.D, 5.10.A), d'autre part, de façon concomitante, l'exigence de compatibilité avec le principe de causalité qui se traduit par l'importance des procédures d'exploitation par simulation (alinéas 3.1.K et 3.14.B-G). Par contre, dans la problématique d'économie régulée en cause ici (alinéas 3.1.D,E), on ne retient de la théorie de la viabilité, ni la suppression des variables de commande, vu l'importance, dans cette problématique, de celles qui représentent les interventions des instances régulatrices (alinéas 3.1.G,H, 3.2.C, 3.14.H), ni l'exclusion de toute finalité, vu l'importance des finalités, ici comportementales plutôt que naturelles, qui conditionnent, soit les interventions de ces instances (alinéas 3.1.F, 3.14.H-J, 4.1.B,E, 5.6.A, 5.8.A), soit les anticipations des acteurs décentralisés (alinéas 1.2.B, 3.1.I,J, 3.7.E,F, 3.12.D, 3.18.B, 4.10.B-E, 5.4.G).

2H [2.14.E] Par exemple "stratégies lourdes" : [5], § 7.6, p. 261 sq ; [6], § 1.4, p. 23 sq, § 2.3, p. 59, § 2.5, p. 67.

2I [2.14.F] Par ex., fonctions objectif du premier type envisagé à l'alinéa 1.4.B.

2K [2.15.C] Que ce soit la condition suffisante, plutôt que la condition nécessaire, qui figure dans la propriété (2.58) fait apparaître cette propriété comme une généralisation de celles des réalisateurs envisagés aux alinéas 2.15.E (cas d'une structure de Bellman) et 2.15.G (cas des stratégies optimales).

2L [2.15.C] La notion de stratégie optimale apparaît dans [2], p. 82 sq, sous le nom de "markov control", mais des références plus anciennes doivent exister.

2M [2.15.I] Le passage de la structure resserrée $\underline{\underline{\Sigma}}$ à la fonction objectif Q s'apparente à la démarche de pénalisation en analyse numérique (par ex., [62], [125], chap. 12, [27], p. 205). Cependant, ce passage n'est pas seulement ici un artifice de calcul, même s'il l'est aussi, lorsqu'il intervient dès la spécification du modèle, comme c'est le cas pour ceux qui sont à l'origine de la question en cause (alinéas 1.4.B et 2.14.F).

2N [2.15.I] Une situation de ce type est fournie par le cas où le resserrement $\underline{\underline{\Sigma}}$ est une structure à anticipations dont la détermination des plans viables réclame la résolution d'un problème à optimisations multiples (alinéa 3.15.E) : la démarche en cause permet de remplacer un tel problème par une optimisation simple.

2P [2.15.I] Il suffit de définir $Q(\xi, \eta)$ comme la distance du plan (ξ, η) à l'ensemble (fermé) des plans viables pour la structure $\underline{\underline{\Sigma}}$.

3a [3.1.A] Le qualificatif "intertemporel" est employé ici au sens large de "ce qui concerne les liens entre des événements étalés dans le temps" et pas seulement au sens étroit - lié aux expressions "optimisation intertemporelle" ou "équilibre général intertemporel" - d'une influence du futur sur le présent qui est à l'origine de la question téléologique (alinéas 1.1.D, 2.14.F, § 2.15 et 3.16).

3b [3.1.B] A propos des anticipations envisagées en robotique, voir par ex. [87].

3c [3.1.E] Par ex., [21]. Cette perspective distingue fondamentalement la problématique économique envisagée ici de celle de la théorie de la viabilité (alinéa 2.14.B).

3d [3.1.F] On souligne la distinction faite entre procédés de résolution, d'une part, procédures et démarches d'exploitation, d'autre part : une procédure d'exploitation peut reposer sur un procédé de résolution, mais comporte d'autre éléments d'orientation méthodologique ; une démarche (d'exploitation) est un type de procédure. On souligne aussi qu'il s'agit ici de prospective macroéconomique et non, au moins directement, de planification (voir, par ex., [34], § 1.2, p. 11, et [41], alinéa 1.2.C, p. 3).

3e [3.1.F] La démarche de prévision a largement dominé la prospective macroéconomique jusqu'aux années 70. Depuis, elle a été battue en brèche en raison de son incapacité à prendre en compte les transformations profondes, en particulier celles réclamées par les "chocs" (par ex., [77] et [55]), incapacité concomitante des faiblesses théoriques des modèles correspondants (par ex., [93] et [96]).

3g [3.1.F] L'expression "méthode des scénarios" est entendue ici au sens large, concernant les études exploratoires faites à partir d'hypothèses a priori quelconques, mais clairement explicitées, et pas seulement au sens étroit où certaines des hypothèses, presqu'implicites, figent des aspects importants de l'évolution du système, par exemple l'évolution démographique, comme dans les modèles de croissance, en particulier ceux concernant l'effet de serre (par ex., [108]). L'option prise est illustrée, en ce qui concerne cet exemple, par le modèle présenté aux chapitres 4 et 5, modèle où l'évolution démographique est endogène (alinéas 4.1.I, 4.2.C,D, 4.3.F, § 4.7, 4.8, 5.6 à 5.8).

3h [3.1.F] A propos de cette définition de la prospective de base, voir [34], § 1.2, p. 10, [36], alinéa 1.a, p. 4, [41], alinéa 1.2.B, p. 2, [42], alinéas 1.C,F, p. 2, 3 et § 5, p. 11. Le qualificatif "exploratoire" employé ici peut être considéré comme équivalent aux qualificatifs "libre" et "heuristique" employés dans les références précédentes, même si, dans ces dernières sauf dans [42], l'insistance est mise sur la prospective de base.

3i [3.1.F] Cette prospective de base participe des idées de Gaston Berger et de Bertrand de Jouvenel (par ex., [14], p. 16-26, [49], p. 344-45, [1]), via la liberté exploratoire qui est concomitante du dépassement, de l'assouplissement, des contraintes extrapolant les comportements du passé récent. Elle est ainsi à l'opposé de le prévision, qui privilégie au contraire l'exigence correspondant à l'expression "fonctionnellement possible" et où le "techniquement possible" n'est pratiquement traité que par extrapolation tendancielle. De ce fait, la prospective de base réclame un approfondissement de la représentation macroéconomique de la base physique du processus économique (par ex. [36], alinéa 1.b, p. 5, [41], alinéa 1.2.D, p. 3, [81]).

3j [3.1.F] Le qualificatif "dynamique", concernant un modèle macroéconomique, est réservé ici aux modèles de prospective comportementale. En particulier, les modèles intertemporels relevant de la prospective de base ne peuvent pas être qualifiés de dynamiques, dans la mesure où ils sont sous-déterminés vis-à-vis des comportements des acteurs décentralisés.

3k [3.1.F] Le principe de précaution (par ex., [71]) est relatif aux décisions en présence d'aléas de caractère historique, donc difficilement probabilisables (alinéa 3.1.E).

3m [3.1.G] Composante éventuellement multidimensionnelles.

3n [3.1.H, 3.4.D] Un "plan" au sens projectif du terme.

3o [3.1.J] Le lien avec la théorie des anticipations rationnelles est envisagé au § 3.10 (alinéas 3.10.E-G). Il est à approfondir (alinéas 3.11.F et 3.18.A).

3p [3.1.K] Contrôle au sens précisé à l'alinéa 3.1.G (alinéas 3.2.B,C et 3.3.B).

3q [3.2.A, 3.12.A] On ne se limite pas a priori à la prospective comportementale (alinéa 3.18.C), même si c'est principalement sur elle que porte l'analyse des procédures d'exploitation faite dans la suite (§ 3.13 à 3.17).

3s [3.2.B, 3.4.F] La considération de jeux de données sans contrôle n'est qu'un artifice formel qui permet de prendre en compte les systèmes sans (contrôle des) instances régulatrices dans le même cadre formel, plus général, que ceux en comportant.

3t [3.3.B, 3.6.A, 3.9.D] A propos de la condition $s \epsilon S^{\theta}$, voir l'alinéa 3.7.B.

3u [3.4.G] Pour les ensembles de plans relatifs aux structures à commandes doubles quelconques $\mathbf{\Sigma}$, ce sont les notations générales - $P(\mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{\Sigma})$, etc. - qui interviennent (alinéa 2.3.C).

3v [3.6.C] Par ex., [105], [92], [116], [118], [66], [73], [75]) en ce qui concerne les anticipations rationnelles, et [112], [113], [65], [74] en ce qui concerne l'équilibre général intertemporel.

3w [3.6.C] Les liens - étroits - entre prévisions ("forecasts") et anticipations rationnelles ("rational expectations") sont envisagés dans [118], par ex. p. 5 et 18 sq. Par ailleurs, à propos de l'application de la théorie de la viabilité à la dynamique économique, Aubin semble considérer le mot anglais "anticipation" comme signifiant une extrapolation de l'évolution passée ([6], p. 28), ce qui en rapproche la signification de celle du mot "prévision", au moins dans son usage dominant (alinéa 3.1.F). Cette signification est très éloignée de celle donnée ici au mot français "anticipation", dans la perspective d'économie régulée (alinéa 3.10.G).

3y [3.7.B] L'inégalité stricte dans la condition (3.3) est requise par la condition de stationnarité (3.30) ([30]).

3z [3.8.A] Le qualificatif "conforme" est employé comme abréviation de "conforme aux données de base", ainsi qu'il ressort de l'alinéa 3.8.B.

3A [3.8.C] On note que la relation (3.30), d'une part réclame que les fonctions composantes de base f_s soient données pour tout $s \epsilon]s°>$ et pas seulement pour tout $s \epsilon S^{\theta}$, d'autre part réclame que τ soit > 0 [condition (3.3)].

3B [3.9.A,B] Les passages relatifs au mode de conditionnement fort et aux conditions d'intégration ne concernent que le lien avec la théorie des anticipations rationnelles. Ils peuvent être sautés en première lecture.

3C [3.9.D] Ces variantes concernant les conditions finales d'intégration d'un déploiement ne seront pas exploitée ici, puisque le mode de conditionnement correspondant à l'intégration, i.e. le mode de conditionnement fort (alinéa 3.10.B), n'est pas approfondi. Elles sont mentionnées, pour souligner les précautions que réclame l'option d'un horizon fini, vu l'importance de ces conditions (finales d'intégration) en ce qui concerne les liens entre conditions finales d'anticipation et conditions finales d'exploitation, liens qui sont plus étroits dans le cas des plans fortement conditionnés, par un protocole d'anticipation, que dans le cas des plans simplement conditionnés (alinéas 3.7.G, 3.12.E, 4.11.C).

3E [3.10.E] Par ex., équation obtenue en éliminant la variable p_t^e entre les équations (3.2) et (3.4) de [105], p. 316, ou, plus nettement, équation (1), p. 410, de [73].

