UNIVERSITE DE PARIS I - PANTHEON-SORBONNE

CAHIERS ECO & MATHS

95.57 & 96.74

UNE CLASSE DE MODELES STATIQUES D'EQUILIBRE GENERAL AVEC TAXATION, ETAT PRODUCTEUR ET ECHANGES EXTERIEURS

Philippe COURREGE

Pascal GOURDEL

CERMSEM

CAHIERS ECO & MATHS - Université de Paris I - 12 Place du Panthéon - 75005 Paris

UNE CLASSE DE MODELES STATIQUES D'EQUILIBRE GENERAL AVEC TAXATION, ETAT PRODUCTEUR ET ECHANGES EXTERIEURS

par

Philippe COURREGE (*) et Pascal GOURDEL (#)

Version 5, juin 1996

Les auteurs remercient H. Berliocchi, J.-M. Bonnisseau, J. Lacroix, P. Priouret, P. Renouard pour leurs concours mathématiques. Ils remercient aussi R. Bara, J.-P. Benassy, B. et J. Bilodeau, R. Boyer, D. Cohen, B. Cornet, C. Del Vigna, M. Florenzano, J.-M. Grandmont, J.-P. Laffargue, C. Le Van, P. Malgrange, P. Matarasso, C. Siméon pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et leurs concours divers. Ils remercient enfin le personnel de l'ISMEA, ainsi que celui de la bibliothèque du CEPREMAP pour la qualité de son accueil et son efficacité.

* CNRS, ISMEA, APH, 85 Bd de port-Royal, 75013 - Paris.

CERMSEM, Univ. de Paris I, 90 rue de Tolbiac, 75634 - Paris, Cedex 13.

RESUME

On définit et on étudie, en particulier en ce qui concerne l'existence de l'équilibre, une classe de modèles statiques d'équilibre général qui se distinguent du modèle standard de Arrow-Debreu par les quatre orientations suivantes : (1) le comportement des consommateurs est représenté directement par des fonctions de demande excédentaires, plutôt que par des relations de préférence ou des fonctions d'utilité individuelles ; (2) l'Etat est pris en compte, tant dans son rôle de gestionnaire des transferts, transferts forfaitaires ou taxation (des consommateurs ou des producteurs), que dans son rôle de producteur ; (3) une attention spéciale est portée aux conditions physiques de viabilité, tant individuelles que globales, en particulier, une condition de survie est associée à chaque fonction de demande d'un consommateur ; (4) les échanges extérieurs sont pris en compte par l'intermédiaires de producteurs d'import-export.

Ces modèles peuvent être considérés comme généralisant le modèle de Scarf et, au-delà, certains des modèles d'équilibre général calculable. Bien que le contenu du texte soit essentiellement formel, d'économie mathématique, ses orientations ont des motivations appliquées, de prospective, qui visent l'étude, au niveau macroéconomique, de transformations profondes de l'appareil productif et des comportements collectifs, au-delà des études de statique comparative à court terme qui sont usuelles pour les applications des modèles d'équilibre général.

JEL : D51, D11, H20, D58, F49.

Mots clefs : Economie avec production, Etat producteur, Fonctions de demande, Conditions de survie, Taxation, Existence de l'équilibre statique, Modèle de Scarf, Echanges extérieurs.

ABSTRACT

This work studies the equilibrium for a class of static general equilibrium models which differs from the standard Arrow-Debreu model by the four following trends : (1) the behaviour of the consumers is directly expressed in terms of excess demand functions rather than in terms of preferences/utility functions; (2) the State is taken into account for its action both as administrator of transfers, lump-sum transfers or taxations (for consumers and producers), and as producer; (3) special attention is paid to physical viability conditions, either individual or global, especially, a survival condition is associated to each demand function of a consumer; (4) the foreign exchanges are taken into account via import-export producers.

These models can be viewed as an extension of the Scarf Model and further of some applied general equilibrium models. Even if the content of the work is essentially theoretical, of mathematical economics, the trends are motivated by applications to prospective studies, at a macroeconomic level, of radical transformations of the producing system and of the collective behaviours, beyond the comparative short-term studies which are usual with applied general equilibrium models.

JEL : D51, D11, H20, D58, F49.

Key words: Economy whith production, State production, Demand functions, Survival assumptions, Taxation, Existence of static equilibrium, Scarf model, Foreign exchanges.

SOMMAIRE

INDICATIONS DE LECTURE

Les chapitres sont décomposés en paragraphes (§) repérés, dans chaque chapitre, par des entiers ; par ex., l'indication "§ 1.2" renvoie au paragraphe 2 du Chapitre 1. Chaque énoncé est repéré par le numéro du paragraphe où il figure ; par ex., le théorème 3.4 figure au § 3.4. Les paragraphes sont (éventuellement) décomposés en alinéas repérés, dans chaque paragraphe, par des lettres majuscules ; par ex., l'indication "alinéa 1.2.D" renvoie à l'alinéa (D) du § 1.2.

Les relations (formules, assertions, conditions, interprétations) sont numérotées par chapitre, les relations du chapitre n étant repérées par les couples (n.r) où r est le numéro (entier) ; par ex. la relation (2.17) est la 17ème du chapitre 2. Certaines sous-relations d'une relation sont repérées par une lettre minuscule qu'on indique alors après le numéro ; par ex., (2.17a). Lorsqu'une relation (n,r) est exactement décomposée en ses sous-relations repérées par des lettres minuscules, l'indication (n,r) désigne la conjonction des sous-relations ; par ex., (2.17) désigne la conjonction de (2.17a) et (2.17b).

Les annexes mathématiques sont repérées par les lettres A, B, au lieu d'un numéro de chapitre, et décomposée comme les chapitres, mais les énoncés y sont numérotés comme les relations ; par ex. § A.2, alinéa A.1.B, relation (A.2), énoncé (A.20).

Les notes, numérotées par chapitre, figurent à la fin du texte, avec l'indication, au début de chaque note, du ou des point(s) d'appel (en général alinéa). Vu leur importance, le lecteur est invité à avoir sous la main une copie des pages correspondantes.

Le texte a été saisi avec le progiciel Wordperfect 6.0 (qui permet, sous DOS, de conjuguer le mode caractère et le mode graphique), directement, en clair, sans utilisation de l'éditeur d'équations.

CHAPITRE 1 - INTRODUCTION

Le contenu de ce texte est essentiellement formel, d'économie mathématique, mais ses orientations ont des motivations appliquées. Dans ce chapitre introductif, on donne d'abord (§ 1.1) un apperçu des modèles en cause, puis (§ 1.2) on indique les motivations appliquées de leurs orientations.

§ 1.1 - APERCU DES MODELES EN CAUSE

(A) On s'intéresse ici à une variante "avec **fonctions de demande**, **Etat producteur** et **échanges extérieurs**" du modèle standard de Arrow-Debreu [1a]. Plus précisément, on étudie, en particulier du point de vue de l'existence de l'équilibre, une classe de modèles statiques d'équilibre général qui se distinguent du modèle standard par les quatre orientations suivantes : (1) le comportement des consommateurs est représenté directement par des **fonctions de demande**, plutôt que par des relations de préférence ou des fonctions d'utilité individuelles ; (2) l'**Etat** est pris en compte, tant dans son rôle de gestionnaire des transferts, **transferts forfaitaires** ou **taxation** (des consommateurs ou des producteurs), que dans son rôle de **producteur**, y compris un rôle de gestionnaire des **excédents réels** ; (3) une attention spéciale est portée aux **conditions physiques de viabilité**, tant individuelles que globales, requises par l'existence de l'équilibre ; (4) les **échanges extérieurs** sont pris en compte par l'intermédiaires de producteurs d'import-export.

Ces orientations sont présentées dans le présent § 1.1, en ce qui concerne la démarche de formalisation. En ce qui concerne le contenu mathématique, on renvoie au corps du texte : prélimaires au Chapitre 2, existence de l'équilibre aux Chapitres 3 et 4, compléments, exemples et perspectives aux Chapitres 5 à 8.

(B) En vertu de la première orientation, ces modèles peuvent être considérés comme généralisant le **modèle de Scarf** [1b] et au-delà, vu l'aspect taxation de la deuxième orientation, certains des modèles sous-jacents aux travaux appliqués couverts par le vocable "**équilibre général calculable**" (EGC) [1c].

Le modèle de Scarf - que les motivations amenaient à privilégier à cause de sa représentation du système productif en termes d'**analyse d'activité** (alinéa 1.2.D) - a constitué le point de départ du travail, la première étape ayant été la mise au net - au standard de rigueur de ce texte (alinéa 1.2.D) - de la démonstration de l'existence de l'équilibre à partir du théorème de Brouwer [1d].

Par contre la parenté avec les modèles d'EGC est moins nette et concerne surtout les motivations, ce qui fait que son analyse figure au § 1.2. Cependant, les articles fondateurs de Shoven et Whalley [1e] ont fourni un point de départ, pour la formalisation de la taxation dans le cadre de la représentation du système productif en termes d'analyse d'activité [1f].

(C) La formulation de la première orientation, est à préciser en ce sens que les fonctions de demande considérées sont plutôt des "**fonctions de demande excédentaire**" qui permettent la prise en compte conjointe, d'une **offre variable** de facteurs par les consommateurs et, en liaison avec la troisième orientation, des **conditions physiques de survie** de ces derniers, ce que permet aussi le formalisme du modèle standard de Arrow-Debreu ([1g]), mais pas celui du modèle de Scarf **basé** sur les fonctions de demande usuelles ni celui des modèles d'EGC ([1h]). L'introduction, comme composants du modèle, de ces **fonctions de demande excédentaires à survie** ([1i]) joue un rôle important de deux façons complémentaires.

(D) D'une part, cette introduction fournit, du point de vue de la représentation formelle du comportement du consommateur, un cadre unifié qui englobe, en s'appuyant sur une variante affaiblie de la **Loi de Walras** ([1j]), à la fois l'approche par les fonctions de demande qui est celle du modèle de Scarf (alinéa 1.1.B ci-dessus) et l'approche finalisée par des relations de préférence ou des fonctions d'utilité qui est celle du modèle standard ([1k]).

(E) D'autre part, la prise en compte des conditions physiques de survie individuelle des consommateurs est essentielle pour la troisième orientation, conformément à la démarche suivante. En conjuguant ces conditions avec le potentiel de l'appareil productif représenté par les ensembles de production, on obtient des **conditions physiques de survie globale**, de **viabilité**, du système ("toutes les consommations de survie peuvent être assumées avec les capacités de production et les ressources disponibles"). Dès lors, s'intéressant au lien entre ces conditions de viabilité et l'**existence d'un équilibre général**, on peut chercher quelles conditions concernant le "fonctionnement économique" leur adjoindre - essentiellement via des transferts forfaitaires entre l'état et les consommateurs, transferts qui relèvent de la seconde orientation (alinéa 1.1.F) - pour obtenir l'existence d'un équilibre général, lequel concrétise alors "en termes économiques" la possibilité physique de survie ([1l]).

(F) En ce qui concerne la seconde orientation, on souligne d'abord que l'équilibre cherché est entendu, ainsi qu'on vient de le voir (alinéa 1.1.E), avec des transferts forfaitaires entre l'état et les consommateurs, ce qui introduit une sous-détermination et, de ce fait, fournit un cadre global, intégré à la théorie de l'équilibre général, pour la formalisation d'un **comportement de l'Etat** visant à réduire cette sous-détermination. En particulier, l'étude d'une politique des revenus peut s'inscrire naturellement dans ce cadre, par exemple via la détermination conjointe de **taxations optimales** et d'une activité convenable de l'Etat producteur en fonction d'une **finalité collective** ([1m]). Ainsi, par la netteté formelle de ce cadre, un modèle de ce type devrait permettre un contrôle amélioré des exercices numériques (alinéa 1.2.D). Dans ce sens, on introduit, comme composants du modèle, une notion générale de **protocole de taxation** ([1n]).

(G) Enfin, la quatrième orientation vise, pour un ensemble territorialement délimité, la prise en compte de l'influence des échanges extérieurs sur l'équilibre intérieur, par un traitement des comportements d'échanges extérieurs des agents intérieurs s'appuyant sur les mécanismes standard de l'équilibre général, plutôt que, comme dans les modèles macroéconomiques empiriques (alinéa 1.2.E), par un traitement empirique s'appuyant sur des données spéciales, de type comportemental, comme les fonctions d'importation ou d'exportation ([1o]).

§ 1.2 - MOTIVATIONS

(A) La recherche d'économie mathématique que présente ce texte fait partie du travail d'élaboration de la classe de modèles sous-jacents à un instrument ([1p]) de **prospective macroéconomique** ayant pour but de permettre, aux diverses échelles territoriales, l'étude exploratoire d'alternatives multiples, en particulier l'étude de la cohérence globale d'éventuelles **transformations profondes** de l'appareil productif et des comportements collectifs.

(B) Ainsi, cet instrument vise des exercices de **prospective heuristique** qui se distinguent des exercices de **prévision** qui dominent actuellement la prospective macroéconomiques (alinéa 1.2.E), en ce sens que les premiers concernent l'étude libre, heuristique (1q), de ce qui est **techniquement et fonctionnellement possible**, tandis que les seconds sont limités à l'étude de ce qui est **historiquement probable.** L'intérêt de ces exercices de prospective heuristique, que ne permettent pas les instruments disponibles (alinéa 1.2.E), réside évidemment dans la possibilité d'appréhender les transformations profondes qui semblent inévitables pour faire face aux problèmes qui se posent au pays (1r).

(C) On souligne qu'il s'agit de **prospective** macroéconomique et non directement la **planification**, ce qui fait que le modèle correspondant doit permettre la représentation, dans le même cadre formel, aussi bien des marchés et des mécanismes concurrentiels que de l'Etat et des démarches volontaristes d'une éventuelle planification (alinéa 1.2.F).

(D) Pour permettre d'étudier l'accessibilité et la cohérence de fonctionnements économiques très différents de l'actuel et du passé récent, un modèle de prospective heuristique doit comporter deux caractéristiques essentielles : d'une part une **représentation intrinsèque**, en termes techniques, **de la base physique** du processus économique, d'autre part une **formalisation de la structure du modèle** en termes suffisamment **abstraits**, indépendants des spécifications numériques, pour permettre les études mathématiques nécessaires à la maîtrise du maniement du modèle lors des applications. Or ces caractéristiques manquent aux modèles actuellement opérationnels (alinéa 1.2.E).

La mise au point de la première caractéristique en termes d'analyse d'activité, via une expérimentation numérique, y compris l'approche économétrique des base de données voulues, a fait l'objet des travaux effectués autour du modèle ATHEMA (1s) ; le travail théorique présenté ici est une première approche de la seconde caractéristique en ce qui concerne les modèles statiques (alinéa 1.2.G).

(E) Qu'il n'existe pas d'instrument de prospective heuristique semble indiscutable (l'inverse se saurait !), mais difficile à étayer sur des références tant est grande la prégnance de la prévision dans la littérature, même critique, relative à la prospective macroéconomique (1t). On examine rapidement ci-après ce qu'il en est pour les deux principaux types de modèles de cette dernière : les modèles macroéconomiques empiriques (1u) et les modèles d'EGC (1c).

La difficulté, pour ne pas dire l'incapacité, des modèles macroéconomiques empiriques à appréhender les transformations profondes est constitutive, en ce sens qu'ils ont été conçus, à l'époque de la croissance triomphante, essentiellement pour permettre des exercices d'extrapolation du passé récent (1v).

L'absence, dans ces modèles, de la première caractéristique tient principalement à leur représentation économétrique du système productif en termes de fonctions de production empiriques calées sur les données de la comptabiité nationale, sans réelle analyse technologique (1w). L'absence de la seconde est à rapprocher de ce que ces modèles n'intègrent les concepts de la théorie microéconomique que localement, au stade de la formalisation des composants, sans que la complexité des spécifications particulières ne permette de maîtriser le comportement numérique du modèle par des études mathématiques globales, autrement que sur des maquettes [1X].

En ce qui concerne les modèle d'EGC, leur aptitude à appréhender les transformations profondes ne semble pas être supérieure à celle des modèles macroéconomiques empiriques, cela malgré leur lien originel avec le modèle de Scarf (alinéa 1.1.B), qui aurait pu (dû) leur permettre au moins une avancée relativement à la première caractéristique, alors qu'eux aussi ne dépassent guère les méthodes d'estimation par calage économétrique [1Y].

(F) La visée de prospective heuristiques (alinéa 1.2.B) motive comme suit les orientations (alinéa 1.1.A) des modèles étudiés dans ce texte.

L'adaptation à l'étude de transformations profondes, donc de fonctionnement économiques très différents de l'actuel, justifie, d'une part l'attention portée aux conditions de viabilité (<u>troisième orientation</u>), vu que le calage sur l'actuel n'est plus alors suffisant pour assurer cette dernière [1Z], d'autre part la prise en compte de l'Etat, dans tous ses rôles (<u>seconde orientation</u>), sans pour cela ignorer le rôle du marché (alinéa 1.2.C).