3F [3.10.E] Les indications succinctes, sur les liens mathématiques entre l'approche des anticipation présentée ici et celle de leur théorie usuelle, sont évidemment à compléter par une étude détaillée, étude qui devrait commencer par l'explicitation des liens entre la représentation de l'incertitude finie utilisée ici et la théorie des processus - et du contrôle - stochastiques (alinéas 2.1.H, 2.16.A, 3.18.A).

3G [3.10.G] Objectif qui n'est en général pas atteint comme il résulte, par ex., de l'étude de l'ensemble des solutions de l'équation de Muth présentée dans [73] (par ex., sections 1 et 2, p. 409 et 415).

3H [3.12.B] On privilégie ici systématiquement le mode total en ne considérant que des procédures primaires conduisant à la structure à commandes doubles dite totale, sans qu'aucun des schémas de contrôle ne soit singularisé. Cependant, rien n'empêche de considérer une procédure primaire conduisant à une structure à contrôles spécifiés par un schéma de contrôle particulier, voire à une structure sans contrôle (alinéa 3.2.B). On ne le fait pas pour simplifier l'exposé, vu la primauté pratique du mode total, en ce qui concerne les données primaires.

3I [3.12.D] La préférence accordée ici au conditionnement simple est motivée à l'alinéa 3.10.G. Elle ne signifie évidemment pas que l'extension, au mode de conditionnement fort, des développements des § 3.13 à 3.17, soit exclue ou sans intérêt. Elle est à faire (alinéas 3.11.F et 3.18.A).

3K [3.12.F] On omet, pour une fonction objectif, la mention "sous forme réduite", car on ne considère pas ici de fonctions objectifs sous forme extensive (alinéa 2.10.C).

3L [3.12.G] Le qualificatif "normatif" est appliqué ici aux orientations collectives que cherchent à promouvoir les instances régulatrices. Il est ainsi opposé aux qualificatifs "naturel" ou "spontané" (alinéas 2.14.B, 3.1.D, 3.2.C).

3M [3.12.H] Contrairement au reste du § 3.12, qui s'applique à la prospective exploratoire en général, on se limite, dans l'alinéa 3.12.H, comme dans les § suivants, à la prospective comportementale. Dans le cadre moins strict de la prospective de base, le lien indiqué entre structure primaire et type de la fonction objectif n'est plus valable. En particulier, l'exploitation d'une structure de base avec une fonction objectif de type normatif est alors courante (alinéa 3.18.C).

3N [3.13.C] Par exemple, $C2(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ n'implique pas $C1(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$, car la condition $C2(\mathbf{\Sigma},\mathbf{u})$ n'exclut pas que l'ensemble $G_S^{\mathbf{u}}(e)$ ait plus d'un élément, i.e. que la condition (3.50a) soit en défaut, pour certains $s \in S^{\theta} \backslash S_{\theta}$ et certains $e \in X_S \backslash \underline{\underline{X}}_S^{\mathbf{u}}$.

3Q [3.13.E] Un tel procédé de sélection est fourni, numériquement, par le code de calcul utilisé pour l'optimisation.

3R [3.14.C] L'assertion que "la structure primaire ne comporte pas de protocole de resserrement d'exploitation" est seulement ici de l'ordre des interprétations, vu que les indications données au § 3.12 concernant la constitution des structures primaires ne permettent pas de discerner si elles comportent ou non un tel protocole, même si on se restreint aux structures envisagées à l'alinéa 3.12.C. En particulier, au stade très général de formalisation où se situent les § 3.12 à 3.16, rien ne permet de distinguer formellement les conditions requises par un protocole de resserrement d'exploitation de celles intervenant, soit dans la définition des données fonctionnelles de base (alinéa 3.2.D), donc dans la structure de base (alinéas 3.3.E et 3.12.D), soit dans celle d'un protocole d'anticipation (alinéa 3.7.A), donc dans la structure à anticipations correspondante (alinéa 3.12.D). De plus, cette ambiguïté est renforcée par le fond de naturalité que comporte tout protocole d'exploitation ([2t]). Dans l'état actuel de la théorie, ces distinctions relèvent seulement du savoir faire du modélisateur : elles n'en sont pas moins fondamentales pour la justification des inférences fournies par le modèle (règle d'inférence 3.14.D1).

3S [3.14.D] Le critère de pertinence, très strict, qu'exprime la règle d'inférence 3.14.D1, est spécifique de la prospective comportementale. En fait, cette règle et la règle 3.14.G1 qui la complète peuvent être considérées comme une définition opérationnelle de la prospective comportementale. La prospective de base introduit, utilise, d'autres critères de pertinence qui sont plutôt liés à la cohérence de la démarche exploratoire ([2e]).

3T [3.14.D] Comme substitut du terme "règle", dans la désignation de l'énoncé 3.14.D1, on a envisagé les termes "postulat" et "principe". Le premier a été rejeté, car cet énoncé n'est pas de l'ordre d'un axiome mathématique, le second car il ne s'agit pas d'énoncer une propriété fondamentale de la réalité, des systèmes considérés, comme le fait le principe de causalité, mais bien d'une règle opératoire concernant l'exploitation des modèles, même si cette règle a quelque chose à voir avec ce principe (alinéa 3.14.C). Au demeurant, cette terminologie "opératoire" convient à l'orientation méthodologique du texte, qui concerne les modèles plus que les systèmes màcroéconomiques en eux mêmes (alinéa 3.1.A,B,D).

3U [3.14.H] Le rôle central qu'occupe la détermination du schéma de contrôle dans la définition 3.14.H1 de la procédure de simulation sous contraintes peut inciter à simplifier cette détermination en cherchant un système de contraintes dont les seules variables soient les composantes du schéma de contrôle, de telle sorte que les solutions de ce système soient les schémas voulus. Outre son éventuelle difficulté formelle, une telle réduction ne semble pas d'un grand intérêt, vu que l'objet de la procédure est de déterminer, en même temps que schéma de contrôle $\mathbf{u}$, le plan $\mathbf{v}(\boldsymbol{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$ inhérent à la simulation, ce en quoi consiste précisément la procédure envisagée en mode total relativement à la structure $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$.

3W [3.14.H] La procédure d'exploitation par simulation sous contraintes qui est présentée ici, dans le cadre étroit de la prospective comportementale, n'est évidemment pas le seule de ce type. Par exemple, sortant de ce cadre, on peut envisager d'approximer par une simulation libre un plan obtenu par une procédure de prospective de base.

3X [3.14.J] La simplicité, le caractère mathématiquement élémentaire, de la propriété (3.58) ne doit pas faire sous-estimer l'importance des distinctions méthodologiques qu'exprime sa reformulation 3.14.J1. Dans ce sens, le lecteur est invité à se reporter, par exemple, à la littérature sur les modèles de l'effet de serre pour y constater l'opacité ou le vide méthodologiques qui entoure l'exploitation par optimisation des modèles correspondants, carences qui motivent la question téléologique (alinéa 3.16.D). On souligne que cette simplicité est due au caractère abstrait du formalisme introduit, lequel ne retient, sous forme condensée, que les éléments nécessaires au propos : sans cette condensation, au sein de la complexité d'un modèle explicité, l'expression de la propriété (3.58) en cause - au demeurant, comme bien d'autres dans ce texte - est inextricable, malgré sa simplicité formelle. Le lecteur, non coutumier de cette complexité, peut se reporter à ce sujet aux § 4.2 et 5.3, où est définie la structure du modèle présenté aux chapitres 4 et 5 ... qui n'est pourtant qu'un "petit" modèle. Face au dilemme entre abstraction et complexité concrète, on opte ici pour la première (alinéa 1.3.B).

3Y [3.14.K] Le vocable "simulation" est généralement lié à la possibilité de détermination récursive. On ne l'a pas fait ici pour simplifier l'exposé, car la plupart des développements sur la simulation présentés dans le § 3.14 ne reposent que sur la condition d'univocité $B0(\boldsymbol{\Sigma},e^{\circ},\mathbf{u})$. En fait, cette simplification est liée à l'option, prise dès le chapitre 2, qui consiste à s'appuyer le moins possible sur les propriétés de récursivité, mais plutôt sur la notion globale de plan issu d'un état initial donné. Cette option apparaît, entre autres dans la présentation du théorème de Bellman (§ 2.12) qui est indépendante du (sempiternel) principe d'optimalité de Bellman [Ad]. C'est également en fonction de cette option que la détermination récursive "en temps réel" du schéma de contrôle n'est pas envisagée à propos de la simulation sous contraintes. Adaptée au propos méthodologique de l'exposé (alinéas 1.3.A,F, 3.12.A, 3.14.A), elle ne préjuge évidemment pas de l'importance du caractère récursif de la simulation, mais justifie qu'il ne soit mentionné qu'à la fin du § 3.14 la concernant.

3Z [3.15.C] Ce découplage est formel en ce sens qu'il est obtenu en éliminant, des contraintes (3.62) à (3.64), les composantes de la partie spontanée du plan grâce aux égalités (3.61).

3α [3.15.F] L'approche du problème à optimisations multiples a été laissée totalement de coté à cause de la maladie, puis de la disparition, de Pierre Loridan qui, en tant que spécialiste de ce type de problème, devait étudier les possibilités d'application des résultats généraux aux situations particulières en cause.

3β [3.16.C] La condition (3.71) n'a ici qu'un intérêt de circonstance, en ce sens que, pour la suite du § (alinéas 3.16.D-F), ce qui importe c'est de pouvoir remplacer la propriété (3.68) par la propriété (3.69). La condition (3.71) suffit pour cela : son raffinement réclamerait sans doute de spécifier davantage le cadre formel, abstrait, ce qui est hors de propos ici (alinéas 1.3.A et 3.1.A,B).

3γ [3.16.D] Par ex. [107], p. 1317, [108], p. 10, [78], p. 271, [98], p. 58-9.

3δ [3.16.D] Les objections concernant la procédure 3.16.D0a tombent évidemment si on sort du cadre, très strict, de la prospective comportementale (alinéa 3.1.F), cadre où la pertinence dépend des règles d'inférence 3.14.D1 et 3.14.G1. En prospective de base, cette procédure 3.16.D0a peut être justifiée simplement comme démarche exploratoire privilégiant l'étude du "techniquement possible" sur le "fonctionnellement possible" qu'expriment ces règles (alinéa 3.18.C).

3ε [3.16.D] Les travaux théoriques les plus récents relatifs au marché, en particulier ceux sur la non unicité et l'instabilité de l'équilibre (par ex., [24] et [46], ainsi que [85], p. 315), affaiblissent les prémices de la doctrine économique qui lui attribuaient des vertus téléologiques (alinéa 3.10.F). De manière plus imagée, on peut dire, en se référant aux modèles mondiaux de l'effet de serre (§ 1.4) qu'il est paradoxal de déterminer, par optimisation intertemporelle, des scénarios dont le propos est d'étudier comment limiter les méfaits d'un libéralisme aveugle.

3η [3.16.J] Eu égard à la propriété (3.12) appliqué à la structure resserrée $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$.

3λ [3.16.J] Dans le cas sans contrôle (alinéas 3.2.D et 3.4.F), les deux modes d'exploitation coïncident.

3μ [3.16.K] La fonction objectif réalisée par la structure resserrée $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathbf{u}}$(B) (alinéa 2.15.C) peut être rapprochée de la fonction d'utilité globale qui fait l'objet de la variante intertemporelle du théorème de Negishi [106] mentionné à l'alinéa 1.4.B, variante qui est à préciser.

4a [4.1.A] Cette notion méthodologique de démarcation d'un modèle a été systématisée lors du développement du modèle ATHEMA (par ex., [35], I, p. 5 et 14-16, [36], p. 38, [37], Exp. 1, p. 1-2, [38], III, chap. III, p. 2-4).

4b [4.1.B] Cette présentation schématique du paradigme conceptuel de la problématique des limites et du développement durable a seulement pour but de faire apparaître, comme démarcation (alinéa 4.1.A), les grandes lignes de ce paradigme, de façon à pouvoir ultérieurement situer précisément les termes du modèle par rapport à elles : c'est à défaut de trouver une telle présentation - suffisamment succincte - dans la littérature qu'elle est mise ici.

4c [4.1.D] Bien qu'étant apparue très tôt dans la pensée économique, au moins avec Malthus et Stuart Mill ([100]), la problématique des limites a été diffusée à la suite des travaux du Club de Rome (par ex., [51]), sur un ton catastrophiste qui, s'opposant au consensus des années cinquante et soixante sur les bienfaits de la croissance, a donné lieu à de vifs débats, à propos du concept polémique de "croissance zéro" (par ex. [117]) ([4e]).

4d [4.1.E] Par ex., [31], [29], [28], [86], [56], p. 9-17.

4e [4.1.E] Aussi ancien que la problématique des limites ([4c]), le concept d'état stationnaire, comme aboutissement d'un développement raisonnable, n'est toléré que marginalement par la pensée dominante, vu son obsession pour la croissance quantitative. Ainsi, les études locales faites dans les années quatre vingt avec le modèle ATHEMA autour de ce concept sont restées totalement ignorées (par ex., [33], p. 5, [34], p. 47 et 243, [35], I, p. 14, II, p. 14-21, [38], III, chap. III et IV). Cependant, les perspectives alarmantes de l'effet de serre (plus que celles du Club de Rome dans les années soixante dix) font que ce concept est maintenant mieux admis, pourvu, cependant, qu'il n'intervienne qu'à long terme, ce qui le distingue de celui, plus polémique, de croissance zéro ([4c]). Le qualificatif "acceptable" recouvre le paradigme de la multiplicité des états stationnaires envisageables (par ex., [29], p. 34,35), multiplicité qu'un des objectifs des modèles est d'étudier (alinéa 4.1.F). On souligne seulement à son propos que la stationnarité en cause, d'abord et essentiellement relative aux grands cycles bio-géophysiques, peut être compatible avec des fluctuations, par exemple de la population ou de l'organisation planétaires.

4g [4.1.E] Les problèmes que pose l'hétérogénéité entre le Nord et le Sud sont évidemment cruciaux, en ce qui concerne la stabilisation de la population mondiale. On ne s'étend pas ici sur ces problèmes car cette hétérogénéité n'est pas prise en compte dans le modèle présenté (alinéa 4.14.D).

4h [4.1.E] L'introduction, en particulier après Sachs (par ex., [115] et [28], p. 119), du concept d'écodéveloppement permet de dépasser le caractère incantatoire de l'exigence du développement durable.

4i [4.1.F] Malgré le caractère rudimentaire de la plupart de ces modèles ([4B]) et la faiblesse de leurs bases méthodologiques, en particulier en ce qui concerne la question téléologique (alinéas 1.1.B et 1.4.A).

4j [4.1.F,G, 5.1.A] Les schémas proposés ici remplacent et systématisent la démarche usuelle de définition d'un modèle, via l'introduction successive des données, des variables et des contraintes, puis des procédures opératoires (par ex., [52], chapitre 2, [35], § 7 et 9, [38], III, chapitres III et IV, [41], chapitre 5). Cette démarche est souvent bâclée, dans la présentation des modèles opérationnels, en une mixture de définitions formelles et d'interprétations (par ex., [107], p. 1315-17, [8], [114]). Lorsque le modèle est complexe, elle devient laborieuse et permet mal de faire apparaître sa structure, même si elle est mise en oeuvre de façon soigneuse (par ex., [32], p. 175-92, [88], p. 37-40, [108], p. 19-20, [43]). La présentation axiomatique et les schémas proposés ici visent à dépasser ces insuffisances. Dans ce sens, on souligne que l'utilisation systématique, du formalisme et de la terminologie introduits au chapitre 3, fait qu'une tentative visant à lire ce chapitre 4 sans avoir pris connaissance au préalable du chapitre 3 - donc aussi du chapitre 2 dont il dépend - ne peut conduire qu'à des incompréhensions : cette discipline fait partie du propos méthodologique.

4k [4.1.H] Par ex., [121], p. 9-16, [94], p. 7,8, [8], chap. 1 à 5.

4m [4.1.H] Par ex., [107] et [108].

4n [4.1.H] Il ne faut pas avoir peur de l'expression "économie physique" : elle convient précisément à ce type de modèle de croissance, où seules les circulations réelles sont représentées, même si elles sont mesurées en unités monétaires (alinéas 4.3.B et 5.4.B), et permet de le distinguer du modèle ISLM (par ex. [104], chap. 5) qui comporte aussi une représentation des prix et des circulations en valeur. Dans ce sens, on évitera systématiquement de faire usage des termes concernant ces dernières (couts, taxes, etc.). Au demeurant, Nordaus respecte, presque (par ex., [107], p. 1316 et 1318), cette règle.

4o [4.1.I] On se gardera d'un rapprochement hatif entre cette variable de "niveau de développement" et celle de "niveau des connaissances" introduite par Romer dans [114], même si ces deux types de variables ne sont pas sans relation : la différence essentielle tient à ce que le niveau de développement conditionne ici la croissance de la population plutôt que la production comme chez Romer (par ex., [114], p. 1115).

4p [4.1.I] Par exemple, dans [107], il est peu raisonnable méthodologiquement, même si c'est sans conséquence formelle, que le niveau $E(t)$ des émissions dépende directement du paramètre de contrôle $\mu(t)$ [relation (7), p. 1316], alors que la productivité $\Omega(t)$ en est une fonction complexe [relation (13), p. 1317]. C'est pourquoi, dans le modèle présenté, on inverse cette situation, en prenant le taux de ponction, d_q, comme variable indépendante [relations (4.11) et (4.12), alinéa 4.2.D]. Dans un modèle plus détaillé, incluant une représentation du marché et des taxations, les variables indépendantes seraient ces dernières plutôt que les ponctions correspondantes. En particulier un tel modèle serait nécessaire pour clarifier les fondements du mode de détermination de ces taux comme valeurs duales (par ex., [108], note de la p. 93), en liaison avec la question téléologique.

4q [4.1.I] Comme dans le modèle DIAM [25], on a supprimé - eu égard au propos illustratif (alinéa 4.1.F) - la prise en compte des températures (par ex., [107], p. 1316), qui complique notablement le modèle de Nordhaus et y introduit une disparité d'élaboration, vu le caractère rudimentaire de la représentation macroéconomique.

4s [4.2.A] La spécification (4.1) des nomenclatures I, J, H comporte évidemment un part importante d'arbitraire, seuls comptant strictement leurs nombres d'éléments. Le choix, comme éléments (postes) des nomenclatures de lettres plutôt que de numéros (voir l'alinéa 2.1.A de [41]) permet de distinguer les postes des trois nomenclatures ou de les relier (par ex., I et J ont les postes k et m en commun, tandis que H est contenue dans J). Le choix, comme postes, de mots plutôt que de lettres facilite les interprétations, mais au prix d'une plus grande lourdeur formelle. Dans le choix des lettres, on a cherché à se rapprocher des désignations usuelles des variables dans les modèles macroéconomiques (par ex. k pour le capital, c pour la consommation, etc.), mais cela n'a pas été toujours possible (par ex., la lettre "y" désigne une commande au chapitre 2).

4t [4.2.E] Dans les relations (4.4) à (4.6) de définition de la fonction f_s, les coefficients $\alpha_{s-,i}$ ($i\epsilon\{k,b,m\}$) ne dépendent de s que via s-. Ainsi, les coefficients $\alpha_{s,i}$ ($i\epsilon\{k,b,m\}$) n'ont à être spécifiés que pour $s\epsilon S\backslash S_T$).

4u [4.2.F] Ce calcul réclame que e_n soit en facteur au second membre de (4.10), mais pas e_k. La mise en facteur de e_k est plus contingente (alinéas 4.3.H et 4.5.A).

4v [4.3.B] Le repérage des flux par l'indication "/PE" après celle de la grandeur peut être justifiée en adjoignant aux grandeurs de base la grandeur "durée", avec l'indicatif "PE" (pour "période"), ce qui fait que l'indication "/PE" signifie "par période", comme "/NP" signifie "par tête".

4w [4.3.C] Le taux de croissance -1, i.e. la valeur nulle de la variable $d_w(t)$, correspond, en vertu de l'équation d'évolution (4.7), à la disparition complète de la population pendant la période t (interprétation 4.8.C1). Le choix de d_w comme variable plutôt que du taux de croissance d_w - 1 permet de ne considérer que des variables ≥ 0.

4y [4.3.C] Le caractère schématique de cette représentation de l'évolution du niveau de développement - basée sur l'équation (4.20) et sur la spécification des fonctions démographiques Z_s ($s\epsilon S$) (alinéa 4.7.B) - est à considérer en fonction du propos exclusivement illustratif, méthodologique, du modèle (alinéa 4.1.F). Une représentation plus réaliste devrait comporter une formalisation plus détaillée de la démographie (par ex., [111], chap. 1, 13, 14), formalisation éventuellement analogue à celle utilisée dans les modèles d'équilibre général à générations (par ex., [67], § 1.1, p. 1910-15), mais ici sans l'appareil de la théorie de l'équilibre général et en horizon fini (alinéa 1.3.F et 2.1.G) ([4T]).

4z [4.3.D] On dit "induites" et non "justifiées", car, à ce stade de la présentation du modèle, il s'agit de rendre intelligible la formulation des contraintes, plutôt que de la justifier ([4B]).