En ce qui concerne la <u>première orientation</u>, on distingue deux motifs. D'une part (1), dans une visée appliquée, il est naturel de représenter concrètement, numériquement, le comportement du consommateur par une fonction de demande "empirique", estimée à partir de données économétriques, plutôt que par une relation de préférences abstraite [1A]. D'autre part (2), dans la perspective de transformations profondes, il importe de ne pas confondre la recherche d'une finalité collective, sous contrainte des comportements individuels, avec celle d'un éventuel optimum de Pareto [1B] : l'éventualité de cette confusion est ici réduite par l'absence (formelle, dans le modèle) de relation de préférence.

Par ailleurs, la <u>seconde caractéristique</u> réclame, conjointement, que les modèles soient définis et étudiés au niveau de rigueur de l'économie mathématique, même si leur finalité est appliquée plutôt qu'académique, et que leur structure, ainsi définie axiomatiquement, soit précisément interprétée en termes de la réalité à représenter. On tente dans ce texte de satisfaire à ces exigences en distinguant systématiquement, au risque de quelques lourdeurs de style, les définitions formelles des énoncés d'interprétation [1C].

Enfin, la visée appliquée impose au modèle [1D] un **impératif de réalisme**. Cet impératif concerne d'abord les composants du modèle : fonctions de demandes tenant compte de la survie et restant finies même lorsque certains prix s'annullent, ensembles de production bornés, etc. [1E]. Il concerne aussi son mode d'application : conditions globales de viabilité (<u>troisième orientation</u>) et prise en compte des échanges extérieurs (<u>quatrième orientation</u>) [1F].

(G) Pour terminer cette introduction, on insiste sur la lacune importante, de la classe de modèles présentée dans ce texte, qui réside dans leur caractère **statique**, caractère qui réduit leur utilisation prospective à des projections, sans possibilité d'étude de transition [1G], et justifie l'absence de traitement de la **monnaie**. Ainsi, la prochaine étape du travail d'élaboration conceptuelle de l'instrument de prospective heuristique visé devra concerner l'étude de modèles intertemporels, de cheminement, en avenir incertain, avec traitement de la monnaie, des marchés incomplets et des anticipations des agents.

On commence par définir les composants des modèles visés en envisageant successivement, dans l'ordre canonique : l'appareil nominatif (§ 2.1), les consommateurs (§ 2.2 et § 2.3), les producteurs (§ 2.4), les protocoles de taxation (§ 2.5 et § 2.6). Les indications et interprétations succinctes, minimales, qui accompagnent les définitions formelles, ici dominantes, seront nourries par les compléments figurant aux Chapitre 6 et 7 auxquels le lecteur est invité à se reporter par des renvois : le propos est ici de rendre le plus rapidement possible intelligibles les résultats énoncés au Chapitre 3.

§ 2.1 - APPAREIL NOMINATIF ET NOTATIONS

(A) L'**appareil nominatif** du modèle, i.e. le système formé des nomenclatures dont les postes indexent les divers types de données et de variables numériques, va être représenté dans le formalisme : chaque **nomenclature** est considérée comme un ensemble fini non vide dont les éléments, les **postes**, sont des **noms d'agrégats** de choses réelles (matérielles ou immatérielles ; par exemple le bien "céréales" ou le bien "travail" ; alinéa 2.1.D) qui ne sont pas confondus avec leurs éventuels numéros. Autrement dit, contrairement à l'usage en économie mathématique [2a], une nomenclature de cardinal n n'est pas systématiquement identifiée au segment commençant $[1,n]$ de l'ensemble des entiers > 0.

Cette convention est évidemment à rapprocher de la finalité appliquée, macroéconomique, du modèle (§ 1.2)) [2b]. En outre, elle clarifie notablement le formalisme dès qu'intervient une combinatoire relationnelle des nomenclatures [2c].

(B) Si K est un ensemble fini non vide, on désigne : par Card(K) le nombre d'éléments de K ; par $\mathbf{R}^K$ l'espace euclidien formé des multiplets $x = (x_k, k\in K)$ de nombres réels indexés par K ; par $\mathbf{R}^K_+$ (resp. $\mathbf{R}^K_{++}$) l'orthant positif (resp. l'orthant strictement positif) de $\mathbf{R}^K$, i.e. le sous-cône de $\mathbf{R}^K$ formé des $x \in \mathbf{R}^K$ tels que $x_k \geq 0$ (resp. $x_k > 0$) pour tout $k\in K$; par $\mathbf{R}^K_{+*}$ le sous-cône $\mathbf{R}^K_+\setminus\{0\}$ de $\mathbf{R}^K_+$; par S_K le **simplexe** de $\mathbf{R}^K$, i.e. le sous-ensemble de $\mathbf{R}^K_+$ formé des $x \in \mathbf{R}^K$ tels que,

(2.1) $\quad x_k \geq 0$ pour tout $k\in K$ $\quad$ et $\quad \sum_{k\in K} x_k = 1,$ $\quad$ en notant que,

(2.2) $$\mathbf{R}^K_{+*} = \bigcup_{\alpha>0} \alpha S_K.$$

Si $x \in \mathbf{R}^K$, on pose $x^+ = \mathrm{Max}(x,0)$ et $x^- = \mathrm{Max}(-x,0)$, le Max étant pris dans l'espace réticulé $\mathbf{R}^K$. Si $p \in \mathbf{R}^K$ et $q \in \mathbf{R}^K$, on note p.q le produit scalaire canonique de l'espace euclidien $\mathbf{R}^K$. Si X est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^K$, on note $\overline{\mathrm{co}}(X)$ l'enveloppe convexe fermée de X. Si H est un autre ensemble fini non vide, l'espace $\mathbf{R}^{H\times K}$ est identifié à l'ensemble des multiplets $(x^k, k\in K)$ d'éléments de l'espace $\mathbf{R}^H$.

(C) L'activité économique est analysée de façon standard [2d], en termes des deux concepts premiers de l'économie théorique, le concept de **bien** et le concept d'**agent**, comme un système de deux circulations duales entre les agents : **circulation réelle** des biens, des fournitures en **quantité**, et **circulation symbolique** des montants en **valeur**, soit montants de contre partie des fournitures par rapport à un système de **prix**, soit montants de transferts.

La représentation de ces circulations dans les modèles envisagés ici est **statique** en ce sens qu'elle ne prend en compte que des **flux** (réels ou symboliques) relatifs à, intégrés sur, une seule **période de référence** et ignore les phénomènes monétaires (alinéa 1.2.G).

Dans ces conditions, l'appareil nominatif du modèle (alinéa 2.1.A) va comporter une **nomenclature de biens** et des nomenclatures d'agents, en distinguant parmi ces derniers divers types, en l'occurrence les agents **consommateurs** et les agents **producteurs**, qui vont donner lieu à des formalisations différentes du comportement. Dans ce chapitre, qui concerne seulement les agents pris individuellement, seule la nomenclature de biens intervient. Les deux autres seront introduites au chapitre 3 (alinéa 3.1.A).

(D) La **nomenclature de biens**, notée H, inclut à la fois les produits, matériels ou immatériels (services), et les facteurs de production (§ 7.2) ([2e]). Elle donne lieu à la quantification des biens en ce sens que, à chaque bien $h \in H$ est associée une **grandeur mesurable**, la grandeur "**quantité** du bien h", via la spécification d'une (quantité) **unité de mesure** de ce bien ([2f]).

Ainsi, eu égard au caractère statique du modèle (alinéa 2.1.D), chaque flux réels d'un bien - consommation ou demande, production ou offre, d'un agent pendant la période de référence - est représenté par un seul nombre ≥ 0 mesurant la quantité en cause de ce bien. En fait, ces flux seront pris en compte vectoriellement via la considération de **paniers** de biens, en appelant ainsi un multiplet $z = (z_h,\ h \in H)$, élément de R_+^H, dont chaque composante z_h représente une quantité du bien $h \in H$. De plus, on fait la **convention algébrique** consistant en ce qu'un élément x de R^H est considéré comme définissant le couple de paniers (x^+, x^-).

(E) Un système de prix, appelé plutôt **vecteur de prix**, est représenté par un élément $p = (p_h,\ h \in H)$ de R_{+*}^H, le nombre (≥ 0) p_h représentant le prix, i.e. la **valeur** de la quantité unité, du bien $h \in H$, ce qui fait que, aux prix p, la **valeur** d'un panier de biens $z \in R_+^H$ est fournie par le produit scalaire $p.z$, tandis que, pour $x \in R^H$, le nombre $p.x = p.x^+ - p.x^-$, représente le solde, aux prix p, des valeurs des paniers x^+ et x^-, conformément à la convention algébrique (alinéa 2.1.D). Ces valeur sont relatives à une **monnaie** de référence, monnaie "statique" (alinéa 2.1.C), envisagée seulement comme unité de compte nominale ([2g]).

On note que les prix p_h de certains biens $h \in H$ peuvent être nuls (alinéas 2.3.B et 6.1.A), mais qu'ils sont supposés ne pas être tous nuls, ce qui permet de normaliser le vecteur p des **prix courants** par la condition,

(2.3) $\quad p \in S_H.$

§ 2.2 - <u>CONSOMMATEURS : FONCTIONS DE DEMANDE EXCEDENTAIRE A SURVIE</u>

(A) A chaque consommateur est associée une fonction de demande excédentaire à survie qui spécifie son comportement de consommation.

Une **fonction de demande excédentaire à survie**, relative à la nomenclature de biens H, est un couple (σ, f) où, d'une part σ est une fonction numérique sur R_{+*}^H, homogène de degré un, d'autre part f est une correspondance de $R_{+*}^H \times R$ dans R^H à valeurs non vides ([2h]), homogène de degré zéro et telle que, (2.4) $f(p,s) = f(p,\sigma(p))$ pour tous $p \in R^H_{+*}$ et $s \leq \sigma(p)$.

Cette définition revient à dire que la correspondance f est seulement définie sur l'ensemble $C(\sigma)$, avec,

(2.5) $C(\sigma) = \{ (p,s) \mid p \in R^H_{+*},\ s \in R \text{ et } s \geq \sigma(p) \}$,

cet ensemble étant un sous-cône de $R^H_{+*} \times R$ en vertu de l'homogénéité de σ. De plus, en vertu de cette dernière et de celle de f, la donnée de (σ,f) est équivalente à celle de sa restriction à $S_H \times R$ ou seulement à $\underline{C}(\sigma)$, avec,

(2.6) $\underline{C}(\sigma) = C(\sigma) \cap (S_H \times R)$.

A un tel couple (σ,f) sont associés son **socle** $\underline{X}(\sigma,f)$ et son **domaine** $X(\sigma,f)$, sous-ensembles de R^H définis par,

(2.7) $\underline{X}(\sigma,f) = \bigcup_{p \in S_H} f(p,\sigma(p))$, (2.8) $X(\sigma,f) = \overline{co}(\bigcup_{p \in S_H} \bigcup_{s \geq \sigma(p)} f(p,s))$.

(B) Le mode de représentation du comportement d'un consommateur par une fonction de demande excédentaire à survie (σ,f) est précisé par les **interprétations** suivantes (voir aussi les § 6.3 et 6.6) :

Int. (2.9) si $p \in R^H_{+*}$ et $s \geq \sigma(p)$, tout $x \in f(p,s)$, avec $x = (x_h,\ h \in H)$, représente un vecteur de demandes excédentaires (i.e. de "**demandes - offres**") possibles, en les divers biens $h \in H$, par le consommateur en cause pendant la période de référence, cela en fonction du vecteur p des prix et du **solde des transferts** s le concernant, le nombre x_h représentant une demande s'il est > 0 et une offre s'il est < 0 ; ce solde des transferts est la différence $s' - s''$ entre les montants $s' \geq 0$ et $s'' \geq 0$ des transferts constituant respectivement pour le consommateur des recettes (prestations sociales, dividendes, etc.) et des dépenses (impots, achats de titres, etc.) ; il équilibre le solde $p.x$ des transactions relatives à x en ce sens que le budget du consommateur est équilibré si $p.x = s$ [c'est la loi de Walras ; voir (2.16), au § 2.3].

Int. (2.10) si $p \in R^H_{+*}$, $\sigma(p)$ représente un seuil tel que la **survie** du consommateur ne peut être assurée, aux prix p, que pour un solde des transferts s au moins égal à $\sigma(p)$; ainsi, le **socle** $\underline{X}(\sigma,f)$ représente l'ensemble des demandes excédentaires x correspondant aux soldes des transferts s limite, $\sigma(p)$.

Ainsi, les couples (s,x) qui relèvent, aux prix p, du comportement spécifié par la fonction de demande excédentaire à survie (σ,f) sont ceux qui vérifient les **contraintes d'équilibre du consommateur** (sans taxation ; § 2.5),

(2.11a) $s \geq \sigma(p)$ et (2.11b) $x \in f(p,s)$.

On note à ce sujet qu'une éventuelle dotation du consommateur est ici prise en compte par la fonction de demande excédentaire (σ,f) ([2i]).

§ 2.3 - <u>CONDITIONS SUR LES FONCTIONS DE DEMANDE EXCEDENTAIRE A SURVIE</u>

(A) Six conditions relatives aux fonctions de demande excédentaire à survie (σ,f) vont intervenir :

(2.12) **[continuité]** (a) la fonction σ est continue et (b) la correspondance f est hémi-continue supérieurement (h.c.s) ; en particulier, (c) pour tous $p \in S_H$ et $s \geq \sigma(p)$, $f(p,s)$ est un sous-ensemble compact de R^H ;

(2.13) **[convexité]** pour tous $p \in S_H$ et $s \geq \sigma(p)$, $f(p,s)$ est un sous-ensemble convexe de R^H ;

(2.14) **[bornitude]** le domaine $X(\sigma,f)$ de (σ,f) est un sous-ensemble borné de R^H ;

(2.15) **[bornitude inf.]** Il existe $\underline{x} \in R^H$ tel que,

(a) pour tous $p \in S_H$, $s \in R$ et $x \in f(p,s)$, on a, $\underline{x} \leq x$;

(2.16) **[loi de walras globale]** pour tous $p \in S_H$, $s \geq \sigma(p)$ et $x \in f(p,s)$,

(a) $p.x = s$;

(2.17) **[loi de walras locale]** pour tous $p \in S_H$, $s \geq \sigma(p)$ et $x \in f(p,s)$,

(a) $\sigma(p) \leq p.x \leq s$ et (b) $x \in f(p,p.x)$;

(B) Toutes ces conditions n'interviendront pas simultanément : les conditions topologique (2.12) et (2.13) sont indépendantes entre elles et indépendantes des conditions de bornitude (2.14) et (2.15) ; la condition de bornitude (2.14) entraîne la condition (2.15), mais la réciproque est fausse ([2j]) ; la loi de Walras globale (2.16) est compatible avec la condition de bornitude inf. (2.15) et entraine la loi de Walras locale (2.17), mais seule cette dernière est compatible avec la condition de bornitude (2.14) (alinéa 2.3.C), laquelle est importante en fonction de l'<u>impératif de réalisme</u> de la représentation (alinéa 1.2.F), même si la condition de bornitude inf. (2.15) est formellement suffisante ([2k]).

Cet impératif - qui conduit à exclure les comportements, de demande ou d'offre, "non bornés" au bord de R^H_{+*}, comme ceux des fonctions de demande de Cobb-Douglas (alinéa 6.1.B) - est aussi à rapprocher du caractère assez limitatif de la condition de continuité (2.12), laquelle stipule que les fonctions σ et f sont définies et régulières sur R^H_{+*} tout entier et pas seulement sur son intérieur R^H_{++}. Les difficultés formelles liées à cette condition seront envisagées au Chapitre 3 (alinéa 3.5.A) et au Chapitre 6 (§ 6.6, alinéas 6.8.B,C, 6.9.D).

(C) Que (2.14) soit incompatible avec (2.16) est immédiat : (2.14) entraine que $p.x$ reste borné lorsque x décrit $X(\sigma,f)$, ce qui contredit (2.16a) pour s assez grand). Que (2.14) soit, par contre, compatible avec (2.17) résulte des constructions de fonctions de demande excédentaire à survie présentées au Chapitre 6 (§ 6.3 et 6.6) : par exemple, de la Proposition 2.3 ci-après et de la construction du § 6.3 qui fournit de telles fonctions vérifiant la loi de Walras globale (2.16), construction qui montre aussi la compatibilité de (2.15) avec (2.16), car ces fonctions vérifient aussi (2.15).

(D) Cette compatibilité entre la forme (2.17) de la loi de Walras et la condition de bornitude (2.14) peut aussi être illustrée par les considérations suivantes basées sur l'interprétation de cette loi : cette dernière exprime l'équilibre du budget du consommateur [int. (2.9)], lorsque le solde des transferts permet la survie [int. (2.10)]. Cela est clair pour la loi globale (2.16), tandis que, pour la loi locale (2.17), le remplacement de s par $p.x$ comme argument de f dans la condition (2.17b) [terme $f(p,p.x)$] permet de s'accommoder du cas, inévitable si (2.14) est vérifiée, où $s > p.x$, l'équilibre du budget étant alors tautologique, puisqu'il s'écrit $p.x = p.x$.

(E) Ces considérations heuristiques sont heureusement complétées par la proposition ci-après qui fournit un procédé de construction de fonctions de demande excédentaires à survie vérifiant la condition de bornitude (alinéa 4.1.C).

PROPOSITION 2.3 - Soient (σ,f°) une fonctions de demande excédentaire à survie et δ une une fonction numérique sur R^H_{+*}, homogène de degré un et telle que,

(2.18) $\sigma(p) \leq \delta(p)$ pour tout $p \in R^H_{+*}$.

Alors, si on définit la correspondance f de $R^H_{+*} \times R$ dans R^H par,

(2.19) $f(p,s) = f^{\circ}(p,\min(s,\delta(p))$ $(p \in R^H_{+*},\ s \in R)$,

le couple (σ,f) constitue une fonctions de demande excédentaire à survie ayant même socle que (σ,f°). De plus, (σ,f) vérifie la loi de Walras locale (2.17) [resp. la condition de continuité (2.12), de convexité (2.13)] s'il en est ainsi de (σ,f°). Enfin (σ,f) vérifie la condition de bornitude (2.14) si (σ,f°) vérifie la condition de continuité (2.12) et si δ est continue.

§ 2.4 - PRODUCTEURS : ENSEMBLES DE PRODUCTION

(A) A chaque producteur est associé un **ensemble de production**, sous-ensemble non vide de R^H, qui spécifie ses potentialités techniques de fourniture ou de consommation des divers biens.

Le mode de représentation par un ensemble de production Y des potentialités techniques de fourniture ou de consommation des divers biens par un producteur est précisé par les **interprétations** suivantes (voir aussi les § 7.1 à 7.3) :

Int. (2.20) chaque éléments $y = (y_h,\ h\in H)$ de Y représente un **vecteur d'échanges physiques** considéré comme possible entre le producteur et le reste du système en cause pendant la période de référence, compte tenus des diverses contraintes, techniques ou contractuelles, pesant sur son activité (équipements disponibles, engagements antérieurs, etc.), hormis les contraintes comptables, une composante $y_h \geq 0$ (resp. $y_h \leq 0$) représentant un extrant, une fourniture, (resp. un intrant, une consommation) du bien h.

Int. (2.21) si $p \in R^H_{+*}$ et $y \in Y$, le produit scalaire $p.y$ représente le **solde des échanges**, aux prix p pour le vecteur d'échanges y, i.e. la différence entre le montant des ventes et le montant des achats du producteur.

Ces interprétations sont valables pour les producteurs du secteur concurrentiel et pour l'Etat. En ce qui concerne les premiers, on se gardera de confondre le produit scalaire p.y [Int. (2.21)] avec le profit, lequel va être la différence entre p.y et le montant des taxes payées par le producteur (§ 2.6).

On souligne de plus que, dans le vocable "ensemble de production", le qualificatif "de production" est à prendre au sens large, i.e. peut couvrir des activités commerciales n'incluant pas de production au sens strict, par exemple des activité d'import-export (§ 7.3). Dans ce sens, le vocable "ensemble d'échanges" serait plus exact.

(B) Quatre conditions relatives aux ensembles de production Y vont intervenir :

(2.22) [**compacité**] Y est un sous-ensemble compact de R^H ;

(2.23) [**convexité**] Y est un sous-ensemble convexe fermé de R^H ;

(2.24) [**libre disposition**] $Y - R^H_+ \subset Y$;

(2.25) [**pure disposition**] (a) $Y \subset -R^H_+$ et (b) $0 \in Y$.

La condition (2.22), qui entraîne que Y est borné dans R^H, est motivée par l'<u>impératif de réalisme</u> (alinéa 1.2.F). Les conditions (2.24) et (2.25) ne concerneront qu'un Etat fictif (alinéas 3.6.D,E).

§ 2.5 - <u>PROTOCOLES DE TAXATION DES CONSOMMATEURS</u>

(A) Un **protocole de taxation d'un consommateur**, de fonction de demande excédentaire (σ,f), est une application t de $R^H_{+*} \times X(\sigma,f)$ dans R^H_{+*}, homogène de degré un en son premier argument. Pour une telle fonction t on désigne par $\underline{t}$ la fonction numérique sur $R^H_{+*} \times X(\sigma,f)$, aussi homogène de degré un en son premier argument, définie par la relation,

(2.26) $\quad \underline{t}(p,x) \; = \; t(p,x).x \; - \; p.x,$ pour tous $p \in R^H_{+*}$ et $x \in X(\sigma,f)$.

Cette fonction $\underline{t}$ est appelée le **transfert** du protocole de taxation t.

Le lien entre les termes t et $\underline{t}$ qu'exprime formellement la relation (2.26) est explicité par l'**interprétation** suivante qui précise l'effet du protocole de taxation t sur le comportement du consommateur :

Int. (2.27) l'effet du protocole de taxation t consiste en ce que, d'une part (a) le consommateur détermine son choix d'une demande excédentaire x, via la fonction de demande excédentaire (σ,f), au vu du vecteur $t(p,x)$ de prix avec taxe plutôt qu'au vu du vecteur p des prix courants, d'autre part (b) le montant (algébrique) du transfert, du consommateur vers l'Etat, vaut $\underline{t}(p,x)$, i.e., conformément à la relation (2.26), vaut la différence entre le montant $t(p,x).x$ effectivement payé par le consommateur, montant de la demande excédentaire x aux prix avec taxe $t(p,x)$, et le montant $p.x$ de cette même demande aux prix courants p, ces divers montants étant relatifs à la monnaie de référence (alinéa 2.1.E).

Ainsi, d'après l'assertion (2.27a) ci-dessus, les couples (s,x) qui relèvent, aux prix courants p et en présence du protocole de taxation t, du comportement spécifié par la fonction de demande excédentaire à survie (σ,f), sont ceux qui vérifient les **contraintes d'équilibre du consommateur avec taxation**,

(2.28a) $\quad s \geq \sigma(t(p,x))$ $\quad$ et $\quad$ (2.28b) $\quad x \in f(t(p,x),s)$,

au lieu des contraintes d'équilibre standard (2.11).

(B) Deux conditions relatives à un protocole de taxation t associé à une fonction de demande excédentaire à survie (σ,f) vont intervenir :

(2.29) **[pure taxation]** $\underline{t}(p,x) \geq 0$, pour tous $p \in R^H_{+*}$ et $x \in X(\sigma,f)$;

(2.30) **[continuité]** l'application t est continue sur $R^H_{+*} \times X(\sigma,f)$.

La condition de pure taxation exprime exactement que seuls les achats du consommateur sont taxés.

(C) Les protocoles de taxation usuels sont indépendants de la fonction de demande excédentaire (σ,f), i.e. sont définis sur $R^H_{+*} \times R^H$. Le premier exemple est évidemment le protocole **neutre**,

(2.31) $\quad t(p,x) \; = \; p \quad (p \in R^H_{+*},\; x \in R^H)$,

qui équivaut, par définition (2.26) de $\underline{t}$, à l'**absence de taxation**,

(2.32) $\quad \underline{t}(p,x) \; = \; 0 \quad (p \in R^H_{+*},\; x \in R^H)$.

En voici deux autres exemples, qui, formellement, généralisent le précédent.

Etant donnée une application continue τ de R^H_{+*} dans R^H_+, homogène de degré un, on définit des protocoles de taxation t' et t" en posant,

(2.33) $\quad t'(p,x) \quad = \quad p + \tau(p) \qquad (p \in R^H_{+*},\ x \in R^H),$

(2.34a) $\quad t''_h(p,x) \quad = \quad p_h + \tau_h(p), \quad \text{si } x_h > 0,$

(2.34b) $\quad t''_h(p,x) \quad = \quad p_h, \quad \text{si } x_h \leq 0 \qquad (p \in R^H_{+*},\ x \in R^H,\ h \in H),$

les transferts correspondants $\underline{t}'$ et $\underline{t}''$ étant alors déterminés par,

(2.35) $\quad \underline{t}'(p,x) \quad = \quad \tau(p).x \qquad (p \in R^H_{+*},\ x \in R^H),$

(2.36) $\quad \underline{t}''(p,x) \quad = \quad \tau(p).x^+ \qquad (p \in R^H_{+*},\ x \in R^H).$

Le protocole t' vérifie la condition de continuité (2.30), mais pas, en général, celle de pure taxation (2.29), tandis que le protocole t" vérifie cette dernière, mais pas, en général, celle de continuité. Toutefois t' peut être une approximation de t". De plus, on obtient une taxation de type TVA ("ad valorem") en prenant pour τ une application linéaire de matrice diagonale, i.e. en prenant $\tau(p)$ de la forme,

(2.37) $\quad \tau_h(p) \quad = \quad p_h \underline{\tau}_h \qquad (p \in R^H_{+*},\ h \in H),$

où les $\underline{\tau}_h \geq 0$ sont des taux de taxation fixes.

§ 2.6 - PROTOCOLES DE TAXATION DES PRODUCTEURS PRIVES

(A) Un **protocole de taxation d'un producteur**, d'ensemble de production Y, est une fonction numérique u sur $R^H_{+*} \times Y$ homogène de degré un en son premier argument.

L'effet d'un protocole de taxation sur le comportement du producteur est précisé par l'**interprétation** suivante :

> *Int.* (2.38) si $p \in R^H_{+*}$ est le vecteur des prix courants et $y \in Y$ le vecteur d'échange du producteur, d'une part (a) u(p,y) représente le montant du transfert (algébrique) du producteur vers l'Etat, d'autre part (b) le montant $\pi(p,y)$ du **profit** (algébrique) du producteur, montant qui est transféré par ce dernier au(x) consommateur(s), est égal à la différence entre le solde p.y des échanges et le montant u(p,y) de ces transferts, tous ces montants étant relatifs à la monnaie de référence (alinéa 2.1.E).

Autrement dit, le montant $\pi(p,y)$ du **profit** du producteur, relatif au vecteur d'échanges y et aux prix p, est donné par,

(2.39) $\quad \pi(p,y) \quad = \quad p.y - u(p,y).$

Cela étant, le comportement concurrentiel du producteur privé, d'ensemble de production Y, consiste en ce que, aux prix courants p et en présence du protocole de taxation u, son vecteur d'échanges y est soumis aux **contraintes de maximisation du profit**,

(2.40a) $\quad y \in Am(Y,u,p), \quad$ avec,

(2.40b) $\quad Am(Y,u,p) \quad = \quad \mathrm{Argmax}\ \{\ p.y' - u(p,y') \mid y' \in Y\ \}$ (21).

(B) Trois conditions relatives à un protocole de taxation u d'un producteur d'ensemble de production Y vont intervenir :

(2.41) **[pure taxation]** pour tout $p \in R^H_{+*}$, (a) $u(p,y) \geq 0$ pour tout $y \in Y$,
(b) $u(p,0) = 0$;

(2.42) **[continuité]** la fonction u est continue sur $R^H_{+*} \times Y$;

(2.43) **[convexité]** Y est un sous-ensemble convexe de R^H et la fonction partielle $u(p,.)$ est convexe sur Y pour tout $p \in R^H_{+*}$.

(C) Les protocoles de taxation usuels sont indépendants de l'ensemble de production Y, i.e. sont définis sur R^H. En voici deux exemples assez généraux.

Etant données des applications τ', $\tau"$ de R^H_{+*} dans R^H_+ et τ de R^H_{+*} dans R^H, homogènes de degré un et continues, on définit des protocoles de taxation d'un producteur, en posant,

(2.44) $u(p,y) = \tau'(p).y^+ + \tau"(p).y^-$ $(p \in R^H_{+*}, y \in R^H)$,

(2.45) $u(p,y) = \tau(p).y$ $(p \in R^H_{+*}, y \in R^H)$.

Ces protocoles vérifient les conditions de continuité (2.42) et de convexité (2.43), mais, en général, seul le premier vérifie la condition de pure taxation (2.41), tandis que seul le second est différentiable, par rapport à son second argument, en tout point de l'espace R^H (2m).

La condition de pure taxation (2.41), que vérifie un protocole de la forme (2.44), est concomitante de ce que le premier terme au second membre correspond à une taxation des productions et le second à une taxation des consommations intermédiaires, du producteur. Plus particulièrement, on obtient un protocole de taxation de type TVA en prenant τ' nul et $\tau"$ de la forme (2.37). Par contre, un protocole de la forme (2.45) permet de prendre en compte des subventions, par exemple subvention à la production d'un bien $h \in H$ si $\tau_h(p) < 0$, mais on a alors aussi taxation, au même taux $\tau_h(p)$, d'une consommation de ce bien. De plus, pour des ensembles de production spécifiques, certains protocoles de la forme (2.44) peuvent être approximés par un protocole de la forme (2.45). Par exemple la taxation de la consommation d'un facteur de production peut être prise en compte de cette manière.

Le théorème d'existence de l'équilibre est énoncé au § 3.4, puis commenté et repris dans le cas classique (§ 3.5 et 3.6). Au préalable, on définit le modèle et ses équilibres (§ 3.1 et 3.2) en termes des composants introduits au Chapitre 2, puis on introduit les conditions globales qui sont requises (§ 3.3).

§ 3.1 - DEFINITION DU MODELE ET DE SES EQUILIBRES

(A) En ce qui concerne l'**appareil nominatif** (alinéa 2.1.A), chaque spécification du modèle comporte, outre la nomenclature des **biens** notée H (alinéa 2.1.D), une nomenclature de **consommateurs**, notée I, et une nomenclature de **producteurs**, notée $J^{\#}$, cette dernière étant supposée être la réunion de deux sous-nomenclatures disjointes, la nomenclature des **producteurs privés**, notée J, et la nomenclature des **producteurs publics**, notée J^e. En fait, on suppose que la nomenclature J^e comporte un seul seul poste, noté e, qu'on appelle l'**Etat** ([3a]).

(B) Un **jeu de données**, relatif à l'appareil nominatif (H, I, J, J^e), est un multiplet ([3b]),

(3.1a) $\quad \mathbf{d} = ((\sigma^i, f^i, i \in I), (o^{ij}, i \in I, j \in J), (Y^j, j \in J), Y^e, (t^i, i \in I), (u^j, j \in J)),$

où, pour $i \in I$ et $j \in J$, (σ^i, f^i) est une fonction de demande excédentaire à survie (§ 2.2), o^{ij} est un nombre ≥ 0, Y^j et Y^e sont des ensembles de production (§ 2.4), t^i est un protocole de taxation de consommateur (§ 2.5) et u^j un protocole de taxation de producteur (§ 2.6). Désignant par $\mathbf{d}°$, $\mathbf{t}$ et $\mathbf{u}$ les sous-mutiplets de $\mathbf{d}$ définis par,

(3.1b) $\quad \mathbf{d}° = ((\sigma^i, f^i, i \in I), (o^{ij}, i \in I, j \in J), (Y^j, j \in J), Y^e),$

(3.1c) $\quad \mathbf{t} = (t^i, i \in I), \qquad$ (3.1d) $\quad \mathbf{u} = (u^j, j \in J),$

le jeu de données $\mathbf{d}$ peut être identifié au triplet $(\mathbf{d}°, \mathbf{t}, \mathbf{u})$. Le multiplet $\mathbf{d}°$ et le couple $(\mathbf{t}, \mathbf{u})$ seront appelés respectivement le **jeu de données de constitution** et le **jeu de données de taxation** ([3c]).

(C) Les **variables** sont les composantes du multiplet,

(3.2a) $\quad v = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b}),$ avec ([3b]),

(3.2b) $\quad \mathbf{x} = (x^i, i \in I) \in \mathbf{R}^{H \times I}, \quad \mathbf{y} = (y^j, j \in J) \in \mathbf{R}^{H \times J}, \quad y^e \in \mathbf{R}^H,$

(3.2c) $\quad p \in \mathbf{R}^H_{+*}, \quad \mathbf{s} = (s^i, i \in I) \in \mathbf{R}^I, \quad \mathbf{b} = (b^i, i \in I) \in \mathbf{R}^I.$

Un **équilibre**, relatif au jeu de données $\mathbf{d}$ [de la forme (3.1a)], est un multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ de variables qui vérifie les **contraintes d'équilibre** (3.3) à (3.7) ci-après liant ces variables aux données ([3d]),

(3.3) $\quad$ pour tout $i \in I$, (a) $\; s^i \geq \sigma^i(t^i(p, x^i)), \quad$ (b) $\; x^i \in f^i(t^i(p, x^i), s^i),$

$$\text{(c)} \quad s^i = \sum_{j \in J} o^{ij}[p.y^j - u^j(p, y^j)] + b^i,$$

(3.4) $\quad$ pour tout $j \in J$, $\quad y^j \in \operatorname{Argmax} \{ p.y - u^j(p, y) \mid y \in Y^j \}$ ([2j]),

(3.5) $\quad$ (a) $\; y^e \in Y^e, \quad$ (b) $\; \sum_{i \in I} b^i = p.y^e + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p, x^i) + \sum_{j \in J} u^j(p, y^j),$

(3.6) $p \in S_H$, (3.7) $\sum_{i\in I} x^i = \sum_{j\in J} y^j + y^e$.