4A [4.3.D] Ce rôle est exprimé, à ce stade "de base", i.e. précédant la prise en compte des comportements représentés par le protocole d'anticipation (§ 4.10 et 4.11), par les relations (3.5) et (3.6) complétées respectivement par les contraintes de viabilité (3.10) et (3.11) ou (3.16) et (3.17).

4B [4.3.D,E] Conformément à la démarcation (alinéa 4.1.H), l'équation d'évolution du capital (4.4) est celle du modèle de croissance de Ramsey-Harod-Domar-Solow (par ex., [121], équation (2), p. 9). La forme de cette équation, où le capital est obtenu par sommation des investissements en valeur, est aussi, via une désagrégation par branches et produits, à la base de l'approche macroéconométrique du capital fixe (par ex., [53] et [39], § 1.7, 2.6, 2.7). Au niveau le plus agrégé en cause ici, avec un seul produit, elle ne fournit qu'une représentation très sommaire de l'évolution du système productif, ce qui fait que, surtout pour des exercices de prospective à long terme, les résultats numériques n'ont qu'une valeur qualitative (alinéa 4.1.F), même si les ordres de grandeur agrégés sont respectés (alinéa 4.5.G).

4C [4.3.D] Cette interprétation justifie l'occurrence, dans les égalités (4.4) à (4.6) de définition de la fonction f_s, des coefficients $\alpha_{s-,i}$ ($i\epsilon\{k,b,m\}$) plutôt que des coefficients $\alpha_{s,i}$ (alinéa 2.2.D) ([4t]).

4E [4.4.B] Le niveau de référence e_b^* est mis à zéro [condition (4.29c)] faute de pouvoir évaluer un niveau > 0. Voir la fin de l'alinéa 4.8.E.

4F [4.5.B] Le coefficient $\hat{\nu}_{s,a}$ ne doit pas être considéré comme un taux instantané, entre s- et s, mais comme un taux moyen entre s° et s, en ce sens que le facteur $1 + \hat{\nu}_{s,a}$ est la moyenne géométrique de divers facteurs instantanés le long du chemin allant de s° à s.

4G [4.5.C] Par ex., [88], p. 37, 38, [104], p. 300, [107], p. 1315.

4H [4.5.G] Bien que s'inscrivant dans un contexte décisionnel (alinéa 4.1.F).

4I [4.5.G] L'approche macroéconomique de l'analyse d'activités a été systématisée lors du développement du modèle ATHEMA. Pour une présentation formelle de cette approche, voir ce qui concerne la représentation de la base physique du processus économique dans les § 2 à 5 de [36], ainsi que, pour la cas statique, les § 7.1 et 7.2 de [41]. Pour une mise en oeuvre pratique, voir le fascicule I de [38] où est présenté en détail un jeu de données techniques.

4K [4.6.B] Pour s = s°, le coefficient $\underline{\underline{d}}_{s-,q}$ n'a pas à être défini, puisqu'on a alors $e_p = e_p^* = 0$, d'après la condition (4.29d).

4L [4.7.C] Ce niveau $e_b^\# > 0$ remplace le niveau de référence e_b^* qui est nul [condition (4.29c)] (4E).

4M [4.8.D] Le caractère très schématique de cette représentation de la stabilisation pérenne tient, en particulier, à ce que la fonction de rupture, définie par la relation (4.31), est constante pour $x \geq \varepsilon$. Pour dépasser cette limitation, on peut remplacer la relation (4.56b) qui définit $\Psi'_s(e_b)$ par la relation,

$$(1) \qquad \Psi'_s(e_b) \;=\; 1 - \underline{\varepsilon}_w + (\underline{\underline{d}}_w - 1 + \underline{\varepsilon}_w)\underline{\phi}(\check{\nu}_{s,b}, \frac{e_b}{e_b^\#} - \hat{\nu}_{s,b}),$$

où, d'une part $\underline{\varepsilon}_w$ est un coefficient > 0 supposé petit, d'autre part la fonction de rupture $\underline{\phi}$, $(\varepsilon, x) \longrightarrow \underline{\phi}(\varepsilon, x)$, est définie par,

$$(2) \qquad \text{pour tous } \varepsilon \in \left]0,+\infty\right) \text{ et } x \in \mathbf{R}, \qquad \underline{\phi}(\varepsilon,x) \;=\; \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x}{(x^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\Big).$$

La propriété de stabilisation (4.64) est ainsi remplacée par la propriété moins rigide,

(3) pour tous $s \in S$, $e_b \in \mathbf{R}_+$, $d_c \in \mathbf{R}_+$ tel que $d_c \geq \underline{\underline{d}}_{s,c}$,

(a) $\Psi_s(e_b,d_c) = 1$, si $e_b = (\nu_{s,b} + \hat{\nu}_{s,b})e_b^\#$,

(b) $1 - \underline{\varepsilon}_w < \Psi_s(e_b,d_c) < 1$, si $e_b > (\nu_{s,b} + \hat{\nu}_{s,b})e_b^\#$,

où les coefficients $\nu_{s,b}$ sont définis par,

(4) pour tout $s \in S$, $\underline{\phi}(\check{\nu}_{s,b}, \nu_{s,b}) = \underline{\varepsilon}_w/(\underline{\underline{d}}_w - 1 + \underline{\varepsilon}_w)$.

En pratique, les deux approches sont peu différentes si le coefficient $\underline{\varepsilon}_w$ est suffisamment petit, surtout si les coefficients $\check{\nu}_{s,b}$ sont également petits. Cette fonction de rupture $\underline{\phi}$ est utilisée au chapitre 5 (alinéas 5.1.C,D).

4N [4.8.G] Au demeurant, ce caractère schématique n'excède pas celui des modèles usuels, très agrégés, de théorie de la croissance à population endogène (par ex., [15], § I.B.4, p. 23), en particulier ceux relevant de la théorie de la viabilité qui lient cette croissance au développement technologique, (par ex., [6], section 2.7, p. 71, ou [17]). En ce qui concerne ces derniers, on note que : d'une part c'est la problématique Malthusienne (par ex. [6], p. 73) qui est en cause ici, en ce sens que c'est l'évolution du niveau de la population qui dépend de celle du niveau de développement e_b, justement via les contraintes (4.13) où interviennent les fonctions démographiques, et non l'inverse ; d'autre part le concept de niveau de développement utilisé ici ne coïncide pas avec celui de niveau technologique intervenant dans les références ci-dessus, même si les deux concepts ont des aspects communs, en ce sens que le premier prend en compte, via les équations d'évolution (4.6) et (4.20), une diffusion en masse de savoirs élémentaires qui ne concerne que marginalement le second (^{4O}).

4P [4.9.C] La simplicité de l'énoncé de la propriété d'unicité (3.56), qui repose sur la considération du domaine de viabilité univoque $\mathfrak{U}_v(\mathring{\Sigma},e°)$ (alinéa 3.13.B), ne doit pas faire illusion, vu la complexité que recouvre la définition formelle de ce domaine, même dans une situation simple comme celle en cause ici. Dans ce sens et malgré la perspective laborieuse que cela représente, il serait utile d'étudier formellement ce domaine, en particularisant et simplifiant au maximum les données, dans l'esprit de schématisation qui permet l'étude des noyaux de viabilité en théorie de la viabilité (^{2W}). Au demeurant, cette étude va réclamer celle des noyaux de viabilité des structures à contrôle spécifiés $\mathring{\Sigma}^u$.

4R [4.10.C, 4.13.C] Par ex., [121], p. 10, [94], p. 7-8, [8], chap. 1 à 5.

4S [4.10.E] Voir la fin de l'alinéa 3.13.E. Ce procédé devient sans objet si le protocole de type argument max en cause est lui même univoque. Il serait utile de savoir sous quelles conditions, sur les jeux de données de base et d'anticipation, $\Delta°$ et ω, il peut en être ainsi.

4T [4.11.C, 4.12.B] Cette précaution n'est pas si triviale que ça. Par exemple, elle n'est pas respectée dans le petit modèle de croissance endogène à horizon fini présenté dans l'exercice 2.1 de [121], p. 10-11, vu que la condition finale (6), p. 11, exprime justement que le capital a été consommé à la période finale T, lacune qui n'est que renforcée par l'ambiguïté usuelle dans ce type de modèle (alinéas 1.4.A,B) sur la signification du cheminement $(k_t,\ 0 \leq t \leq T)$ obtenu par optimisation intertemporelle (évolution réelle ou anticipation ?) : voilà où conduit l'obsession académique d'un horizon infini qui marque cet ouvrage !

4U [4.11.D] Il est plus usuel de prendre les fonctions d'utilité instantanées $\theta_{s,\sigma}$ (i.e. la fonction θ_*) proportionnelles à une fonction de type CES ou à la fonction LOG qui en est la limite lorsque l'élasticité tend vers 1 (par ex., [107], p. 1315). On préfère ici la fonction θ_* définie par la relation (4.76) sous la condition (4.77), car elle est ≥ 0, ce qui permet de n'avoir que des termes ≥ 0 dans la somme au second membre de la relation de définition (4.73a), le coefficient $\hat{\nu}^J > 0$, supposé assez petit (alinéa 5.4.G), étant mis pour assurer la dérivabilité à l'origine (alinéas 4.3.G,H).

4V [4.12.E] On trouve les deux variantes dans le modèle DICE : la variante (4.82) correspond au leitmotiv de «stabilisation des émissions au niveau de 1990» et la variante (4.81b) à un scénario de contrôle des températures (par ex., [107], p. 1317, et [108], p. 196). On souligne à ce propos l'absence, dans la littérature concernant la modélisation de l'effet de serre, des distinctions méthodologiques faites ici, tant celle entre contraintes structurelles et contraintes d'exploitation que celle entre les deux types de ces dernières, absence qui se conjugue avec l'ambiguïté courante entre l'expression des contraintes définissant le modèle et celle de ses résultats (par ex., [107], p. 1317-19).

4W [4.13.C] Par ex., [107], relations (1) et (2), p. 1315, et [108], relation (2.1), p. 10.

4X [4.14.A] Des traces de cette expérimentation figurent dans le journal de travail [44]. Par exemple, le report de l'optimisation dans l'anticipation (alinéas 1.2.B et 3.7.E,G) y apparaît aux p. 431-34.

4Y [4.14.C] Cette insuffisance est, par ex., mentionnée, en termes généraux, dans le rapport de l'IIASA [124], p. 2.

4Z [4.14.C] Voir [44], entre autres p. 4-8, 75, 94-233, 264-472 (dont p. 329-31 et 431-34 ([4X])), 537-43, 799-811.

5a [5.1.E] Ce nouveau poste **b** est un "b gras".

5b [5.2.F] Le logiciel d'optimisation MINOS 5 ne permet pas l'optimisation globale, même s'il comporte certaines fonctionnalités de balayage global ([23], appendice D, p. 201). Ainsi, l'optimum cherché peut dépendre des conditions du calcul que sont l'initialisation et les bornes des variables.