(D) Ces contraintes entraînent, en général (proposition 3.3), que $\mathbf{x} = (x^i, i\in I)$ et p vérifient la **loi de Walras en situation**,

(3.8) pour tout $i\in I$, $t^i(p,x^i).x^i = s^i$.

L'équilibre sera dit **strict** s'il vérifie de plus,

(3.9) $p.y^e = 0$.

(E) Un jeu de données **d** sera dit **standard** si, d'une part les (σ^i, f^i) $(i\in I)$ vérifient les conditions de continuité (2.12) et, lorsque Card(I) > 1, les conditions de bornitude inf. (2.15), d'autre part les Y^j $(j\in J)$ et Y^e vérifient les conditions de compacité (2.22), enfin les t^i $(i\in I)$ et les u^j $(j\in J)$ vérifient les conditions de continuité (2.30) et (2.42). Il sera dit **consistant** si l'ensemble de ses équilibres, noté Eq(**d**) ou Eq(**d**°,**t**,**u**), est non vide, i.e. si le modèle correspondant admet un équilibre.

La proposition élémentaire ci-après (alinéa 4.1.B) précise la régularité de l'ensemble Eq(**d**) des équilibres, sans préjuger cependant de sa non vacuité qui fera l'objet du théorème 3.4.

PROPOSITION 3.1 - L'ensemble Eq(**d**) des équilibres est compact si, d'une part, le jeu de données **d** est standard, d'autre part, lorsque Card(I) > 1, les fonctions (σ^i, f^i) $(i\in I)$ vérifient la loi de Walras locale (2.17a).

§ 3.2 - INTERPRETATIONS

(A) Vu le caractère statique du modèle (alinéa 2.1.C), données, variables et contraintes sont toutes relatives, pour l'ensemble économique à représenter, à une même période de référence.

(B) En ce qui concerne les données : la fonction de demande excédentaire à survie (σ^i, f^i) définit le comportement du consommateur $i\in I$ (§ 2.2), les ensembles Y^j et Y^e sont les ensembles de production du producteur privé $j\in J$ et de l'Etat (§ 2.4), les fonctions t^i et u^j sont les protocoles de taxation du consommateur $i\in I$ (§ 2.5) et du producteur privé $j\in J$ (§ 2.6), enfin la matrice $(o^{ij}, i\in I, j\in J)$ définit la répartition des profits des producteurs privés entre les consommateurs.

(C) En ce qui concerne les variables : x^i représente la demande excédentaire du consommateur $i\in I$, s^i son solde des transferts (§ 2.2) et b^i le transfert forfaitaire de l'Etat vers lui (alinéa 3.2.F) ; y^j représente le vecteur d'échanges du producteur privé $j\in J$ et y^e celui de l'Etat (§ 2.4) ; enfin p représente le vecteur des prix courants (alinéa 2.1.E).

(D) Les contraintes (3.3a,b), (3.4), (3.5a) et (3.6) sont standard, i.e correspondent aux définitions et interprétations des composants du modèle données dans le Chapitre 2 : les contraintes (3.3a,b) expriment le comportement des consommateurs $i\in I$ en présence de la taxation conformément à (2.28) (§ 2.5) et les contraintes (3.4) celui des producteurs privés $j\in J$ conformément à (2.40) (§ 2.6) ; la contrainte (3.5a) exprime la compatibilité du vecteur des échanges de l'Etat avec son ensemble de production (§ 2.4) ; la contrainte (3.6) normalise le vecteur des prix courants, conformément à (2.3) (§ 2.1).

(E) Les contraintes (3.3c), (3.5b) et (3.7) expriment, par contre, des hypothèses, des conventions, supplémentaires concernant les comportements des producteurs privés et de l'Etat en ce qui concerne le circuit économique. Ces conventions peuvent s'énoncer, "ante formulas", par les interprétations suivantes :

Int. (3.10) (a) le montant (de signe quelconque) de la capacité de redistribution de l'Etat est la somme du solde, aux prix courants, de ses échanges en tant que producteur et du solde de ses recettes et de ses dépenses dues aux taxations des consommateurs et des producteurs privés ; (b) l'Etat équilibre son budget, de façon forfaitaire, en transférant (algébriquement) la totalité de ce montant aux consommateurs ;

Int. (3.11) (a) l'Etat achète aux prix courants et (b) prend en charge physiquement tous les excédents générés par le système ;

Int. (3.12) chaque producteur privé équilibre son budget en transferant (algébriquement) le montant (de signe quelconque) de son profit aux consommateurs selon une règle de répartition donnée.

(F) Les contraintes (3.3c) et (3.5b) expriment les conventions (3.10) et (3.12) : la contrainte (3.5b) exprime l'équilibre du budget de l'Etat, le membre de droite représentant le montant de sa **capacité de redistribution**, tandis que le membre de gauche représente la contre partie de ce montant comme somme des **transferts forfaitaires** b^i aux divers consommateurs $i \in I$; la contrainte (3.3c) détermine le solde s^i des transferts vers le consommateur $i \in I$, conformément aux conventions (3.10b) et (3.11), le coefficient o^{ij} représentant la fraction du profit $p.y^j - u^j(p,y^j)$ du producteur privé $j \in J$ qui revient à ce consommateur.

(G) La contrainte (3.7) exprime l'équilibre physique : elle conjugue la loi de conservation des biens - qui y stipule seulement l'inégalité "$\leq$", laquelle entraine que le vecteur différence du second membre et du premier, étant positif, constitue le vecteur des excédents - avec la convention (3.11) qui stipule que ce vecteur d'excédents peut être imputé en consommation au solde physique y^e ; d'où l'égalité dans (3.7). On précisera ci-dessous, à propos des conditions globales (proposition 3.3), le lien entre cette égalité et l'équilibrage en valeur du circuit économique.

(H) La contrainte d'équilibre strict (3.9) entraine, compte tenu de la contrainte (3.5b), l'égalité,

$$(3.13) \qquad \sum_{i \in I} b^i = \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p,x^i) + \sum_{j \in J} u^j(p,y^j),$$

qui exprime la recherche d'une "vérité des prix" par un comportement de l'Etat tel que sa capacité de redistribution n'interfère pas avec son activité productrice. Cette notion sera généralisée au Chapitre 5 (§ 5.1 et 5.2).

§ 3.3 - <u>CONDITIONS GLOBALES</u>

(A) En plus des conditions introduites au Chapitre 2, **conditions locales** en ce sens qu'elles concernent les agents à titre individuel, l'existence d'un équilibre (§ 3.4) va réclamer des **conditions globales**, i.e. des conditions liant les divers agents entre eux.

Ces conditions s'écrivent ([3e]) :

(3.14) **[s-viabilité]** pour tout $\mathbf{x} = (x^i, i \in I) \in R^{H \times I}$ tel que $x^i \in \underline{X}(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i \in I$, il existe $\mathbf{y} = (y^j, j \in J) \in R^{H \times J}$ et $y^e \in R^H$ tels que,

(a) $y^j \in Y^j$ pour tout $j \in J$, (b) $y^e \in Y^e$, (c) $\sum_{i \in I} x^i \leq \sum_{j \in J} y^j + y^e$;

(3.15) **[t-viabilité]** pour tout $\mathbf{x} = (x^i, i \in I) \in R^{H \times I}$ tel que $x^i \in \underline{X}(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i \in I$, pour tout $p \in S_H$ et tout $\mathbf{y} = (y^j, j \in J) \in R^{H \times J}$ tel que $y^j \in Am(Y^j, u^j, p)$ pour tout $j \in J$, il existe $y^e \in Y^e$ tel que,

(a) $\sum_{i \in I} p.x^i \leq \sum_{j \in J} p.y^j + p.y^e$;

(3.16) **[libre disposition contrôlée]** pour tout $\mathbf{x} = (x^i, i \in I) \in R^{H \times I}$, tout $\mathbf{y} = (y^j, j \in J) \in R^{H \times J}$ et tout $y^e \in R^H$ tels que $x^i \in X(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i \in I$, $y^j \in Y^j$ pour tout $j \in J$ et $y^e \in Y^e$,

(a) $\sum_{i \in I} x^i \leq \sum_{j \in J} y^j + y^e$ entraîne $\sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y^j \in Y^e$;

(3.17) **[répartition des profits]** pour tout $j \in J$, $\sum_{i \in I} \sigma^{ij} = 1$.

(B) La condition de s-viabilité (3.14), purement physique, est la plus typique des conditions globales (3.14) à (3.16). Elle exprime que le système productif peut assurer la survie des consommateurs via leurs demandes excédentaires de stricte survie [interprétation (2.10)]. La notion correspondante est à rapprocher de la notion standard d'état réalisable ou accessible ([3f]).

Toutefois, cette condition (3.14) est insuffisante en présence de taxation du producteur privé (alinéa 3.5.C), l'existence de l'équilibre n'étant alors obtenue que sous la condition de t-viabilité (3.15), qui, elle, n'est plus purement physique et serait plutôt à rapprocher de la condition de survie (SA) de Bonnisseau-Cornet ([3g]). Au demeurant, ces conditions sont liées par,

(3.18) la condition de t-viabilité (3.15) est conséquense de la condition de s-viabilité (3.14), lorsque tous les protocoles de taxation u^j ($j \in J$) sont identiquement nuls.

La condition de libre disposition contrôlée (3.16), purement physique comme la condition (3.14), est liée à la convention (3.11b) concernant la prise en charge des excédents par l'Etat : elle stipule que l'Etat peut prendre en charge, physiquement, les excédents que le système est susceptible de générer.

Cette condition (3.16) est évidemment satisfaite si l'ensemble de production Y^e de l'Etat vérifie la condition (locale) de libre disposition (2.24). Cependant, la première est mieux adaptée à l'impératif de réalisme (alinéa 1.2.F), car elle est compatible avec la condition de compacité (2.22) pour Y^e ([3h]), ce qui n'est pas le cas de la seconde.

(C) La condition (3.17) exprime, de façon standard ([3i]), la conservation des profits. Son lien avec la loi de Walras et l'équilibrage en valeur du circuit économique est précisé par la proposition suivante (alinéa 4.1.A).

PROPOSITION 3.3 - Le jeu de données **d** étant supposé vérifier la condition de répartition des profits (3.17), soit ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{s}$, $\mathbf{b}$) un multiplet de variables vérifiant les contraintes (3.3c) et (3.7). Alors :

(A) la loi de Walras en situation (3.8) entraîne l'égalité (3.5b) ;

(B) inversement, l'égalité (3.5b) entraîne la loi de Walras en situation (3.8), soit si Card(I) = 1, soit si, d'une part les multiplets **x** et **s** vérifient aussi les contraintes (3.3a) et (3.3b), d'autre part les fonctions de demande excédentaires (σ^i, f^i) $(i \in I)$ vérifient la loi de Walras locale (2.17a).

Cette proposition peut être considérée comme exprimant le principe de non indépendance des équations comptables (3j). En effet, d'une part, compte tenu de (3.3b) [interprétation (2.27a)], la loi de Walras en situation (3.8) exprime l'équilibre des budgets des consommateurs, d'autre part l'égalité (3.5b) exprime celui de l'Etat, enfin celui des producteurs privés est sous-jacent à l'égalité (3.3c) (alinéa 3.2.F).

§ 3.4 - THEOREME D'EXISTENCE DE L'EQUILIBRE

Un jeu de données d [de la forme (3.1a)] sera dit de **type convexe** si les (σ^i, f^i) $(i \in I)$, les Y^j $(j \in J)$ et Y^e, les u^j $(j \in J)$ vérifient les conditions de convexité (2.13), (2.23), (2.43) respectivement.

Cela étant, le théorème suivant récapitule les résultats annoncés en ce qui concerne la consistance d'un jeu de données.

THEOREME 3.4 - Soit d un jeu de données standard, de type convexe, vérifiant la condition de libre disposition contrôlée (3.16) et la condition de répartition des profits (3.17).

(A) Il existe un équilibre si, d'une part les (σ^i, f^i) $(i \in I)$ vérifient la loi de Walras locale (2.17), d'autre part le jeu de données d vérifie la condition de t-viabilité (3.15).

(B) Il existe un équilibre strict si, d'une part les (σ^i, f^i) $(i \in I)$ vérifient la loi de Walras globale (2.16), d'autre part Y^e vérifie la condition de pure disposition (2.25), enfin le jeu de données d vérifie la condition de t-viabilité (3.15).

(C) En l'absence de taxation des producteurs, i.e. lorsque $u^j = 0$ pour tout $j \in J$, on peut remplacer, dans les propriétés (A) et (B) ci-dessus, la condition de t-viabilité (3.15) par la condition de s-viabilité (3.14).

Ce théorème est établi au Chapitre 4. Au préalable, on fait quelques remarques sur ses tenants et aboutissants (§ 3.5), puis on examine le cas classique (§ 3.6). Ces éléments sont complétés par les perspectives du Chapitre 5 concernant les liens entre la réduction de la multiplicité des équilibres, le comportement de l'Etat et le problème de la taxation optimale. Par ailleurs, le chapitre 8 fournit des exemples de jeux de données vérifiant ou ne vérifiant pas les conditions du théorème.

§ 3.5 - REMARQUES SUR LE THEOREME D'EXISTENCE

(A) En ce qui concerne les fonctions de demande excédentaire (σ^i, f^i) des consommateurs, la condition la plus restrictive, à première analyse, est celle de convexité (2.13). Une autre conditions sera introduite au § 6.3, via le Scolie 6.3, à propos des méthodes de construction de ces fonctions à partir des fonctions de demande usuelles. Au demeurant, en seconde analyse, la condition de continuité (2.12), plus précisément (2.12b), est aussi loin d'aller de soi, ainsi que le montrent, par exemple, les précautions qu'elle réclame lorsque le couple (σ^i, f^i) est défini à partir d'un ensemble de consommation et d'une fonction d'utilité (§ 6.6, alinéas 6.8.B,C, § 6.9).

Par contre, la loi de Walras locale (2.17) [propriété (A)], semble difficile à affaiblir, en particulier eu égard à la proposition 3.3 ([3k]). De plus, la propriété (B), où intervient la loi globale (2.16), souligne l'écart entre les deux formulations de la loi (alinéas 2.3.B-D).

(B) Encore à propos des fonctions de demande (σ^i, f^i), on souligne que la condition de bornitude (2.14) n'est pas requise pour ces fonctions, alors que celle de compacité (2.22) l'est pour les ensembles de production Y^j $(j \epsilon J)$ et Y^e. Cette disparité n'est qu'apparente, car cette dernière condition sur les Y^j et Y^e est à rapprocher de la condition, "locale", de compacité des ensembles $f^i(p,s)$ $(p \epsilon S_H, s \epsilon R)$ qu'inclut la condition de continuité (2.12), plutôt que de la condition de bornitude (2.14). Ainsi, cette condition (2.14) n'est mentionnée ici, au stade énonciatif ([3l]), qu'en vertu de l'<u>impératif de réalisme</u> du modèle (alinéas 1.2.F, 2.4.B) qui conduit à ne considérer que des ensembles de consommation ou de production bornés. Par contre la condition de bornitude inf. (2.15) semble inévitable, lorsque Card(I) > 1 (alinéa 8.11.F).

(C) La seconde limitation importante du théorème 3.4 concerne la condition de t-viabilité (3.15). Elle a été introduite, faute de mieux, car la seule condition de s-viabilité (2.14) ne suffit pas, en général, à assurer l'existence de l'équilibre en présence de taxation du producteur (alinéa 8.12.D). Mais cette condition, qui est suggérée par la démarche de démonstration ([3m]), est très forte et sans doute, en général, loin d'être nécessaire (alinéa 8.12.E).

(D) Toutefois, l'insuffisance de la condition de s-viabilité en présence de taxation des producteurs ne doit pas occulter son intérêt en l'absence de cette taxation [propritété (C) du théorème]. En particulier, elle remplace avantageusement, eu égard à l'impératif de réalisme, les diverses conditions usuelles d'accessibilité, conditions concernant tant les consommateurs, via leurs ensembles de consommation et leurs dotations, que les producteurs, via leurs ensembles de production ([3n]). Par exemple, cette condition ne fait pas intervenir les dotations, qui sont incluses dans les données (σ^i, f^i) (alinéa 2.2.B), et la condition usuelle (peu réaliste) $0 \epsilon Y^j$ ([3o]) n'est pas requise ici.