5c [5.4.B] La mesure des quantités du bien produit en "kilo.giga dollars" ne doit pas faire oublier qu'il s'agit d'une unité physique, qui désigne une certaine quantité du bien, conformément à la pratique courante en macroéconomie (alinéas 4.1.H et 4.3.B), quantité du bien d'une valeur de 10^{12} dollars aux prix de référence (milieu des années 1990).

5d [5.4.G] Dans le cas déterministe, pour chaque $\sigma \in [s,\tau]^{\#}$, on a, $\sigma + = \{\sigma+1\}$.

5e [5.5.A] Par ex., [7], p. 210 sq.

5g [5.5.A] En particulier, en ex URSS, Afrique, Asie du sud et de l'est. A cela s'ajoutent les ambiguïtés de la mesure du capital, étant donné que la croissance du capital n'est pas celle du PIB. Au demeurant, l'évaluation (5.26a) du coefficient de dépréciation α_k est nettement plus faible que celle du modèle DICE qui est de 0,1 par an, soit 1 pour 10 ans (par ex., [108], p. 14).

5h [5.5.B] L'évaluation de e_m^* est tirée de [107], Fig. 2, p. 1318, ou de [108], Fig. 3.1, p. 27, départ de la courbe, tandis que celle de d_m^* l'est de [69], Figure 5, p. 15, départ des courbes (par an). Cette disparité de sources tient, en particulier, au regrettable usage simultané - par ex., dans les référence ci-dessus - de deux unités (ppm et Gt de carbone), dont le rapport semble variable (en gros, 2 Gt de carbone par ppm, mais pas de façon rigoureuse ; alinéa 5.6.G).

5i [5.5.B] Par ex., equation (8), p. 1316, de [107], équation (2.8) (?) de [108], p. 16, équation C de [25], p. 37.

5j [5.5.B] Les évaluations (5.38) sont celle utilisées par Norhaus pour le modèle DICE ([107], p. 1316, et [108], p. 16).

5k [5.5.C] Par ex., [108], p. 13.

5m [5.5.C] Ces essais ont été consignés dans le journal de travail [44]. Voir, entre autres, les rubriques "borne sup. de la production", "rapport capital sur travail", "catastrophes", de son index.

5n [5.5.A,C-G, 5.9.E] L'expression "par (ou de) convenance", qui est employée à propos de la justification de certaines des spécifications utilisées au § 5.4, signifie que celles-ci ont été retenues, après divers essais, de façon à ce que les déterminations correspondantes fassent apparaître - via les cheminements qu'elles fournissent - les types d'évolution relatives à la problématique des limites qu'un de buts du modèle est d'illustrer. Ainsi, cette démarche de spécification "par convenance" peut être considérée comme une forme d'identification (des données contingentes) du modèle à partir des résultats souhaités, même si la première est très empirique et loin de présenter le caractère systématique et quantifiable que stipule la théorie de l'identification d'un modèle : en fait, cette systématisation réclamerait, d'abord que les types d'évolution souhaités soient eux-mêmes davantage systématisés, ensuite et surtout que les problèmes inverses que réclame l'identification soient résolubles, ce qui n'est justement pas le cas, en particulier pour ceux de ces problèmes qui sont du type à optimisations multiples dont un autre des buts de l'exposé est de faire ressortir l'importance. En fait, cette situation de précarité quantitative conduirait plutôt à comparer la démarche d'"identification par convenance" en cause à celle des courants de la "réalité virtuelle" et de la "vie artificielle" (dont les modèles sont sans référent ; par exemple les automates autoreproducteurs de von Neumann), même si l'objet modélisé dans ce chapitre - Gaia [12], la "planète bleue", qui risque fort de devenir noire - et les visées du développement durable n'ont rien de virtuel !

5o [5.5.D] Un doublement de la teneur en gaz carbonique est considéré comme déja très préjudiciable (par ex., [69], p. 31, ou [122], p. 7).

5p [5.5.F] On pourrait aussi appliquer la relation (5.43a) avec m = 3, soit une dépense de 4,8% pendant 30 ans : c'est seulement la spécification (5.30b) de $\underline{\underline{e}}_b$ qui compte en fonction des résultats qu'elle permet ([5n]).

5q [5.5.F] D'après les relations (5.30b,c) et (5.24d), $\check{\nu}_b \underline{\underline{e}}_b e_n^* = 10$. Ainsi, les propriété énoncées du coefficient $\check{\nu}_b$, correspondent, via la relation (5.3b), à ce que $\underline{\phi}(10,55) = 0,008$ et $\underline{\phi}(10,-27,5) = 0,97$.

5s [5.6.D] Par ex., un lecteur non averti de la définition formelle d'un plan viable (alinéa 3.4.C) et attribuant inconsidérément au qualificatif "viable" une signification analogue à celle du qualificatif "pérenne" ou "durable", pourrait être perplexe de voir qualifier de viable le plan présenté au § 5.7, alors qu'il fait apparaître une catastrophe à long terme : "viable" sigifie ici seulement "qui vérifie les contraintes stipulées par la structure de contrôle en cause".

5t [5.6.F] Par contre, les variables de dynamique de type m, i.e. les variables de niveaux d'émission $\delta^s_{\sigma,m}$, restent mesurées en Gt d'équivalent carbone : cette disparité est circonstancielle en ce sens qu'elle est introduite pour se conformer à l'usage en cours dans la littérature sur l'effet de serre ([5h]).

5u [5.6.G] Dans le cas déterministe où l'on se place (alinéa 5.4.C), s et σ sont considérés comme des entiers, puisque S est identifié à l'intervalle [0,T] des entiers. Les éléments de S sont alors appelés "périodes" par abus de langage.

5v [5.7.A] Par exemple, l'équation d'évolution (5.8) se traduit, dans le tableau 1, par le fait que, pour chaque période s < 21, les valeurs des variables d'état $\varepsilon^s_{\sigma,i}$ (i = k, m, n, **b**) qui sont situées sur la deuxième ligne du bloc des variables d'anticipation à la période s (i.e. avec s+1 mis pour σ) coïncident avec les valeurs des variables correspondantes qui sont situées sur la première ligne du bloc des variables d'anticipation à la période s+1 (i.e. avec s+1 mis pour s et pour σ). Ainsi, pour s = 2 et i = k, c'est la valeur 174,90 qui figure sur les deux lignes en cause. Mais, cette coïncidence ne se généralise pas aux variables de dynamique $\delta^{s}_{\sigma,j}$ ($j \in J$), i.e. dans le tableau 2, même si elle a encore lieu pour certaines d'entre elle. Ainsi, encore pour s = 2, elle n'a pas lieu pour j = k (valeurs de 87,45 et 122,00), mais a lieu pour j = a (valeur de 558,98), cette dernière coïncidence tenant à la contrainte de production (5.17b) et à la coïncidence des variables d'état en cause.

5w [5.7.B] Un telle interprétation devrait être appuyée sur une analyse formelle du système des contraintes en cause. Ne pouvant faire ici de telles analyses, on évite autant que possible ces interprétations sauvages, vu le propos plus thématique qu'analytique des commentaires : il s'agit d'expliciter comment le cheminement présenté répond à la finalité de l'exercice (alinéas 5.6.A, 5.7.A, 5.8.A) et non d'expliquer les particularités que révèle un examen détaillé du déploiement correspondant.

5y [5.8.B] Plans et cheminements coïncident ici, vu l'option déterministe (alinéas 5.4.C et 5.6.B), mais c'est bien d'un plan qu'il s'agit.

5z [5.8.B] On rappelle que les taux de ponction $u_{s,\sigma,q}$ et $u_{s,\sigma,r}$ sont donnés (alinéas 5.6.B,C), ce qui fait que leurs particularités sont à envisager en fonction de leur mode de détermination (§ 5.9). Parmi ces particularités, on note la dépendance des taux de ponction vis-à-vis de la période d'anticipation σ, au moins lors de la phase transitoire, jusqu'à la période s = 9. Par exemple, pour s = 3, $u_{s,\sigma,q}$ vaut 0,155, pour $\sigma = 3$, et 0,216, pour $\sigma = 4$.

5A [5.8.B] Au-delà des propriétés thématiques de la stabilisation qui font l'objet des commentaires, l'examen détaillé de ce cheminement permet d'y constater de nombreuses autres propriétés et particularités. On en signale deux ci-après de types très différents, sans chercher à les expliquer, conformément aux limites du propos ([5w]). La première, très particulière et encore relative à la stabilisation, réside en ce que la production $\delta^{s}_{\sigma,a}$ n'atteint effectivement sa borne supérieure $\underline{\underline{d}}_a$, lorsque la stabilisation est acquise, que dans l'anticipation, à la seconde période, i.e. pour $\sigma = s+1$. La seconde, qui concerne la phase transitoire, réside dans la difficulté des premières périodes, avant la période s = 5 : la consommation y reste inférieure à la consommation initiale et ne commence à croitre que lorsque le capital et la population sont stabilisés.

5B [5.9.C] L'identité de forme entre ces deux systèmes de contraintes - celui définissant les domaines du protocole d'anticipation et celui définissant les plans viables - est exploitée dans le programme GAMS de résolution (alinéa 5.2.F), lequel permet par simple basculement de traiter l'un ou l'autre. Elle tient évidemment à ce qu'une anticipation est un plan partiel (alinéa 3.6.B), mais ne doit pas faire oublier la différence conceptuelle - liée à la question téléologique - entre les deux optimisations (alinéas 2.14.F et 3.17.D). Par ailleurs, l'approche abstraite des systèmes de contraintes, via l'appareil conceptuel des structures de contrôle et de leurs resserrements, peut sembler bien compliquée pour des systèmes aussi simple : sa justification réside, au moins, dans le propos méthodologique du "petit" modèle en cause (alinéas 4.1.F et 5.1.A).

5C [5.9.E] Voir [44], p. 935-70.

5D [5.9.F] Le caractère normatif de la fonction objectif Q apparente cette détermination à un exercice de prospective de base (alinéas 3.1.F et 3.18.C), exercice qui est justifié a posteriori par la simulation du § 5.8 qui en découle ([3δ]).

5E [5.10.C] Pour obtenir les plans présentés, on a introduit la borne inférieure $d_c^{\#}$ [relation (5.35c), adaptée à la mesure en KG$/Ghxan (alinéa 5.6.F)], pour les variables $\zeta_{s,c}$ ($s \epsilon S^{\theta}$), faute de quoi le cheminement (localement) optimum obtenu est beaucoup moins favorable, donc est à éliminer du point de vue de l'optimisation globale, la valeur maximumm de la fonction objectif étant inférieure à 1, alors qu'elle est supérieure à 200 avec ces bornes, lesquelles ne sont jamais atteintes. De plus, cet artefact a lieu de façon analogue pour les deux schémas de contrôle et est concomitant d'une chute du niveau de population $\xi_{s,n}$, qui devient nul à partir de la période s = 4, ce qui conduit aussi à éliminer ces cheminements du point de vue de leur signification, de leur interprétation (voir [44], p. 1033-42, en particulier p. 1036).