(E) On note aussi, en ce qui concerne les protocoles de taxation, qu'ils peuvent différer d'un consommateur ou d'un producteur à l'autre. Cette dernière propriété permet d'envisager des taxations différenciées, par exemple des taxations différentes pour les producteurs ayant une activité de production locale et ceux n'ayant que des activité d'import-export, d'où la possibilité d'un traitement des droits de douane avec une nomenclature de biens ne distinguant pas produits locaux et produits importés (§ 7.3, dont alinéa 7.3.C, et § 7.4).

§ 3.6 - <u>CAS CLASSIQUE</u>

(A) Afin d'llustrer le modèle introduit au § 3.1 en le comparant au modèle standard de Arrow-Debreu ([1a]), on va étudier le cas **classique** du premier, en l'occurrence le cas particulier **sans taxation ni état producteur.**

(B) L'**appareil nominatif** étant, pour ce modèle classique, réduit au triplet (H, I, J) (alinéa 3.1.A), un **jeu de données** (**classique**) est un multiplet,

$$(3.19) \qquad d^* = ((\sigma^i, f^i, i\in I),\ (o^{ij}, i\in I, j\in J),\ (Y^j, j\in J)),$$

avec les mêmes notations et interprétations que dans le modèle général (alinéas 3.1.B et 3.2.A), tandis que les **variables** sont les composantes du multiplet,

$$(3.20) \qquad v^* = (\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ p,\ \mathbf{s},\ \mathbf{b}),$$

toujours avec les mêmes notations et interprétations (alinéas 3.1.C et 3.2.B), en notant cependant que, l'Etat est absent en tant que producteur, mais pas en tant que gestionnaire des transferts forfaitaires b^i vers les consommateurs $i\in I$.

(C) Un **équilibre** (**classique**), relatif à ce jeu de donnée classique $\mathbf{d}^*$, est un multiplet $(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ p,\ \mathbf{s},\ \mathbf{b})$ de variables qui vérifie les **contraintes d'équilibre** (3.21) à (3.25) ci-après liant ces variables aux données,

$$(3.21) \qquad \text{pour tout } i\in I, \quad (a)\ \ s^i \geq \sigma^i(p), \quad (b)\ \ x^i \in f^i(p,s^i),$$

$$(c)\ \ s^i = \sum_{j\in J} o^{ij} p.y^j + b^i,$$

$$(3.22) \qquad \text{pour tout } j\in J, \quad y^j \in \text{Argmax}\ \{\ p.y \mid y \in Y^j\ \},$$

$$(3.23) \qquad \sum_{i\in I} b^i = p.\Big(\sum_{i\in I} x^i - \sum_{j\in J} y^j\Big)$$

$$(3.24) \qquad p \in S_H, \qquad\qquad (3.25) \qquad \sum_{i\in I} x^i \leq \sum_{j\in J} y^j.$$

(D) Que le système de ces contraintes puisse être considéré comme un cas particulier du système des contraintes (3.3) à (3.7) réclame d'introduire un Etat producteur fictif, ce qui peut être fait comme suit.

D'abord, en l'absence de taxation, les contraintes (3.3) se réduisent aux contraintes (3.21), car cette absence se traduit, en ce qui concerne les consommateurs, par des protocoles de taxation t^i ($i\in I$) neutre (2.31), d'où (3.21a,b), et en ce qui concerne les producteurs privés, par des protocoles de taxation u^j ($j\in J$) nuls, d'où (3.21c).

Ensuite, la contrainte (3.25) équivaut à la contrainte générale (3.5a), si l'ensemble de production Y^e de l'Etat producteur fictif est tel que,

$$(3.26) \qquad Y^e \subset -\mathbf{R}^H_+,$$

le vecteur d'échanges y^e de l'Etat étant défini par (3.7), i.e. par,

$$(3.27) \qquad y^e = \sum_{i\in I} x^i - \sum_{j\in J} y^j.$$

La loi de Walras en situation (3.8) s'écrit alors,

$$(3.28) \qquad \text{pour tout } i\in I, \quad p.x^i = s^i,$$

tandis que la contrainte d'équilibre **strict** (3.9) devient, d'après la contrainte d'équilibre (3.23) et l'égalité (3.27),

$$(3.29) \qquad \sum_{i\in I} b^i = 0.$$

Enfin, la condition de s-viabilité (3.14) devient, (3.30) **[s-viabilité]** pour tout $\mathbf{x} = (x^i, i \in I) \in R^{H \times I}$ tel que $x^i \in \underline{X}(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i \in I$, il existe $\mathbf{y} = (y^j, j \in J) \in R^{H \times J}$ tel que,

(a) $y^j \in Y^j$ pour tout $j \in J$ et (b) $\sum_{i \in I} x^i \leq \sum_{j \in J} y^j$;

(E) Le théorème 3.4 admet alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.6 - Il existe un équilibre [resp. un équilibre strict] relatif au jeu de données classique $\mathbf{d}^*$ si, d'une part ce jeu de données est standard, de type convexe et vérifie les conditions de répartition des profits (3.17) et de s-viabilité (3.30), d'autre part les (σ^i, f^i) $(i \in I)$ vérifient la loi de Walras locale (2.17) [resp. la loi de Walras globale (2.16)].

En effet, en vertu des conditions de bornitude inf. (2.15) et de compacité (2.22) que vérifient respectivement les (σ^i, f^i) $(i \in I)$ et les Y^j $(j \in J)$ puisque le jeu est standard, il existe $\underline{x} \in R^H_+$ tel que,

(3.31) pour tout $\mathbf{x} = (x^i, i \in I) \in R^{H \times I}$ et tout $\mathbf{y} = (y^j, j \in J) \in R^{H \times J}$ tels que, $x^i \in X(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i \in I$ et $y^j \in Y^j$ pour tout $j \in J$,

(a) $- \underline{x} \leq \sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y j.$

Posant alors,

(3.32) $Y^e = \{ x \mid x \in R^H_+ \text{ et } - \underline{x} \leq x \leq 0 \},$

soit $\mathbf{d}$ le jeu de données du modèle général, sans taxation, obtenu en adjoignant, au jeu de donnée classique $\mathbf{d}^*$, Y^e comme ensemble de production de l'Etat. D'une part ce jeu $\mathbf{d}$ vérifie la condition de libre disposition contrôlée (3.16), d'autre part un multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ est un équilibre [resp. un équilibre strict] relatif au jeu de données $\mathbf{d}^*$, si et seulement si le multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b})$, où y^e est défini par (3.27), est un équilibre relatif au jeu de données $\mathbf{d}$. D'où le corollaire 3.6, d'après la propriété (C) du théorème 3.4.

(F) On souligne la différence importante entre la définition introduite ici pour l'équilibre, relatif à un jeu de données classique (alinéas 3.6.A-C), et celle du modèle standard de Arrow-Debreu relativement au même jeu de données : l'équilibre est entendu ici avec transferts b^i de l'Etat aux divers consommateurs $i \in I$ - transferts éventuellement de somme nulle, conformément à (3.29), si l'équilibre est strict - alors qu'il est entendu sans transfert dans le modèle standard de Arrow-Debreu [3p]. Ainsi, dans le cadre formel utilisé ici, un équilibre **sans transfert** est un équilibre classique $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ (alinéa 3.6.C) qui vérifie, au-delà de (3.29),

(3.33) pour tout $i \in I$, $b^i = 0$ [3q].

(G) La différence précédente est évidemment à rapprocher de la différence, entre la problématique envisagée ici et celle du modèle standard, en ce qui concerne la survie des consommateurs et la viabilité du système. Dans le modèle standard, l'existence d'un équilibre - vérifiant (3.33) ci-dessus - n'est obtenue qu'au prix de conditions concernant les dotations des consommateurs [3r] qui sont incompatibles avec l'impératif de réalisme de ce travail (alnéa 1.2.F). D'où l'introduction d'une définition plus faible de l'équilibre, en fait assez faible pour que la condition de s-viabilité - elle compatible avec cet impératif (alinéa 3.5.D) - assure l'existence de l'équilibre, mais seulement via la prise en compte de l'Etat, au moins comme gestionnaire de transferts [3s].

On établit ici les résultats énoncés au Chapitre 3. D'abord les résultats préliminaires que constituent les propositions 3.3, 3.1 et 2.3,, puis le théorème 3.4 (§ 4.2 à 4.10), enfin le Scolie 6.3 (§ 4.11 et 4.12).

§ 4.1 - PROPOSITIONS 3.3, 3.1 et 2.3

(A) [PROPOSITION 3.3] Soit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ un multiplet de variables vérifiant les contraintes d'équilibre (3.3c) et (3.7). On montre d'abord que la relation (3.5b) équivaut alors à la relation,

$$(4.1) \qquad \sum_{i \in I} (t^i(p,x^i).x^i - s^i) = 0.$$

En effet, d'après (3.3c) et la condition de répartition des profits (3.17), la relation (3.5b) équivaut à,

$$(4.2) \qquad \sum_{i \in I} s^i = \sum_{j \in J} p.y^j + p.y^e + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p,x^i),$$

donc aussi, d'après (3.7), à,

$$(4.3) \qquad \sum_{i \in I} s^i = \sum_{i \in I} p.x^i + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p,x^i).$$

D'où l'équivalence de (3.5b) et de (4.1), par définition (2.26) des $\underline{t}^i(p,x^i)$.

Cela étant, la propriété (A) de la proposition 3.3 est immédiate, puisque la loi de Walras en situation (3.8) entraîne que la relation (4.1) est satisfaite.

Réciproquement, les contraintes (3.3a) et (3.3b) jointes à la loi de Walras locale (2.17a) entraînent que,

$$(4.4) \qquad \text{pour tout } i \in I, \quad t^i(p,x^i).x^i - s^i \le 0,$$

ce qui fait que la loi de Walras en situation (3.8) est vérifiée en même temps que la relation (4.1). D'où la propriété (B) de la proposition 3.3.

De plus, lorsque Card(I) = 1, la relation (4.1) coïncide avec la loi de Walras en situation (3.8), ce qui fait que cette dernière est équivalente à la contrainte d'équilibre (3.5b), sous les seules contraintes (3.3c) et (3.7).

(B) [PROPOSITION 3.1] Que l'ensemble Eq(**d**) soit un sous-ensemble fermé de l'espace euclidien produit $\mathbf{R}^{H \times I} \times \mathbf{R}^{H \times J} \times \mathbf{R}^H \times \mathbf{R}^H \times \mathbf{R}^I \times \mathbf{R}^I$ résulte directement, vu la forme des contraintes d'équilibre (3.3) à (3.7), de la propriété du graphe fermé (A.12) des fonctions continues et des correspondances h.c.s, des conditions de compacité (2.22) des ensembles Y^j $(j \in J)$ et Y^e, ainsi que des conditions de continuité (2.12), (2.30) et (2.42) des fonctions (σ^i, f^i), t^i et u^j $(i \in I, j \in J)$, qui font partie du caractère standard du jeu de données.

Ainsi, il reste à montrer que l'ensemble Eq(**d**) est borné, ce qui résulte, outre des conditions précédentes, des conditions de bornitude inf. (2.15) des fonctions (σ^i, f^i) $(i \in I)$. D'abord, les composantes y^j $(j \in J)$ et y^e d'un équilibre restent bornées d'après les conditions de compacité (2.22) des ensembles Y^j $(j \in J)$ et Y^e ; ce qui entraîne que les sommes $\Sigma_{i \in I}\, x^i$ restent bornées d'après la contrainte d'équilibre (3.7), donc que les composantes x^i restent aussi bornées, car, lorsque I a plus d'un élément, elles sont par ailleurs minorés (dans $\mathbb{R}^H$) d'après les conditions de bornitude inf. (2.15) des fonctions (σ^i,f^i). Il en résulte, d'abord que les composantes s^i restent bornées d'après la propriété (B) de la proposition 3.3, la loi de Walras locale (2.17a) pour les fonctions (σ^i,f^i) et la condition de continuité (2.30) des protocoles de taxation t^i, puis qu'il en est de même des composantes b^i, d'après les contraintes d'équilibre (3.3c) et la condition de continuité (2.42) des protocoles de taxation u^j.

(C) [PROPOSITION 2.3] La démonstration de la proposition 2.3 est mise ici, plutôt qu'au Chapitre 6 où serait sa place naturelle, à cause du rôle important que joue cette proposition dans la démonstration des résultats d'existence (alinéa 4.2.A).

Pour montrer que le couple (σ,f) défini par (2.19) constitue une fonction de demande excédentaire à survie il suffit de vérifier que la condition d'homogénéité de la correspondance f et la relation (2.4) sont satisfaites, ce qui est immédiat. En particulier, pour ce qui est de cette relation, la condition (2.18) entraîne que, si $s \leq \sigma(p)$, on a $s \leq \delta(p)$, donc $s = \mathrm{Min}(s,\delta(p))$, i.e. $f(p,s) = f^\circ(p,s) = f^\circ(p,\sigma(p)) = f(p,\sigma(p))$.

Que la fonction (σ,f) vérifie la condition de bornitude (2.14), si la fonction (σ,f°) vérifie la condition de continuité (2.12) et si la fonction δ est continue, résulte de ce que le domaine $X(\sigma,f)$ est alors compact, puiqu'il est l'enveloppe convexe fermée de l'image, par la correspondance h.c.s f°, de l'ensemble $\{(p,s) \mid p \in S_H,\ \sigma(p) \leq s \leq \delta(p)\}$, lequel est compact en vertu de la continuité des fonctions σ et δ [propriété (A.9)]. De plus, il est immédiat que la fonction (σ,f) vérifie alors aussi la condition de continuité (2.12).

Enfin, la fonction (σ,f) vérifie la loi de Walras locale (2.17) [resp. seulement la loi (2.17a)] s'il en est ainsi de la fonction (σ,f°). En effet, soient $s \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^H$ tels que,

(4.5) $s \geq \sigma(p)$ et $x \in f(p,s)$, i.e.,

(4.6a) $s \geq \sigma(p)$ et $x \in f^\circ(p,\underline{s})$, avec, (4.6b) $\underline{s} = \mathrm{Min}(s,\delta(p))$.

D'après la loi (2.17a) pour la fonction (σ,f°), on a,

(4.7) $\sigma(p) \leq p.x \leq \underline{s}$, donc aussi, puique $\underline{s} \leq s$,

(4.8) $\sigma(p) \leq p.x \leq s$. D'où la loi (2.17a) pour la fonction (σ,f).

Si, de plus, la fonction (σ,f°) vérifie (2.17b), on a,

(4.9) $x \in f^\circ(p,p.x)$. Mais, d'après (4.6b) et (4.7), on a, $p.x \leq \delta(p)$, donc,

(4.10) $\mathrm{Min}(p.x,\delta(p)) = p.x$. Ainsi, d'après (4.9) et la définition (2.19) de f,

(4.11) $x \in f(p,p.x)$. D'où (2.17b) pour la fonction (σ,f).

§ 4.2 - THEOREME 3.4 : ORIENTATION

(A) Le théoreme 3.4 va être établi, à partir du théorème de Kakutani (A.24), selon une démarche classique en deux étapes : on définit d'abord (première étape) une correspondance relevant de ce théorème, via une compactification du jeu de données basée sur le procédé de troncature des fonctions de demande excédentaire fourni par la proposition 2.3, puis (seconde étape), à partir du point fixe que fournit alors le théorème de Kakutani, on construit un équilibre, non seulement du jeu de données tronqué mais aussi du jeu de données initial.

(B) En fait, la définition de la correspondance - plus exactement la démonstration de ce que cette correspondance admet un point fixe - va donner lieu à plusieurs variantes correspondant à plusieurs types d'hypothèses sur les fonctions de demande excédentaire, entre autres celle du théorème 3.4 et celle du Scolie 6.3. Ainsi, on est amené à prendre comme objet de départ de la deuxième étape le système des relations qui définissent le point fixe.

(C) C'est, donc, ce système que l'on commence par présenter (§ 4.4), en faisant précéder cette présentation de celle (§ 4.3) d'une forme générale de la correspondance en cause. Après quoi, indépendamment : d'une part, on construit un équilibre à partir du point fixe (§ 4.5), d'abord dans le cas des propriétés (A) et (C) (§ 4.6 et 4.7), puis dans celui de la propriété (B) (§ 4.8), d'autre part, on établit l'existence du point fixe, d'abord dans le cadre du théorème 3.4 (§ 4.9 et 4.10), puis dans celui du Scolie 6.3 (§ 4.11). On souligne l'indépendance formelle des deux étapes dans cette présentation où la seconde étape est traitée avant la première : après les § 4.3 et 4.4, on peut aborder, soit les § 4.5 à 4.8, soit les § 4.9 à 4.12.

§ 4.3 - <u>THEOREME 3.4</u> : <u>CORRESPONDANCE</u>

(A) Avec les notations et la terminologie introduites aux § 3.1 et 3.4, on considère un jeu de données **d** [sous la forme (3.1)], <u>standard</u> et vérifiant la condition de <u>répartition des profits</u> (3.17) (les autres conditions relatives à un jeu sont inutiles à ce stade). Par ailleurs, on désigne, pour chaque $i \in I$, par B^i un intervalle de **R** (éventuellement non borné) et par $\mathbf{B} = (B^i, i \in I)$ le multiplet de ces intervalles.