Ab [A.2.A] La démonstration qui suit est une adaptation, au cas à incertitude finie, de celle du théorème 40.1, pp. 362-5, de [16], dans le cas déterministe.

Ac [A.4.B] Par ex., [16], p. 60, [61], p. 140, [121], pp. 241 sq.

Ad [A.4.B] Contrairement aux exposés usuels, qui partent du principe d'optimalité de Bellman ([Ac]), l'accent est mis ici - conformément à l'orientation de ce texte (alinéas 1.2.C,D) et à l'utilisation qui est faite du théorème de Bellman (alinéas 2.15.E,F, 3.17.H) - sur la propriété d'optimisation locale (2.55) [ou (A.15)], en la présentant indépendamment de ce principe, au demeurant comme dans le théorème 40.1 de [16] ([Ab]) ([3Y]).

Ae [A.6.E] Par ex., [9].

Af [A.6.G] Par ex., [47], p. 131-32 et 150-52. C'est seulement pour mémoire qu'on indique ici le lien entre la théorie de l'équilibre général et la formalisation des problèmes à optimisations multiples introduite dans ce §.

Ag [A.6.G] Par ex., [3].

Ah [A.6.G] Cette extension est un des objets de [41].

Aj [A.6.G] Voir, par ex., [41], § 5.3, p. 37-39, et § 8.9, p. 90-92.

BIBLIOGRAPHIE

1 Association Internationale Futuribles (1976), Programme de l'Association Internationale Futuribles, Revue Futuribles, 7, p. 361-65.

2 Arkin V.L., Evstigneev I.V. (1987), Stochastic Models of Control and Economic Dynamics, Academic Press, London.

3 Arrow K.J., Debreu G. (1954), Existence of an equilibrium for a competitive economy, Econometrica, 22, 265-90.

4 Aubin J.P. (1983), La théorie de la viabilité, Le Courrier du CNRS, 50, 31-34.

5 Aubin J.P. (1991), Viability Theory, Birkhäuser, Boston, Berlin.

6 Aubin J.P. (1997), Dynamic Economic Theory. A Viability Approach, Springer, Berlin.

7 Banque Mondiale (1996), Rapport sur le développement dans le monde, Washington.

8 Barro R.J., Sala-i-Martin X. (1995), Economic Growth, McGraw-Hill.

9 Basar T., Olsder G.J. (1982), Dynamic Non-Cooperative Games Theory, Academic Press, New York.

11 Beltratti A., Chichilnisky G., Heal G. (1997), Sustainable Use of Renewable Ressources, Nota di Lavoro 70.96, Fondatione Eni Enrico Mattei.

12 Bénay G. (1994), La tentation "globalitaire", Mondes en Développement, 88, p. 53-64.

13 Berge C. (1958), Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris.

14 Berger G. (1967), Etapes de la prospective, P.U.F, Paris.

15 Blanchet D. (1991), Modélisation démo-économique, PUF, INED.

16 Boltiansky V. (1976), Commande Optimale des Systèmes Discrets, Ed. Mir, Moscou.

17 Bonneuil N. (1994), Malthus, Boserup and population viability, Mathematical population studies, 4.

18 Bottazzi J.-M. (1992), Contribution à la théorie de l'équilibre général : incertain, dynamique et marchés incomplets, Thèse, Université de Paris I.

19 Boyer R. (1976), La croissance française de l'après-guerre et les modèles macroéconomiques, Revue Economique, 882-939.

21 Boyer R. (1995), ed., Théorie de la régulation, Ed. La Découverte, Paris.

22 Brillet J-L. (1981), Mini-DMS, modèle macroéconomique de simulation, Archives et documents, 35, INSEE, Paris.

23 Brooke A., Kendrick D., Meeraus A. (1992), GAMS, a user's guide, release 2.25, boyd & fraser publ. comp., The Scientific Press Series, Danvers, Mass.

24 Cass D., Shell K. (1983), «Do Sunspot Matter ?», Journal of Political Economy, 91, 193-227.

25 Chapuis T., Ha Duong M. (1996), DIAM, un modèle dynamique pour étudier l'inertie et l'adaptabilité dans le problème de l'effet de serre, in "Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement", Actes des Journées du programme environnement, vie et sociétés du CNRS, Session B.

26 Chichilnisky G., Heal G. (1997), Catastrophe Futures: Financial Markets and Changing Climate Risks, Nota di Lavoro 72.96, Fondatione Eni Enrico Mattei.

27 Ciarlet P.G. (1982), Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris.

28 CIRAD (1994), La notion de développement durable, URPA.

29 Commissariat général du Plan (1993), L'économie face à l'écologie, Ed. La Découverte, La Documentation Française.

31 Commission mondiale sur l'environnement et le développement, dite Commission Brundtland, (1988), Notre avenir à tous, Ed. du Fleuve, Montréal.
32 Courbis R. (1975), Compétitivité et croissance en économie concurrencée, Tome 1, Bordas, Paris.
33 Courrège P., Deflandre J., Matarasso P., Valette F. (1980), Présentation discutée d'une recherche d'économie physique, Rapport de recherche, CNRS-PIRDES.
34 Courrège P., Deflandre J., Matarasso P. (1982), Modèles macroéconomiques pour la prospective libre, Rapport de recherche, CNRS-PIRDES.
35 Courrège P., Deflandre J., Matarasso P. (1982), Une maquette de macroéconomie physique, (I) Présentation d'un jeu de données techniques, (II) Quelques résultats numériques, présentation générale, (III) Quelques résultats numériques, listes d'ordinateur, Rapport de recherche, CNRS-PIRDES.
36 Courrège P. (1985), ATHEMA, Modèle macroéconomique pour la prospective libre, Rapport de recherche, CNRS-PIRSEM.
37 Courrège P. (1985), Une micromaquette illustrative du modèle ATHEMA, (I) et Annexe, Rapport de recherche, CNRS-PIRSEM.
38 Courrège P., Feyrit M., Laville J., Simeon C. (1987), Application du modèle ATHEMA à un canton rural d'Aquitaine, (I) Présentation d'un jeu de données techniques, (III) Présentation de quelques résultats, Rapports de recherche, CNRS-PIRSEM et GAREP.
39 Courrège P., Siméon C. (1993), Tableau de la base réelle de l'économie française en 1986, Rapport de recherche, CNRS-ISMEA.
41 Courrège P., Gourdel P. (1996), Une classe de modèles statiques d'équilibre général avec taxation, Etat producteur et échanges extérieurs, Cahiers Eco & Maths, 95.57 et 96.74, CERMSEM, Université de Paris I.
42 Courrège P., Gourdel P., Lacroix J. (1997), Présentation d'une maquette du modèle CLFPSR, Cahiers Eco & Maths, 97.66, CERMSEM, Université de Paris I.
43 Courrège P., Gourdel P., Lacroix J. (1997), Spécification formelles du modèle CLFPSR, Cahiers Eco & Maths, 97.67, CERMSEM, Université de Paris I.
44 Courrège P., Matarasso P. (1999), Journal de travail PC-PM, manuscrit, p. 1-1071.
45 Dasgupta P.S., Heal G.M., (1979), Economic Theory and Exhaustible Ressources, Cambridge University Press.
46 Debreu G. (1974), Excess Demand Functions, Journal of Mathematical Economy, 1, 15-21.
47 Debreu G. (1984), Théorie de la valeur, Dunod, Paris.
48 De Gennes P.-G. (1998), Un ordinateur, c'est idiot, Revue Transfert, 1.01.
49 De Jouvenel B. (1964), L'art de la conjoncture, Hachette, Paris.
51 Delaunay J. et le Club de Rome (1972), Halte à la croissance, Fayard, Paris.
52 Deleau M., Malgrange P. (1978), L'analyse des modèles macroéconomiques quantitatifs, Economica, Paris.
53 Delestré H. (1979), L'accumulation du capital, Economie et Statistique, Numéro Spécial Patrimoine, 33-47.
54 Del Vigna C., Courrège P. (1994), Arbres et ordres ; une algébrisation relationnelle, Document de travail, INALCO, Paris.
55 Devillers M.-H., Ewenczyk P. (1982), La prospective libre, Babylone n°1, p. 241-45, 10/18, Union générale d'éditions, Paris.
56 Dietz F.J., Simonis U.E., van der Straaten J. (1992), Sustainability and Environment Policy. Restraints and Advances, Ed. Sigma, Berlin.
57 Doob J.L. (1953), Stochastic processes. J. Wiley and Sons, New York.

58 Dynkin E.B., Yushkevich A.A. (1980), Controlled Markov Processes, Springer, Berlin.

59 Edmonds J.A & al. (1992), Modeling future Greenhouse gaz emissions: The second generation model description, United Nations University Conference on Global Change and Mmodelling, Tokyo, 1991.

61 Faurre P. (1984), Cours d'Analyse numérique. Notes d'optimisation, Ecole Polytechnique.

62 Fiacco A.V., Mc Cormick G.P. (1968), Non Linear Programming ; Sequential unconstrained minimization techniques, John Wiley, New York.

63 Florenzano M., Gourdel P. (1994), T-Period Economies with Incomplete Markets, Economics letters, 44, 91-97.

64 Fouquet D., Charpin J.M., Guillaume H., Muet P-A., Vallet D. (1978), DMS, Modèle dynamique multisectoriel, C 64-65, INSEE, Paris.

65 Fuchs G., Laroque G. (1976), Dynamics of Temporary Equilibria and Expectations, Econometrica, 44, 1157-78.

66 Futia C.A. (1981), Rational Expectations in Stationnary Linear models, Econometrica, 49, 171-192.

67 Geanakoplos J.D., Polemarchakis H.M. (1991), Overlapping Generations, in W. Hildenbrand, H. Sonnenschein, ed., Handbook of Mathematical Economics, Vol. IV, Chap. 35, North-Holland, Amsterdam.

68 Gerlagh R. (1997), Grandfathering emission entitlements and discounting the future, an intergenerational analysis, IVM (Institute for Environmental Studies), Amsterdam.

69 GIEC (1997), Stabilisation des gaz atmosphériques à effet de serre : conséquences physiques, biologiques et socio-économiques, Groupe International d'Experts sur le Changement Climatique, Document technique III.

71 Godard O. (1998), Débat autour du principe de précaution, Natures Sciences Sociétés, 6, 40-45.

72 Gondran M., Minoux M. (1979), Graphes et algorithmes, Eyrolles, Paris.

73 Gourieroux C., Laffont J.J., Montfort A. (1982), Rational Expectations in Dynamic Linear models : Analysis of the Solutions, Econometrica, 50, 409-25.