Cela étant, on désigne par $E(\mathbf{d}°,\mathbf{B})$ le sous-ensemble,

$$(4.12) \qquad E(\mathbf{d}°,\mathbf{B}) = \prod_{i \in I} X(\sigma^i, f^i) \times \prod_{j \in J} Y^j \times Y^e \times S_H \times \prod_{i \in I} B^i,$$

de l'espace euclidien,

$$(4.13) \qquad V = \mathbf{R}^{H\times I} \times \mathbf{R}^{H\times J} \times \mathbf{R}^H \times \mathbf{R}^H \times \mathbf{R}^I.$$

Sous des hypothèses convenables de compacité et de convexité sur les données **d** et **B**, $E(\mathbf{d}°,\mathbf{B})$ sera l'un des espaces dans lequel sera appliqué le théorème de Kakutani (§ 4.9).

(B) On définit alors la correspondance g de V dans V, par les relations (4.14) à (4.16) ci-après, comme produit cartésien de ses (correspondances) composantes g_n (n = 1,..,5) sur les cinq facteurs composants de l'espace V, dans l'ordre de son expression (4.13) : pour chaque multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b})$ appartenant à V, avec $\mathbf{x} = (x^i, i \in I)$, $\mathbf{y} = (y^j, j \in J)$, $\mathbf{b} = (b^i, i \in I)$, on pose,

$$(4.14) \qquad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) = \prod_{n=1}^{5} g_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}), \quad \text{où,}$$

$$(4.15.1a) \qquad g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) = \prod_{i \in I} f^i(t^i(p,x^i),s^i), \quad \text{avec,}$$

(4.15.1b) $s^i = \sum_{j \in J} o^{ij}\pi^j + b^i \quad (i \in I)$ et,

(4.15.1c) $\pi^j = p.y^j - u^j(p,y^j) \quad (j \in J)$,

(4.15.2) $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) = \prod_{j \in J} \text{Argmax} \{ p.y - u^j(p,y) \mid y \in Y^j \}$,

(4.15.3) $g_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) = \text{Argmax} \{ p.y \mid y \in Y^e \}$,

(4.15.4) $g_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) = \text{Argmax} \{ \hat{p}.(\sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y^j - y^e) \mid \hat{p} \in S_H \}$,

(4.15.5) $g_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) = \underline{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b})$,

$\underline{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b})$ désignant l'ensemble des multiplet $\mathbf{a} = (a^i, i \in I) \in \mathbf{R}^I$ tels que,

(4.16a) $a^i \geq \sigma^i(t^i(p,x^i)) - \sum_{j \in J} o^{ij}\pi^j$, pour tout $i \in I$,

(4.16b) $\sum_{i \in I} a^i = \text{Max} \{ p.y^e + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p,x^i) + \sum_{j \in J} u^j(p,y^j),$

$\sum_{i \in I} \sigma^i(t^i(p,x^i)) - \sum_{j \in J} \pi^j \}$.

On note que, si,

(4.17) pour tout $i \in I$, $B^i = \mathbf{R}$,

cette correspondance g applique V dans $E(\mathbf{d}°,\mathbf{B})$, ainsi qu'il résulte immédiatement des relations (4.14) et (4.15.1) à (4.15.4).

§ 4.4 - <u>THEOREME 3.4</u> : <u>POINT FIXE</u>

On appelera **point fixe** (du jeu de données **d**) un point fixe de la correspondance g définie au § 4.3, i.e. un multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$, élément de l'espace V, tel que,

(4.18) pour tout $i \in I$, (a) $q^i \geq \sigma^i(t^i(p,x^i))$ et

(b) $x^i \in f^i(t^i(p,x^i),q^i)$, avec,

(c) $q^i = \sum_{j \in J} o^{ij}\pi^j + a^i$ et

(d) $\pi^j = p.y^j - u^j(p,y^j)$, pour tout $j \in J$,

(4.19) pour tout $j \in J$, $y^j \in \text{Argmax} \{ p.y - u^j(p,y) \mid y \in Y^j \}$,

(4.20) $y^* \in \text{Argmax} \{ p.y \mid y \in Y^e \}$,

(4.21a) $p \in S_H$, (4.21b) pour tout $p' \in \mathbf{S_H}$, $p'.d \leq p.d$, avec,

(4.21c) $d = \sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y^j - y^*$,

(4.22) $\sum_{i \in I} a^i = \text{Max} \{ p.y^* + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p,x^i) + \sum_{j \in J} u^j(p,y^j),$

$\sum_{i \in I} \sigma^i(t^i(p,x^i)) - \sum_{j \in J} \pi^j \}$.

Ces relations (4.18) à (4.22) ne font qu'expliciter, composante par composante, la relation de point fixe $(x, y, y^*, p, a) \in g(x, y, y^*, p, a)$. Le seul remaniement concerne la relation (4.18a) qui découle de la relation (4.16a), via l'introduction des variables auxiliaires q^i $(i \in I)$ et π^j $(j \in J)$. On note qu'un tel point fixe du jeu de données **d** appartient à l'ensemble $E(d°,B)$, par exemple si B est de la forme (4.17).

On note aussi que les composantes du point fixe dans Y^e et dans les intervalles B^i $(i \in I)$ sont désignées ici respectivement par y^* (plutôt que par y^e) et par a^i (plutôt que par b^i) car, ainsi qu'on va le voir au § 4.5 (alinéa 4.5.B), ces composantes vont devoir être modifiée pour obtenir le vecteur d'échanges y^e et les transferts forfaitaires b^i de l'équilibre visé.

§ 4.5 - THEOREME 3.4 : CONSTRUCTION D'UN EQUILIBRE

(A) Au jeu de données **d**, standard (alinéa 4.3.A), sauf éventuellement en ce que ses fonctions de demande excédentaire (σ^i, f^i) $(i \in I)$ ne vérifient que la condition de bornitude inf. (2.15) [4a], on associe un jeu de données $\underline{d}$ qui ne diffère de **d** que par ses fonctions de demande excédentaire $(\sigma^i, \underline{f}^i)$ $(i \in I)$, ces dernières étant définies, à partir des fonctions (σ^i, f^i), par le procédé de troncature fourni par la proposition 2.3. Ainsi, on pose, pour chaque $i \in I$,

$$(4.23) \qquad \underline{f}^i(p,s) = f^i(p, \mathrm{Min}(s, \delta^i(p))) \qquad (p \in R^H_{+*},\ s \in R),$$

où δ^i est une fonction numérique sur R^H_{+*} qui est conditionnée comme suit par (4.27). On désigne d'abord par $y°$ un élément de R^H tel que,

$$(4.24) \qquad \sum_{j \in J} y^j + y \le y° \quad \text{pour tout } y = (y^j, j \in J) \in \prod_{j \in J} Y^j \text{ et tout } y \in Y^e,$$

un tel élément existant en vertu des condition de compacité (2.22) que vérifient les ensembles Y^j $(j \in J)$ et Y^e. On pose ensuite, pour chaque $i \in I$,

$$(4.25a) \qquad \underline{\underline{x}}^i = y°, \quad \text{dans le cas où } \mathrm{Card}(I) = 1,$$

$$(4.25b) \qquad \underline{\underline{x}}^i = y° - \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \underline{x}^{i'}, \quad \text{dans le cas contraire},$$

où $\underline{x}^i$ est un élément de R^H tel que,

$$(4.26) \qquad \underline{x}^i \le x \quad \text{pour tout } x \in X(\sigma^i, f^i),$$

un tel élément existant en vertu de la condition de bornitude inf. (2.15) que vérifie f^i. Cela étant, pour chaque $i \in I$, on suppose que δ^i est homogène de degré un, continue et telle que,

$$(4.27) \qquad \delta^i(p) \ge \mathrm{Max}\ \{ \sigma^i(p),\ p.\underline{\underline{x}}^i + p.e \} \quad (p \in R^H_{+*}),$$

où e désigne le vecteur de R^H dont toutes les composantes valent un [4b]. Par exemple, ces conditions sont satisfaites si on définit cette fonction δ^i en stipulant l'égalité dans (4.27) ci-dessus. On dira qu'un jeu de données $\underline{d}$ ainsi construit est un **jeu tronqué** du jeu de données **d**. Un tel jeu n'est évidemment pas unique.

(B) On peut alors formaliser comme suit la seconde étape de la démonstration du théorème 3.4, celle qui associe un équilibre à un point fixe (alinéa 4.2.C).

Si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$ est un point fixe (du jeu de données **d** ; § 4.4), on désigne par $\underline{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$ le multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ dont les composantes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et p sont celles du point fixe, tandis que les composantes y^e, $\mathbf{s}$ et $\mathbf{b}$ sont définies en fonction de celles de ce dernier par,

$$(4.28) \qquad \text{pour tout } i \in I, \qquad \text{(a)} \quad s^i = t^i(p, x^i).x^i,$$

$$\text{(b)} \quad b^i = s^i - \sum_{j \in J} o^{ij} \pi^j,$$

$$(4.29) \qquad y^e = \sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y^j,$$

où les π^j $(j \in J)$ sont toujours définis par (4.18d).

On note le caractère naturel de ces définitions, si on veut que le multiplet $\underline{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$ soit un équilibre : la relation (4.28a) correspond à la loi de Walras en situation (3.8), tandis que les relations (4.28b) et (4.29) correspondent respectivement aux contraintes d'équilibre (3.3c) et (3.7). Cette remarque introduit le lemme suivant sur lequele repose la seconde étape.

LEMME 4.5 - Soient, d'une part, **d** un jeu de données <u>standard</u>, vérifiant les conditions de <u>répartition des profits</u> (3.17), de <u>t-viabilité</u> (3.15) et de <u>libre disposition contrôlée</u> (3.16), enfin tel que les fonctions de demande excédentaires (σ^i, f^i) $(i \in I)$ vérifient la <u>loi de Walras locale</u> (2.17), d'autre part, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$ un point fixe d'un jeu tronqué $\underline{d}$ de **d**. Alors :

(A) le multiplet $\underline{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$ est un équiiibre du jeu initial **d** ;

(B) le multiplet $\underline{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$ est un équilibre <u>strict</u> du jeu initial **d**, si, de plus, le jeu **d** est tel que, d'une part les fonctions (σ^i, f^i) $(i \in I)$ vérifient la <u>loi de Walras globale</u> (2.16), d'autre part l'ensemble Y^e vérifie la condition de <u>pure disposition</u> (2.25).

§ 4.6 - <u>LEMME 4.5</u> : <u>PRELIMINAIRES</u>

(A) Désignant par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$ un point fixe d'un <u>jeu tronqué</u> $\underline{d}$ du jeu **d**, pour montrer que le multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b}) = \underline{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^*, p, \mathbf{a})$ vérifie les contraintes d'équilibre (3.3) à (3.7), relatives [en ce qui concerne (3.3)] au jeu de donnée initial **d**, il reste seulement à s'occuper des contraintes (3.3) et (3.5a). En effet, les contraintes (3.4), (3.6) et (3.7) sont vérifiées par définition du point fixe ou par construction [plus précisément, respectivement d'après les relation (4.19), (4.21a) et (4.29)], donc la contrainte (3.5b) l'est aussi en vertu de la propriété (A) de la proposition 3.3 et de la définition (4.28a) des s^i $(i \in I)$, laquelle exprime la loi de Walras en situation (3.8).

Dans ce sens, on commence par monter que $p.d \leq 0$, i.e. que, d'après (4.21c),

$$(4.30) \qquad p.\left(\sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y^j - y^* \right) \leq 0.$$

Pour cela, on distingue les deux cas correspondant aux deux sommes figurant au second membre de la relation (4.22).

(B) On suppose d'abord, <u>premier cas</u>, que,

$$(4.31) \qquad \sum_{i \in I} a^i = p.y^* + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p, x^i) + \sum_{j \in J} u^j(p, y^j).$$

Pour chaque $i \in I$, d'après la loi de Walras locale (2.17a) relative à la fonction de demande excédentaire tronquée $(\sigma^i, \underline{f}^i)$, avec $t^i(p,x^i)$ mis pour p et q^i [défini par (4.18c)] mis pour s, on a, en vertu de (4.18a),

(4.32a) $\quad t^i(p,x^i).x^i \le q^i$, donc aussi, par définition (2.26) de $\underline{t}^i(p,x^i)$,

(4.32b) $\quad p.x^i + \underline{t}^i(p,x^i) \le q^i$. D'où, par sommation sur $i \in I$,

(4.33) $$\sum_{i \in I} q^i \ge p.\sum_{i \in I} x^i + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p,x^i).$$

Mais, d'après (4.18c) et la condition de <u>répartition des profits</u> (3.17),

(4.34a) $\quad \sum_{i \in I} q^i = \sum_{j \in J} \pi^j + \sum_{i \in I} a^i$. Donc, par définition (4.18d) des π^j $(j \in J)$,

(4.34b) $\quad \sum_{i \in I} q^i = \sum_{j \in J} p.y^j - \sum_{J \in J} u^j(p,y^j) + \sum_{i \in I} a^i$. Enfin, d'après (4.31),

(4.34c) $$\sum_{i \in I} q^i = \sum_{j \in J} p.y^j + p.y^* + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p,x^i).$$

D'où l'inégalité (4.30) dans le cas de (4.31), en portant (4.34c) dans (4.33).

(C) On suppose ensuite, <u>second cas</u>, que,

(4.35) $$\sum_{i \in I} a^i = \sum_{i \in I} \sigma^i(t^i(p,x^i)) - \sum_{j \in J} \pi^j.$$

Comme, d'après (4.18a,c), on a les inégalités,

(4.36) $$\text{pour tout } i \in I, \quad a^i \ge \sigma^i(t^i(p,x^i)) - \sum_{j \in J} o^{ij}\pi^j,$$

l'égalité (4.35) des sommes et la condition de <u>répartition des profits</u> (3.17), entraînent l'égalité [dans (4.36)], pour chaque $i \in I$. Ainsi, d'après (4.18c),

(4.37) $$\text{pour tout } i \in I, \quad q^i = \sigma^i(t^i(p,x^i)).$$

Mais, jointe à (4.18b), cette relation entraîne que,

(4.38) $$\text{pour tout } i \in I, \quad x^i \in \underline{X}(\sigma^i, \underline{f}^i).$$

Donc, en vertu de (4.19) et de la condition de <u>t-viabilité</u> (3.15), il existe un élément $y^\#$ de R^H tel que,

(4.39a) $\quad \sum_{i \in I} p.x^i \le \sum_{j \in J} p.y^j + p.y^\#$ et (4.39b) $\quad y^\# \in Y^e$.

D'où l'inégalité (4.30) dans le cas de (4.35), puisque, d'après (4.20) et (4.39b), on a, $p.y^\# \le p.y^*$. Ce qui achève d'établir (4.30).

§ 4.7 - <u>LEMME 4.5</u> : <u>PROPRIETE (A)</u>

(A) En vertu de (4.30) et de (4.21b,c), on a, $p'.d \le 0$ pour tout $p' \in S_H$. D'où $d \le 0$, i.e., par définition (4.21c) de d,

(4.40) $$\sum_{i \in I} x^i \le \sum_{j \in J} y^j + y^*.$$

Mais, cette relation et la condition de <u>libre disposition contrôlée</u> (3.16) entraînent que la composante y^e du multiplet $\underline{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*, \mathrm{p}, \mathbf{a})$ définie par (4.29) appartient à l'ensemble Y^e, i.e. vérifie la contrainte d'équilibre (3.5a).

(B) Dès lors (alinéa 4.6.A), il reste à montrer que les contraintes (3.3) sont satisfaites pour le jeu initial **d**. On va le faire (alinéa 4.7.C) en commençant par montrer qu'elles le sont pour le jeu tronqué $\underline{\mathbf{d}}$.

En effet, pour chaque $i\in I$, la <u>loi de Walras locale</u> (2.17) appliquée comme ci-dessus (alinéa 4.6.B) à la fonction tronquée $(\sigma^i,\underline{f}^i)$, mais ici dans ses deux assertions (a) et (b), fournit, d'abord,

(4.41a) $\quad t^i(p,x^i).x^i \;\geq\; \sigma^i(t^i(p,x^i))$, d'après (2.17a), puis,

(4.41b) $\quad x^i \;\in\; \underline{f}^i(t^i(p,x^i),t^i(p,x^i).x^i)$, d'après (2.17b).

D'où (3.3a) et (3.3b), par définition (4.28a) de s^i. Ce qui établit (3.3), pour les fonctions tronquées, puisque les relations (3.3c) sont vérifiées par définition (4.28b) des b^i $(i\in I)$.

(C) Ainsi, par définition (4.23) des fonctions tronquées $(\sigma^i,\underline{f}^i)$ $(i\in I)$, on a, en plus de (3.3a),

(4.42) $\quad$ pour tout $i\in I$, $\quad x^i \;\in\; f^i(t^i(p,x^i),\mathrm{Min}(s^i,\delta^i(t^i(p,x^i))))$.

Dès lors, pour établir que la contrainte (3.3) est vérifiée pour le jeu de données initial **d**, il suffit de montrer que, pour chaque $i\in I$,

(4.43) $\quad s^i \;\leq\; \delta^i(t^i(p,x^i))$.

Or, d'après (4.40) et les définitions (4.24)-(4.26) des éléments $\underline{x}^i$ et $\underline{\underline{x}}^i$ $(i\in I)$, on a,

(4.44) $\quad x^i \;\leq\; \underline{\underline{x}}^i$. $\quad$ Donc, d'après (4.27),

(4.45) $\quad t^i(p,x^i).x^i \;\leq\; \delta^i(t^i(p,x^i)))$.

D'où (4.43) par définition (4.28a) de s^i. Ce qui achève d'établir la propriété (A) du Lemme 4.5.

§ 4.8 - <u>LEMME 4.5</u> : <u>PROPRIETE (B)</u>

(A) En plus des conditions requises dans la propriété (A) du lemme 4.5 pour le jeu de données **d**, on suppose ici que ce dernier est tel que, d'une part, les fonctions (σ^i,f^i) $(i\in I)$ vérifient la <u>loi de Walras globale</u> (2.16), d'autre part, l'ensemble Y^e vérifie la condition de <u>pure disposition</u> (2.25). Comme aux § 4.6 et 4.7, on désigne par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*, \mathrm{p}, \mathbf{a})$ un point fixe d'un <u>jeu tronqué</u> $\underline{\mathbf{d}}$ de **d**.

Il s'agit de montrer que le multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, \mathrm{p}, \mathbf{s}, \mathbf{b}) = \underline{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*, \mathrm{p}, \mathbf{a})$ vérifie l'égalité (3.9), en plus des contraintes d'équilibre (3.3) à (3.7) déja établies aux § 4.6 et 4.7.

(B) Pour cela, on remarque d'abord que, puique (3.5a) et la condition de <u>pure disposition</u> (2.25a) entraînent que $p.y^e \leq 0$, il suffit de montrer que,

(4.46) $\quad p.y^e \;\geq\; 0$.

On remarque ensuite que, puique la relation (4.20) et la condition de <u>pure disposition</u> (2.25) [ici dans ses deux assertions (a) et (b)] entraînent que, (4.47) $p.y^* = 0$, il résulte de la relation de point fixe (4.22) que,

(4.48) $$\sum_{i\in I} a^i \geq \sum_{i\in I} \underline{t}^i(p,x^i) + \sum_{j\in J} u^j(p,y^j).$$

(C) Afin d'exploiter cette inégalité (alinéa 4.8.D), on va déduire de la loi de Walras globale (2.16), que,

(4.49) pour tout $i\in I$, $x^i \in f^i(t^i(p,x^i),q^i)$.

Pour cela, on part, pour chaque $i\in I$, de la relation de point fixe (4.18b) relative à la fonction tronquée $(\sigma^i,\underline{f}^i)$, relation qui s'écrit, par définition (4.23) de cette dernière,

(4.50a) $x^i \in f^i(t^i(p,x^i),r^i)$, avec,

(4.50b) $r^i = \mathrm{Min}\ \{ q^i,\ \delta^i(t^i(p,x^i)) \}$,

où q^i, toujours défini par (4.18c,d), vérifie (4.18a), ce qui fait que, d'après (4.27), on a,

(4.51) $r^i \geq \sigma^i(t^i(p,x^i))$.

Ainsi, d'après (4.50a), (4.51) et la <u>loi de Walras globale</u> (2.16) [relative à la fonction initiale (σ^i,f^i)], on a,

(4.52) $t^i(p,x^i).x^i = r^i$. Donc, d'après (4.44),

(4.53) $r^i \leq t^i(p,x^i).\underline{\underline{x}}^i$.

Donc aussi, d'après (4.27) et (4.50b), puisque $t^i(p,x^i).e > 0$, vu que, par définition, $t^i(p,x^i) \in R^H_{+*}$ (alinéa 2.5.A),

(4.54) $\mathrm{Min}\ \{ q^i,\ \delta^i(t^i(p,x^i)) \} < \delta^i(t^i(p,x^i))$.

D'où, la propriété (4.49) annoncée, d'après (4.50a), puique (4.54) entraîne que $q^i \leq \delta^i(t^i(p,x^i))$, donc que $r^i = q^i$.

(D) Cela étant, d'après (4.18a), (4.49) et la <u>loi de Walras globale</u> (2.16) relative aux fonctions (σ^i,f^i) $(i\in I)$, on a,

(4.55) pour tout $i\in I$, $t^i(p,x^i).x^i = q^i$.

Donc, par définitions (2.26) de $\underline{t}^i(p,x^i)$ et (4.18c,d) de q^i,

(4.56) pour tout $i\in I$, $$p.x^i + \underline{t}^i(p,x^i).x^i = \sum_{j\in J} o^{ij}[p.y^j - u^j(p,y^j)] + a^i.$$

Ainsi, par sommation sur $i\in I$ et regroupement des termes, compte tenu de la condition de <u>répartition des profits</u> (3.17),

(4.57) $$p.\left(\sum_{i\in I} x^i - \sum_{j\in J} y^j \right) = \sum_{i\in I} a^i - \sum_{i\in I} \underline{t}^i(p,x^i) - \sum_{j\in J} u^j(p,y^j).$$

D'où l'inégalité (4.46) cherchée, d'après (4.48) et la définition (4.29) de y^e. Ce qui achève d'établir la propriété (B) du Lemme 4.5.

§ 4.9 - <u>THEOREME 3.4</u> : <u>EXISTENCE D'UN POINT FIXE</u> (1)

(A) Ce § et le suivant concernent la <u>première étape</u> de la démonstration du théorème 3.4 (alinéa 4.2.C), en ce sens qu'on y établit l'existence d'un point fixe du jeu de données **d** (§ 4.3), sous l'hypothèse de bornitude (2.14) relative aux fonctions de demande excédentaire (σ^i,f^i) $(i\in I)$, cela lorsque les hypothèses sur ce jeu sont, par ailleurs, celles du théorème 3.4. Ainsi, ce dernier découle de cette existence, de la proposition 2.3 et du Lemme 4.5.

Dans ce sens, on suppose que le jeu de données **d**, outre qu'il est <u>standard</u> et vérifie la condition de <u>répartition des profits</u> (3.17) (alinéa 4.3.A), est de <u>type convexe</u> et tel que les fonctions de demande excédentaires (σ^i, f^i) $(i \in I)$ vérifient la <u>loi de Walras locale</u> (2.17) et la condition de <u>bornitude</u> (2.14).

En vertu de ces conditions de bornitude (2.14), les domaines $X(\sigma^i, f^i)$ $(i \in I)$ sont compacts. Il sont par ailleurs convexes par définition.

(B) Cela étant, on pose,

$$(4.58) \qquad B^i = [\underline{b}^i, \underline{\underline{b}}^i] \quad (i \in I),$$

où, pour chaque $i \in I$, les bornes $\underline{b}^i$ et $\underline{\underline{b}}^i$ sont définies, dans **R**, comme suit : la borne inf. $\underline{b}^i$ est un minorant des quantités,

$$(4.59a) \qquad b^i = \sigma^i(t^i(p,x)) - \sum_{j \in J} o^{ij}[p.y^j - u^j(p,yj)],$$

lorsque p, x et les y^j $(j \in J)$ décrivent respectivement les ensembles compacts S_H, X^i et Y^j, tandis que la borne sup. $\underline{\underline{b}}^i$ vaut,

$$(4.59b) \qquad \underline{\underline{b}}^i = b° - \sum_{i' \in I \backslash \{i\}} \underline{b}^{i'},$$

en désignant par b° un majorant des sommes b' et b", avec,

$$(4.59c) \qquad b' = p.y^e + \sum_{i \in I} \underline{t}^i(p,x^i) + \sum_{j \in J} u^j(p,y^j),$$

$$(4.59d) \qquad b'' = \sum_{i \in I} \sigma^i(t^i(p,x^i)) - \sum_{j \in J} [p.y^j - u^j(p,yj)],$$

lorsque p, les x^i $(i \in I)$, les y^j $(j \in J)$ et y^e décrivent respectivement les ensembles compacts S_H, X^i, Y^j, et Y^e. Ces bornes existent, dans **R**, en vertu, d'une part de la compacité de ensembles X^i $(i \in I)$ et de celle des ensembles Y^j $(j \in J)$ et Y^e [conditions (2.22)], d'autre part de la <u>continuité</u> des fonctions σ^i, t^i et u^j $(i \in I,\ j \in J)$ [conditions (2.12), (2.30), (2.42)]. On note que, d'après la définition (4.59b), elle sont, comme il se doit, telles que, $\underline{b}^i \leq \underline{\underline{b}}^i$ pour tout $i \in I$, car, en vertu de la condition de <u>répartition des profits</u> (3.17), la somme des $\underline{b}^i$ minore toute somme b" de la forme (4.59d), donc minore b°.

L'ensemble **E(d°,B)** défini par (4.12) est compact et convexe, en vertu, d'une part des conditions de <u>bornitude</u> (2.14) sur les fonctions f^i, d'autre part des conditions de <u>compacité</u> (2.22) et de <u>convexité</u> (2.23) des ensembles de production Y^j $(j \in J)$ et Y^e. Par contre, la condition de convexité (2.13) des correspondances f^i $(i \in I)$ n'intervient pas ici.

§ 4.10 - <u>THEOREME 3.4</u> : <u>EXISTENCE D'UN POINT FIXE</u> (2)

(A) L'application du théorème de Kakutani, dans l'espace **E(d°,B)** défini par les relations (4.12) et (4.58), à la correspondance g définie par les relations (4.14) à (4.16), fournit le point fixe cherché (alinéa 4.9.A) pourvu que cette correspondance soit telle que :

(4.60) (a) g applique $E(\mathbf{d}°,\mathbf{B})$ dans lui-même,
(b) g est à valeurs convexes non vides,
(c) g est h.c.s.

Or ces propriétés de g résultent des propriétés correspondantes des (correspondances) composantes g_n $(n = 1, \ldots, 5)$, propriétés dont les vérifications sont élémentaires, conformément aux indications suivantes.

(B) En ce qui concerne la propriété (4.60a), que les projections g_n de g soient à valeurs dans le facteur correspondant de $E(\mathbf{d}°,\mathbf{B})$ est immédiat pour $n = 1, 2, 3, 4$, d'après les relations de définition (4.12) et (4.15.n). Pour $n = 5$, cela résulte de ce que, si un multiplet $\mathbf{a} = (a^i, i \in I)$ vérifie les relations (4.16), on a d'abord $a^i \geq \underline{b}^i$ pour tout $i \in I$, d'après (4.16a) et la définition de $\underline{b}^i$, puis $a^i \leq \underline{\underline{b}}^i$ pour tout $i \in I$, d'après la définition (4.59b) de $\underline{\underline{b}}^i$, puisque (4.16b) entraîne que $b°$ majore la somme des a^i.

(C) En ce qui concerne la propriété (4.60b), que la correspondance g_n soit à valeurs convexes non vides résulte, pour $n = 1$, de la même propriété des correspondances f^i $(i \in I)$ et, pour $n = 2, 3, 4$, des conditions de <u>compacité</u> (2.22) des ensembles de production Y^j $(j \in J)$ et Y^e, des conditions de <u>continuité</u> (2.42) et de <u>convexité</u> (2.43) des protocoles de taxation u^j $(j \in J)$, ainsi que du théorème de Weierstrass (A.16). Enfin, pour $n = 5$, cela résulte de ce que, si on pose $b = \mathrm{Max}\,(b', b'')$, où b' et b'' désignent les sommes au second membre de (4.16b), on a, $b \geq b''$, ce qui fait que b peut être représenté (décentralisé) comme la somme de nombres a^i vérifiant (4.16a), puisque, en vertu de la condition de <u>répartition des profits</u> (3.17), b'' vaut la somme des seconds membres de (4.16a).

(D) En ce qui concerne la propriété (4.60c), que la correspondance g_n soit h.c.s résulte, pour $n = 1$, des conditions de <u>continuité</u> (2.12b)] des correspondances f^i et (2.30) des protocoles de taxation t^i $(i \in I)$, pour $n = 2, 3, 4$, des conditions de <u>compacité</u> (2.22)] des ensembles de production Y^j $(j \in J)$ et Y^e, des conditions de <u>continuité</u> (2.42) des protocoles de taxation u^j $(j \in J)$ et du théorème de maximum (A.17), enfin, pour $n = 5$, du critère du graphe fermé (A.13), vu que la correspondance g_5, d'une part a un graphe fermé en vertu des conditions de <u>continuité</u> (2.12a) et (2.30) sur les fonctions seuil σ^i et les protocoles de taxation t^i $(i \in I)$, d'autre part est à valeurs dans un espace compact.

§ 4.11 - <u>SCOLIE 6.3</u> : <u>CORRESPONDANCE</u>

(A) Ce § et le suivant concernent, comme les § 4.9 et 4.10, la <u>première étape</u> de la démonstration de l'existence d'un équilibre, mais ici relativement au Scolie 6.3, au lieu du théorème 3.4 (alinéa 4.2.C). Plus précisément, on établit l'existence d'un point fixe d'un jeu tronqué $\underline{\mathbf{d}}$ (§ 4.4 et 4.5), sous l'hypothèse que les fonctions de demande excédentaires (σ^i, f^i) $(i \in I)$ du jeu $\mathbf{d}$ sont de type indexé (§ 6.3), les hypothèses sur ces fonctions et plus généralement sur le jeu $\mathbf{d}$ étant celles du Scolie 6.3 [4c]. Ainsi, ce dernier découle de cette existence d'un point fixe, de la proposition 2.3 et du Lemme 4.5.

(B) Dans ce sens, on suppose ici que le jeu de données $\mathbf{d}$ vérifie la condition de <u>répartition des profits</u> (3.17) et est tel que, d'une part les Y^j $(j \in J)$ et Y^e vérifient les conditions de <u>compacité</u> (2.22) et de <u>convexité</u> (2.23), d'autre part les t^i $(i \in I)$ et les u^j $(j \in J)$ vérifient les conditions de <u>continuité</u> et de <u>convexité</u> (2.30), (2.42) et (2.43), enfin, pour chaque $i \in I$, la fonction de demande excédentaire (σ^i, f^i) est la fonction indexée correspondant à un <u>système d'indexation</u> $(M^i, \Gamma^i, \zeta^i, \Phi^i, \omega^i)$ vérifiant les conditions (6.15) à (6.18) requises par l'énoncé du Scholie 6.3. Ainsi, conformément à (6.20), pour chaque $i \in I$, on a, d'une part,

(4.61a) $\quad \sigma^i(p) = \text{Min} \{ \underline{\sigma}^i(\mu, p) \mid \mu \in \Gamma^i(p) \} \quad (p \in R^H_{+*})$, avec,

(4.61b) $\quad \underline{\sigma}^i(\mu, p) = \zeta^i(\mu, p) - p.\omega^i(\mu, p) \quad (\mu \in \Gamma^i(p),\ p \in R^H_{+*})$, d'autre part,

(4.61c) $\quad f^i(p, s) = \{ \Phi^i(\mu, p, p.\omega^i(\mu, p) + s) - \omega^i(\mu, p) \mid \mu \in \Gamma^i(p)$ et $s \geq \underline{\sigma}^i(\mu, p) \} \quad (p \in R^H_{+*},\ s \geq \sigma^i(p))$.

D'après le théorème du maximum (A.17), en vertu des conditions (6.15) et (6.16), les fonctions σ^i et $\underline{\sigma}^i$ sont continues et la fonction f^i est h.c.s.

De plus, pour chaque $i \in I$, on suppose donnée une fonction numérique δ^i sur R^H_{+*}, homogène de degré un, continue et vérifiant, en plus de (4.27),

(4.62) $\quad \delta^i(p) \geq \text{Max} \{ \underline{\sigma}^i(\mu, p) \mid \mu \in \Gamma^i(p) \} \quad (p \in R^H_{+*})$,

et on définit la correspondance tronquée $\underline{f}^i$ associée à f^i et à δ^i par (4.23).

Cela étant, on va obtenir (§ 4.12) un point fixe, du jeu tronqué $\underline{\mathbf{d}}$ de $\mathbf{d}$ ainsi défini, à partir d'un autre point fixe lui même obtenu par application du théorème de Kakutani à un espace $\underline{\underline{E}}$ et à une correspondance ψ (alinéas 4.11.C, D) adaptés à la structure particulière du jeu de données $\mathbf{d}$ en cause et, de ce fait, différents de l'espace et de la correspondance utilisée aux § 4.9 et 4.10.