74 Grandmont J.-M. (1977), Temporary General Equilibrium Theory, Econometrica, 45, 535-72.

75 Guesnerie R. (1989), A Propos de la Rationalité des Anticipations Rationnelles, in P. Artus et F. Bourguinat, ed., Théorie Economique et Crise des Marchés Financiers, Economica, Paris, 31-43.

76 Guesnerie R. (1992), An Exploration of the Eductive Justifications of the Rational-Expectations Hypothesis, American Economic Review, 82, 1254-78.

77 Guillemin C. (1975), La gestion des matières premières minérales et la crise, Revue Futuribles, 4, p. 307-28.

78 Ha Duong M., Grubb M.J., Hourcade J.-C. (1997), Influence of socioeconomic inertia and uncertainty on optimal CO_2-emission abatement, Nature, 390, 270-73.

81 Hamilton L.D., Goldstein G., Lee J.C., Manne A., Marcuse W., Morris S.C, Wene C.-O. (1992), MARKAL-MACRO : an overview, Brookhaven National Laboratories, #48377.

82 Helpman E., Krugman P.R. (1986), Market Structure and Foreign Trade ; Increasing Returns, Imperfect Competition, and The international Economy, The MIT Press, Cambridge, Mass.

83 Henry C. (1998), Orientation du progès technique et développement durable, monographie du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, Paris.

84 INSEE (1977), METRIC, Modèle économétrique trimestriel de la conjecture, Annales de l'INSEE, 26-27.

85 Israel G. (1996), La mathématisation du réel, Ed. du Seuil, Paris.

86 Jollivet M. (1998), Eléments pour une réflexion interdisciplinaire sur le concept de développement durable. Un point de vue de sciences sociales, Natures Sciences Sociétés, 6, n°4, 50-52.

87 Laborie P., Ghallab M. (1995), Ixtet : an integrated approach for plan generation and scheduling, Proceedings ETFA-95, p. 425-95.

88 Laffargue J-P. (1980), Les modèles macrodynamiques de politique économique : dialogue entre le théoricien et l'économètre, Annales de l'INSEE, 40, 33-64.

89 Lions J.-L. (1968), Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris.

91 Lions J.-L. (1997), Modélisation Mathématique et Environnement ; Quelques Remarques, in F. Blasco (ed.), Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement, Elsevier, Paris, 79-90.

92 Lucas R.E., Prescott E.C. (1971), Investment under Uncertainty, Econometrica, 39, 659-81.

93 Lucas R.E. (1976), Econometric Policy Evaluation : a Critique, in Brunner K., Meltzer A. (ed.), The Phillips Curve and Labor Markets, supplément au Journal of Monetary Economics.

94 Lucas R.E. (1988), On the mechanics of economic developpement, Journal of Monetary Economics, 22, 3-42.

95 Magill M., Shafer W. (1991), Incomplete Markets, in W. Hildenbrand, Sonnenschein (ed.), Handbook of Mathematical Economics, Vol. IV, Chap. 30, North-Holland, Amsterdam.

96 Malgrange P. (1989), Forces et faiblesses des modèles macro-économétriques, in Cornet B., Tulkens H. (ed.), Modélisation et decisions économiques, De Boeck-Université, Bruxelles.

97 Manne A.S., Richels R.G. (1992), Buying Greenhouse Insurance : The Economic Costs of Carbon Dioxide Emission Limits, The MIT Press, Cambridge, Mass.

98 Manne A.S., Rutherford T.F. (1994), International Trade in Oil, Gas and Carbon Emission Rights: An intertemporal Generation Equilibrium Model, The Energy Journal, 11, 57-76.

99 Matarasso p. (1997), Quelques remarques sur l'intégration des modèles climatiques, biophysiques et économiques dans le cadre de la recherche sur l'environnement, in F. Blasco (ed.), Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement, Elsevier, Paris, 197-205.

100 Mill J.S. (1848/1970), Principles of Political Economy, Harmondsworth.

101 Monod J. (1970), Le hasard et la nécessité, Ed. du Seuil, Paris.

102 Mori S. (1996), Maria Multi-regional Approch for Resource and Industry Allocation model and its First Simulations, in A. Amano (ed.), Global Warming, Carbon Limitation and Economic Development, CGER-report, ISSN 1341-4356, CGER-I019-96, Center for Global Environmental Research, Environment Agency of Japan.

103 Mouttet F., Plateau C., Brillet J.L., Morand J.P. (1983), Mini-DMS-Energie, modèle des interactions économie-énergie, Archives et Documents, INSEE, Paris.

104 Muet P.A. (1992), Théories et modèles de la macroéconomie, Economica.

105 Muth J. (1961), Rational Expectations and the Theory of Price Movements, Econometrica, 29, 83-102.

106 Negishi T. (1960), Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Metroeconomica, 12, 92-97.
107 Nordhaus W. D. (1992), An Optimal Transition Path for Controlling Greenhouse Gases, Science, 258, 1315-19.
108 Nordhaus W. D. (1994), Managing the Global Commons ; The Economics of Climate Change, The MIT Press, Cambridge, Mass.
109 Nordhaus W. D., Yang Z. (1996), A Regional Dynamic General-Equilibrium Model of Alternative Climate-Change Strategies, American Economic Review, 86, 741-65.
111 Pressat R. (1973), L'analyse démographique, P.U.F, Paris.
112 Radner R. (1972), Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets, Econometrica, 40, 289-303.
113 Radner R. (1982), Equilibrium under Uncertainty, in K.J. Arrow, M.D. Intriligator (ed.), Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, Chap. 20, North-Holland, Amsterdam.
114 Romer P.M. (1986), Increasing Returns and Long-Run Growth, Journal of Political Economy, 94, 1002-37.
115 Sachs I. (1993), L'écodéveloppement, Ed. Syros, Paris.
116 Sargent T.J., Wallace N. (1976), Rational Expectations and the Theory of Economic Policy, Journal of Monetary Economics, 2, 169-83.
117 Sauvy A. (1973), Croissance zéro ?, Calman-Lévy, Paris.
118 Shiller R. J. (1978), Rational Expectations and Dynamic Structure of Macroeconomic Models, Journal of Monetary Economics, 4, 1-44.
119 Stengel R. E. (1986), Stochastic Optimal Control, Theory and Applications, Wiley.
121 Stockey N.L., Lucas R.E. (1989), Recursive Methods in Economic Dynamics, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
122 Toth F.L., Bruckner T., Füssel H.L., Leimbach M., Petschel-Held G., (1997), The tolerable windows approach to integrated assessments, IPCC Asia-Pacific Workshop on Integrated Assessment Models, Tokyo, Japan.
123 Von Bertalanffy L. (1968), General System Theory, George Brasiller, New York.
124 Wexler L. (1996), Improving Population Assumptions in Greenhouse Gaz Emissions Models, IIASA, WP-96-99, Laxenbourg.
125 Zangwill W.I. (1967), Non Linear Programming : a unified approach, Prentice Hall, London.

INDEX

Acteurs décentralisés, 3.1.D, 4.1.C
Admissibilité
  contraintes d'-, 2.3.B, 2.4.B
  correspondance d'-, 2.2.A, 3.2.D,
Admissible \ 4.2.D
  commande -, 2.2.B
  plan -, 2.3.B, 3.4.C
Aléa, 2.1.B, 3.1.E
Anticipation, 3.6.A
  lien entre simulation et -, 3.14.K
  (s) rationnelles, 3.6.C, 3.10.E-G
  structure de contrôle
    à - (s), 3.11, 3.12.D
Arbre des aléas, 2.1.B-E
Bellman
  fonctions de -, voir fonction
  théorème de -, 2.12
Calage, 4.4.B, 5.5.A
Cas déterministe, 2.1.F, 5.4.C
Cas standard, 2.2.E, 3.2.B
Chemin, 2.1.E
Cheminement, 2.4.A, 3.5.B
  engendré par une stratégie, 2.9.C
  induit par un plan, 2.4.D, 3.5.C
  viable, 2.4.B, 3.5.B
Commande
  admissible, compatible, 2.2.B,D
  structure de contrôle
    à -(s) doubles, 3.3.C
  espace des -(s), 2.2.A
  variable de -, 2.2.C
Comportement spontané, 3.1.D,E
Condition d'univocité, 3.13.B
Conditions finales, 1.1.A, 3.7.F
  protocole de -, 2.6.C, 3.12.E
    d'anticipation, 3.7.F, 4.10.B, 5.3.E
  de stationnarité, 3.8.C, 4.1.E
Contraintes d'admissibilité,
  2.3.B, 2.4.B, 4.2.D, 5.3.C
Contrôle
  problème du - optimal, 2.10.B
  (s) spécifiés,
    voir structure de -
  structure de -, voir structure
  théorie du -, 1.1.E, 1.2.D
    optimal, 2.10, 2.14.D
  variable de -, 3.2.C, 4.3.A

Correspondance
  d'admissibilité, 2.2.A, 3.2.D, 4.2.D
Date, 2.1.B
Déploiement (d'anticipations), 3.9.B
  admissible, 3.9.B
  conditionné, 3.9.B
  d'un plan, 3.9.B, 5.6.B
  intégré, 3.9.B
  plan associé à un -, 3.9.B
  propriété de rigidité
    d'un - intégré, 3.9.C
Développement durable, 4.1.E
Domaine
  de viabilité univoque, 3.13.B
  d'un protocole d'anticip., 3.7.A
  conforme de base, 3.8.B
  standard, 4.2.A
Données
  de base 3.2, 4.2
  extensives, 2.2.C
  extensives de base, 3.2.B
  fonctionnelles, 2.2.D
  fonctionnelles de base, 3.2.D
  jeu de - de base, 3.2 E, 4.2.G, 5.4.H
  opérationnelles, 3.12.B
Dynamique
  de fonctionnement, 3.2.B
  des acteurs décentralisés, 3.2.B,C
  modèle -, voir modèle
  variable de -, 3.2.C, 4.3.A
Economie régulée, 1.1.A, 3.1.D,E
Equation \ 4.1.B,C
  d'évolution, 2.3.A, 2.4.A, 4.2.C,
  fonctionnelle \ 5.3.B
    de Hamilton-Jacobi-Bellman, 2.12.A
Equilibre
  général classique, A.6.G
  intertemporel, 1.1.A,D, 3.18.B
Espace standard, 2.2.E
Etat (du système)
  des acteurs décentralisés, 3.2.C
  espace des - (s), 2.2.A
  initial, 2.2.A, 2.3.A
    univoquement viable
      ou 1-viable, 3.13.B
  stationnaire, 4.1.E
  variable d'-, 2.2.C, 3.2.C, 4.3.A

Evénement
élémentaire, 2.1.B
arbre des - (s), 2.1.B-E
Exploitation (voir aussi procédure)
mode d'-, 3.12.A,B
par optimisation
intertemporelle, 1.1.A, 2.14.C
comportementale, 2.14.F
par simulation, 1.1.A, 2.4.D, 3.5.C, \ 4.9.C
libre, 3.14.B, 5.6.B
sous contraintes, 3.14.H
pratique, 2.14.C, 3.12.C
théorique, 2.14.C
Fonctions de base, 4.2.E, 4.5 à 4.8, 5.5
Fonction d'évolution, 2.2.A, 3.2.D,
Fonction objectif \ 4.2.C, 5.3.B
d'anticipation, 3.7.E
de classe nc, 4.10.C, 5.4.G
de type
normatif, 3.12.G, 4.13.B
comportemental, 3.12.G, 4.13.C,D
d'utilité sociale, 1.4.B, 4.13.C
locale d'anticipation, 3.7.E
locale, 2.9.D
réalisée par un resserrement, 2.15.C
relative à un
jeu de données de base, 3.12.F
séparable
sous forme extensive, 2.11.A
sous forme réduite, 2.11.A
sous forme extensive, 2.10.C
sous forme locale, 2.9.D
de Bellman, 2.12.B
sous forme réduite, 2.10.B
Fonctions type, 4.4.C-E, 5.1.C,D
Fonction(-valeur) de Bellman, 2.12.A
Grandeurs de base, 4.3.B
Incertitude
traitement de l'-, 2.1.B, 2.1.H
traitement probabiliste de l'-,
Inférence, voir règle \ 2.1.H, 2.10.C
Instances régulatrices, 3.1.D
Macroéconomique
modèle de prospective -, voir modèle
prospective -, voir prospective
système concret -, voir système
Mode
à contrôles spécifiées, 3.12.B
de conditionnement d'un plan par un
protocole d'anticip., 3.10.A
Mode (suite)
d'exploitation d'une str. de contrôle
à commandes doubles, 3.12.A,B
total, 3.12.B
Modèle dynamique de prospective
macroéconomique 1.1.A, 3.1.F
Niveau de développement, 4.1.I, 4.3.A
Noyau (de viabilité), 2.8.B
Optimisation, 1.1.A
comportementale, 2.14.F
en contrôle optimal, 2.10, 2.14.D
globale, locale, 2.13.A
(s) multiples
problèmes à -, A.6.C,D, 3.15.E
problèmes à double -, A.6.E, 3.15.E
Optimum
plan -, 2.10.B
local, 5.2.D,F, 5.10.C
Partie spontanée d'un plan, 3.4.D
Période élémentaire 2.1.B, 5.4.C
Plan, 2.3.A, 3.4.C
admissible 2.3.B, 3.4.C
compatible avec une stratégie 2.9.C
engendré
par une stratégie, 2.9.C
par un schéma de contrôle, 3.13.B
fortement conditionné, 3.10.B
inhérent à une simulation, 3.14.B
simplement conditionné, 3.10.B
sous forme extensive, 2.4.E
sous forme réduite, 2.4.E
viable, 2.3.B, 3.4.C, 5.2, 5.3
Politique publique, 1.1.A, 3.1.D, \ 4.1.C,E
Population
endogénéisation de la -, 4.1.I, 4.14.C, 4.7, 4.8
modèle à deux - (s), 4.14.C
stabilisation de la -, 4.1.E, 4.8.D 5.6.A, 5.8, 5.11.F
survie de la -, 4.7.A, 4.8.D
Prévision, 3.1.F, 3.5.B, 3.14.F
Principe
de causalité, 3.1.K, 3.14.C
de précaution, 3.1.F
Probabilité (mesure de -), 2.10.C
Problématique des limites, 4.1.D
Procédure (voir aussi exploitation)
d'exploitation, 1.1.A, 1.3.A, 2.14, 3.12, 3.14, 3.16
primaire, 2.14.B

Profondeur, 3.2.E
  d'anticipation, 3.6.A
  d'un schéma de contrôle, 3.3.B
  protocole de ress. d'expl.
    de - nulle, 3.12.E
  fonction objectif
    de - nulle, 3.12.F
Programmation dynamique, 2.13.A
Propriété de Progressivité , 2.4.E
Prospective (macroéconomique)
  comportementale, exploratoire, 3.1.F
  de base, 3.1.F, 3.18.C
Protocole
  d'anticipation, 3.7.A
    conforme, 3.8.B
    conforme de base, 3.8.B
    décisif, 4.10.E
    de référence, 3.7.E
    de type argument max, 3.7.E
    domaine d'un -, 3.7.A
    engendré par un protocole de cond.
      finales d'anticipation, 3.7.F
    pérennisant, 4.10.B, 5.3
    resserrement d'un -, 3.7.D
    univoque, 3.13.E
  de conditions finales, 2.6.C, 3.12.E
    d'anticipation, 3.7.F
  de resserrement, 2.6.A
    comportemental, 2.6.D
    de type délimitant, 4.12.C,D
    de type pérennité, 4.12.B,D
    d'exploitation, 2.6.D
    local 2.6.A,
    simple sur l'état, 2.6.B
Question téléologique, 1.1.D, 1.4.A,
    2.15, 3.16, 5.10
  de départ, 3.16.D
  de type 1, 2, 1&2, 2.15.B
  illustr. de la -, 4.9, 5.10, 5.11.B
  pour une fonction objectif
    séparable, 2.15.E, 3.17
  question inverse
    de la -, 2.15.I, 3.16.K
  sous forme constr., 2.15.D, 3.16.F
Réalisateur, exact, approché, 2.15.C
  ponctuel, 2.15.G
Réalisation (d'un plan), 2.3.A
Régime de référence, 4.4.B, 5.4.D
Règle
  d'inférence
    des simulations libre, 3.14.D
  d'exclusivité
    des simulations libre, 3.14.G
Resserrement, 2.5.B
  brut, 2.6.A
  ensemble ordonné des - (s), 2.5.B
Scénarios (méthode des -), 3.1.F
Schéma de commande, 2.3.A
  viable, 2.3.B
  engendré par une stratégie, 2.9.C
  spontané d'un plan, 3.4.D
Schéma de contrôle, 3.3.B
  d'un plan, 3.4.D
  détermination d'un -
    par simulation sous contr., 3.14.H
    par la procédure empirique, 5.9
Simulation (voir exploitation)
  lien entre - et anticipation, 3.14.K
Stratégie, 2.9.A
  de type argument max, 2.9.D
  maximale 2.9.B
Structure de Bellman, 2.12.A
  valuée, strictement valuée, 2.12.A
Structure de contrôle, 2.2.A
  à anticipations, 3.11, 3.12.D
  à commandes doubles, 3.3.C
  à contrôles spécifiés, 3.4.B
  consistante, 2.2.B
  de base, 3.3.E
  engendrée
    par un protoc. de ress., 2.6.A
  opérationnelle, 2.14.B, 3.12.B
    totale, 3.12.B
  ponctuellement viable, 2.7.A
  primaire, 2.14.B, 3.12.B, 4.9.B-D
    type de -, 3.12.D
  totalement viable, 2.7.A
  univoquement ou 1-viable, 3.13.B
  viable, 2.7.A
Système concret, 3.1.C,D
Unités, 4.3.B, 5.4.B
Utilité sociale, 1.4.B, 4.13.C
Viabilité
  théorie de la -, 1.2.D, 2.14.B,E

TABLE DES ALINEAS PAR PAGES

§ 1.1, A-D (1), E (2)   § 1.2, A-D (2), E (3)   § 1.3, A-C (3), D-F (4)
§ 1.4, A,B (4), C,D (5)   § 1.5, A,B (5), C (6)   § 1.6, A-E (6)

§ 2.1, A,B (7), C-G (8), H (9)   § 2.2, A-C (9), D,E (10)
§ 2.3, A,B (10), C,D (11)   § 2.4, A-C (11), D,E (12)
§ 2.5, A,B (12), C (13)   § 2.6, A,B (13), C,D (14)
§ 2.7, A,B (14), C (15)   § 2.8, A,B (15), C,D (16)
§ 2.9, A,B (16), C,D (17)   § 2.10, A-C (18)   § 2.11, A (18), B (19)
§ 2.12, A (19), B-D (20)   § 2.13, A,B (20), C (21)
§ 2.14, A-C (21), D-F (22)   § 2.15, A,B (23), C-E (24), F-I (25), J (26)
§ 2.16, A,B (26)

§ 3.1, A,B (27), C-F (28), G-I (29), J-M (30)   § 3.2, A-C (31), D,E (32)
§ 3.3, A (32), B-D (33), E,F (34)   § 3.4, A,B (34) C-G (35)
§ 3.5, A-C (36)   § 3.6, A-C (37)   § 3.7, A-C (38), D-G (39)
§ 3.8, A-C (40)   § 3.9, A,B (41), C-E (42)
§ 3.10, A,B (42), C-F (43), G (44)   § 3.11, A-C (44), D-F (45)
§ 3.12, A (45), B-E (46), F,G (47), H (48)   § 3.13, A-C (48), D,E (49)
§ 3.14, A-C (50), D-F (51), G-I (52), J,K (53)
§ 3.15, A (53), B-D (54), E,F (55)
§ 3.16, A (55), B,C (56), D-F (57), G,H (58), I,K (59), L (60)
§ 3.17, A-C (60), D-H (61)   § 3.18, A (61), B,C (62)

§ 4.1, A-C (63), D-G (64), H-J (65)   § 4.2, A-D (66), E-G (67)
§ 4.3, A-C (68), D-F (69), G-I (70)   § 4.4, A (70), B,C (71), D,E (72)
§ 4.5, A (72), B-D (73), E,F (74), G (75)   § 4.6, A,B (75), C-E (76), F (77)
§ 4.7, A-C (77), D,E (78)   § 4.8, A-D (79), E-G (80)
§ 4.9, A (80), B-D (81)   § 4.10, A-C (82), D,E (83)
§ 4.11, A-C (83), D-F (84)   § 4.12, A-E (85), F (86)
§ 4.13, A (86), B,C (87), D-F (88)   § 4.14, A-C (89), D,E (90)

§ 5.1, A,B (91), C-E (92), F (93)   § 5.2, A,B (93), C-F (94)
§ 5.3, A-C (95), D-I (96)   § 5.4, A,E (97), F-H (98)
§ 5.5, A-C (99), D-F (100), G (101)   § 5.6, A-D (102), E-H (103)
§ 5.7, A (104), B (106)   § 5.8, A (108), B (110)
§ 5.9, A-D (112), E-G (113), H (114), I (115)
§ 5.10, A-C (115), D (116), E,F (117)   § 5.11, A-C (118), D-E (119)

§ A.1, A (121)   § A.2, A (121), B (122)   § A.3, A-C (122), D (123)
§ A.4, A (123), B (124)   § A.5, A-C (124), D-G (125)
§ A.6, A (125), B-F (126), G (127)