(C) L'espace $\underline{\underline{E}}$ est d'abord défini comme produit cartésien par,

(4.63) $$\underline{\underline{E}} = \prod_{i \in I} X(\sigma^i, \underline{f}^i) \times \prod_{j \in J} Y^j \times Y^e \times S_H \times \prod_{i \in I} [\underline{b}^i, \underline{\underline{b}}^i] \times \prod_{i \in I} M^i,$$

où les bornes $\underline{b}^i$ et $\underline{\underline{b}}^i$ sont définies à partir du jeu $\mathbf{d}$ comme à l'alinéa 4.9.B.

Cet espace est un sous-ensemble <u>convexe compact</u> d'un espace euclidien, car il est isomorphe au produit de l'espace $E(\mathbf{d}°, B)$ et du produit des espaces M^i $(i \in I)$, tous deux convexes compacts, le premier (alinéa 4.9.B), puique les fonctions tronquées $(\sigma^i, \underline{f}^i)$ vérifient la condition de bornitude (2.14) d'après la proposition 2.3, le second d'après la condition (6.15a) sur les espaces M^i.

(D) La correspondance ψ est définie, de façon analogue à la correspondance g (§ 4.3), par les relations (4.64) à (4.66) ci-après, comme produit cartésien de ses (correspondances) composantes ψ_n (n = 1,..,6) sur les six facteurs composants de l'espace $\underline{\underline{E}}$, dans l'ordre où ils apparaîssent dans son expression (4.63) : pour chaque multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}, \mu)$ appartenant à $\underline{\underline{E}}$, avec $\mathbf{x} = (x^i, i \in I)$, $\mathbf{y} = (y^j, j \in J)$, $\mathbf{b} = (b^i, i \in I)$, $\mu = (\mu^i, i \in I)$, on pose,

(4.64) $$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}, \mu) = \prod_{n=1}^{6} \psi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}, \mu), \text{ où,}$$

(4.65.1a) $\quad \psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}, \mu) =$
$\{ (\Phi^i(\mu^i, p^i, p^i.\omega^i(\mu^i, p^i) + r^i) - \omega^i(\mu, p^i),\ i \in I) \}$ ([4d]), en posant,

(4.65.1b) $$p^i = t^i(p, x^i) \quad \text{et} \quad r^i = \text{Min} \{ \sum_{j \in J} o^{ij}\pi^j + b^i,\ \delta^i(p^i) \} \quad (i \in I), \text{ avec,}$$

(4.65.1c) $\quad \pi^j = p.y^j - u^j(p, y^j) \quad (j \in J)$,

$$(4.65.2)\quad \psi_2(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu) \ = \ \prod_{j\in J} \text{Argmax} \{ \ p.y - u^j(p,y) \mid y \in Y^j \ \},$$

$$(4.65.3)\quad \psi_3(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu) \ = \ \text{Argmax} \{ \ p.y \mid y \in Y^e \ \},$$

$$(4.65.4)\quad \psi_4(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu) \ = \ \text{Argmax} \{ \ \hat{p}.(\sum_{i\in I} x^i - \sum_{j\in J} y^j - y^e) \mid \hat{p} \in S_H \ \},$$

$$(4.65.5)\quad \psi_5(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu) \ = \ \underline{G}(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b),$$

$\underline{G}(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b)$ désignant toujours l'ensemble des multiplet $a = (a^i,\ i\in I) \in R^I$ qui vérifient les relations (4.16),

$$(4.65.6)\quad \psi_6(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu) \ = \ \underline{\underline{G}}(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu),$$

$\underline{\underline{G}}(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu)$ désignant l'ensemble des multiplets $\mu = (\mu^i, i\in I)$ tels que,

(4.66) pour tout $i\in I$, (a) $\mu^i \in \Gamma^i(t^i(p,x^i))$ et

(b) $\underline{\sigma}^i(\mu^i,t^i(p,x^i)) = \sigma^i(t^i(p,x^i))$,

si $b^i < \underline{\sigma}^i(\mu^i,t^i(p,x^i)) - \sum_{j\in J} o^{ij}\pi^j$.

§ 4.12 - <u>SCOLIE 6.3</u> : <u>POINT FIXE</u>

(A) Afin d'appliquer le théorème de Kakutani, dans l'espace $\underline{\underline{E}}$ défini par la relation (4.63), à la correspondance ψ définie par les relations (4.64) à (4.66), il faut vérifier que,

(4.67) (a) ψ applique $\underline{\underline{E}}$ dans lui-même,

(b) ψ est à valeurs convexes non vides,

(c) ψ est h.c.s,

ce pour quoi il suffit de vérifier les propriétés correspondantes des (correspondances) composantes ψ_n ($n = 1,..,6$), conformément aux indications suivantes.

(B) Pour $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$, ces propriétés résultent des mêmes propriétés des composantes g_n (§ 4.10), puique l'espace $E(d°,B)$ est un facteur de l'espace $\underline{\underline{E}}$ (alinéa 4.11.C) et que,

(4.68) pour $(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu) \in \underline{\underline{E}}$ et $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$,

$$\psi_n(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b,\ \mu) \ = \ g_n(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b).$$

(C) Pour $n = 1$, elles sont immédiates car la correspondance ψ_1 est univoque [par définition (4.65.1) (^{4d})] à valeurs (de ce fait convexes non vides) dans le produit cartésien des domaines $X(\sigma^i,\underline{f}^i)$ ($i\in I$) [compte tenu de la convention (6.8), par définition (4.61c) de f^i], i.e. est à valeurs dans le premier facteur de $\underline{\underline{E}}$, enfin est h.c.s, d'après les conditions de <u>continuité</u> (6.16) sur les fonctions Φ^i et ω^i ($i\in I$).

(D) Enfin, la correspondance ψ_6 est à valeurs convexes non vides en vertu, d'une part des conditions de <u>convexité</u> (6.18a) sur les correspondances Γ^i et les fonctions ζ^i et ω^i ($i\in I$), d'autre part du théorème de Weierstrass (A.16), en ce qui concerne le cas de (4.66b). Elle est h.c.s, d'après le Lemme de recollement (A.20) et, encore en ce qui concerne le cas de (4.66b), d'après le critère du graphe fermé (A.13), en vertu, d'une part de la <u>continuité</u> des fonctions σ^i et $\underline{\sigma}^i$ ($i\in I$) (alinéa 4.11.B), d'autre part des conditions de <u>continuité</u> (2.30) des protocoles ti et (6.15) des correspondances Γ^i.

(E) Ainsi, le théorème de Kakutani entraîne l'existence d'un point fixe ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{a}$, μ) de la correspondance ψ. On va montrer que le sous-multiplet ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{a}$) constitue un point fixe du jeu tronqué $\underline{\mathbf{d}}$, ce qui achèvera la démonstration visée du Scolie 6.3 (alinéa 4.11.A).

D'abord, d'après les définitions, (4.65.n) de ψ_n pour n = 2, 3, 4, 5, il est clair que ce multiplet ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{a}$) vérifie les relations de point fixe (4.19) à (4.22). Il reste donc seulement à vérifier qu'il vérifie aussi (4.18), avec $\underline{f}^i$ mis pour f^i.

Pour cela, définissant les nombres q^i ($i \in I$) et π^j ($j \in J$) par les relations (4.18c) et (4.18d), on remarque d'abord que l'inégalité (4.18a) est vérifiée par définition de (4.65.5) de ψ_5, i.e. par définition (4.16a) de $\underline{\underline{G}}$($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{a}$).

En fait, au-delà de (4.18a), on a,

(4.69) pour tout $i \in I$, $\quad q^i \geq \underline{\sigma}^i(\mu^i, t^i(p,x^i))$.

En effet, s'il existait $i \in I$ tel que, $q^i < \underline{\sigma}^i(\mu^i, t^i(p,x^i))$, on aurait, par définition (4.66b) de $\underline{\underline{G}}$($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{a}$, μ), $\underline{\sigma}^i(\mu^i, t^i(p,x^i)) = \sigma^i(t^i(p,x^i))$, donc $q^i < \sigma^i(t^i(p,x^i))$, ce qui contredirait (4.18a) déja établie ([4e]).

Cela étant, pour chaque $i \in I$, définissant le nombre r^i, comme au § 4.8, par la relation (4.50b), on a, d'après la relation (4.69) ci-dessus et la condition (4.62) imposée à la fonction δ^i,

(4.70) $\quad r^i \geq \underline{\sigma}^i(\mu^i, t^i(p,x^i))$.

Par ailleurs, d'après la définition (4.65.1) de ψ_1($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{a}$, μ), la relation de point fixe $\mathbf{x} \in \psi_1$($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{b}$, μ), entraîne que,

(4.71) pour tout $i \in I$, $\quad x^i = \Phi^i(\mu^i, p^i, p^i.\omega^i(\mu^i,p^i) + r^i) - \omega^i(\mu, p^i)$,

où les p^i sont définis par (4.65.1b), donc aussi que,

(4.72) pour tout $i \in I$, $\quad x^i \in f^i(t^i(p,x^i),r^i)$,

d'après la relation (4.70) ci-dessus et la définition (4.61c) de f^i. D'où,

(4.73) pour tout $i \in I$, $\quad x^i \in \underline{f}^i(t^i(p,x^i),q^i)$,

par définition (4.23) de $\underline{f}^i$ et (4.50b) de r^i ($i \in I$). Ce qui achève d'établir que le multiplet ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{a}$) vérifie la relation de point fixe (4.18), avec $\underline{f}^i$ mis pour f^i, et le Scolie 6.3.

Toujours d'un point de vue formel, mais plutôt comme préliminaire à une recherche à venir conforme aux motivations de ce texte (§ 1.2) ([5a]), on s'intéresse ici aux perspectives d'exploitation du modèle introduit au Chapitre 3, en envisageant, d'abord les liens entre la réduction de la multiplicité des équilibres et le comportement de l'Etat (§ 5.1 et 5.2), puis le problème de la taxation optimale (§ 5.3 et 5.4).

§ 5.1 - INDICATEURS ET CONTRAINTES DE SERRAGE

(A) Dans les conditions du théorème 3.4, l'ensemble $Eq(\mathbf{d}°, \mathbf{t}, \mathbf{u})$. des équilibres contient en général une multiplicité d'éléments, car le système des contraintes d'équilibre (3.3) à (3.7) est sous-déterminé relativement au comportement de l'Etat (§ 8.6). La contrainte d'équilibre strict (3.9) restreint cette sous-détermination en introduisant un comportement limitatif de l'Etat, mais, d'une part cette contrainte n'est pas toujours consistante (§ 8.10), d'autre part le comportement de l'Etat qu'elle exprime est trop particulier. On va donc la généraliser en introduisant une classe de contraintes supplémentaire de serrage permettant de prendre en compte d'autres comportements de l'Etat.

(B) Dans le cadre du modèle défini au § 3.1, on désigne par V_* l'espace produit $\mathbf{R}^{H\times I} \times \mathbf{R}^{H\times J} \times \mathbf{R}^{H} \times \mathbf{R}^{H}_{+*} \times \mathbf{R}^{I}$ dont les éléments sont les multiplets $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b})$ de la forme (3.2), i.e. les multiplets de variables du modèle hormis les variables s^i $(i\in I)$ ([5b]), et par $E_*(\mathbf{d}°)$ le sous-ensemble de V_* formé des multiplets $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b})$ tels que,

(5.1) $\quad x^i \in X(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i\in I$, $\quad y^j \in Y^j$ pour tout $j\in J$ $\quad$ et $\quad y^e \in Y^e$.

Cela étant, un **indicateur de serrage** m, relatif au jeu de données $(\mathbf{d}°, t, \mathbf{u})$ supposé <u>consistant</u>, est une fonction numérique ≥ 0 sur l'ensemble $E_*(\mathbf{d}°)$ ([5c]), le **niveau minimum** $\underline{m} = \underline{m}(\mathbf{d}°, t, \mathbf{u})$ de cet indicateur étant défini par,

(5.2) $$\underline{m} \;=\; \mathrm{Inf}\ \{\ m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b}) \;\in\; Eq(\mathbf{d}°, t, \mathbf{u})\ \},$$

tandis que la condition de régularité le concernant s'exprime par,

(5.3) [**continuité**] la fonction m est continue sur $E_*(\mathbf{d}°)$.

Un **protocole de serrage** relatif à un jeu de données <u>consistant</u> $(\mathbf{d}°, \mathbf{t}, \mathbf{u})$ est un couple (m,α) tel que, d'une part m est un indicateur de serrage relatif à ce jeu, d'autre part $\alpha \in \mathbf{R}$, le **niveau de serrage**, vérifie,

(5.4) $$\alpha \;\geq\; \underline{m}(\mathbf{d}°, t, \mathbf{u}).$$

De plus, le protocole de serrage (m,α) est dit **limite** si on a,

(5.5) $$\alpha \;=\; \underline{m}(\mathbf{d}°, \mathbf{t}, \mathbf{u}).$$

La **contrainte de serrage** associée au protocole de serrage (m,α) s'écrit, pour un multiplet de variables $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) \in V_*$,

(5.6) $$m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) \;\leq\; \alpha.$$

Elle est dite **limite** si le protocole correspondant est limite.

La contrainte de serrage (5.6) indique un comportement de l'Etat conformément à l'interprétation suivante :

Int. (5.7) dans le cadre du processus de tâtonnement concurrentiel conduisant à l'équilibre, l'Etat est averti du triplet courant de variables ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, p) et en tient compte pour le choix de son vecteur d'échanges y^e et des transferts forfaitaires b^i ($i \epsilon I$) en vue de satisfaire la contrainte de serrage (5.6).

On note le caractère global de ce comportement, tenant compte de l'ensemble des variables de l'équilibre, par opposition au caractère individuel des comportements des agents privés, seulement basés sur le vecteur des prix. On note en outre que le comportement de l'Etat s'exprime ausssi par le choix des protocoles de taxation (§ 5.3).

(C) L'existence d'un équilibre vérifiant la contrainte (5.6) résulte directement de la définition (5.2) de $\underline{m}$ lorsque l'inégalité stricte a lieu dans (5.4). Dans le cas limite (5.5), elle fait l'objet de la proposition 5.1 ci-après qui est une conséquense immédiate de la proposition 3.1.

PROPOSITION 5.1 - Soient, d'une part ($\mathbf{d}°$, t, $\mathbf{u}$) un jeu de données <u>standard</u> et <u>consistant</u>, d'autre part (m,α) un protocole de serrage, relatif à ce jeu, vérifiant la condition de <u>continuité</u> (5.3). Alors, il existe un équilibre ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{s}$, $\mathbf{b}$) vérifiant la contrainte de serrage (5.6).

En particulier, on peut remplacer "Inf" par "Min" dans la définition (5.2) du niveau minimum $\underline{m}$, dès que le jeu de données est standard.

(D) La considération de protocoles de serrage quelconques, sous (5.4), et pas seulement des protocoles limite, sous (5.5), qui sont plus limitatifs, est justifiée, en pratique, par la grande difficulté du problème d'optimisation globale que réclame de résoudre la détermination de $\underline{m}$ par (5.2). D'où, en particulier, l'intérêt du cas strict où $\underline{m} = 0$ (alinéa 5.2.A).

§ 5.2 - <u>EXEMPLES DE CONTRAINTES DE SERRAGE</u>

(A) Un premier exemple de contrainte de serrage est fourni par la contrainte d'<u>équilibre strict</u> (3.9). En effet, il suffit de poser,

(5.8) $m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) = |p.y^e|$, pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b}) \;\epsilon\; V_*$, et,

(5.9) $\alpha = 0$,

pour que la contrainte de serrage (5.6) se réduise à (3.9). Cette contrainte est alors limite et il existe un équilibre strict si et seulement si,

(5.10) $\underline{m}(\mathbf{d}°, t, \mathbf{u}) = 0$.

De plus, s'il n'en est pas ainsi, i.e. si $\underline{m}(\mathbf{d}°, t, \mathbf{u}) > 0$, la notion d'équilibre strict peut être remplacée, généralisée, par celle d'**équilibre à serrage limite**, i.e. d'équilibre vérifiant la contrainte (5.6) avec α défini par (5.5) plutôt que par (5.9), un tel équilibre existant, en vertu de la Proposition 5.1, dès que le jeu de données est standard et consistant. Mais on se heurte alors à la difficulté pratique de la détermination de $\underline{m}$ mentionnée à l'alinéa 5.1.D. Par ailleurs, la contrainte de serrage (5.6) est à rapprocher de la condition de pertes bornées de Bonnisseau-Cornet [5d].

(B) Un second exemple consiste à définir l'indicateur m par,

$$(5.11) \qquad m(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b) \ = \ \left|\sum_{i\in I} b^i\right|, \quad \text{pour} \quad (x,\ y,\ y^e,\ p,\ b) \ \in \ V_*,$$

i.e. à prendre pour $m(x, y, y^e, p, b)$ la capacité de redistribution de l'Etat (alinéa 3.2.F). La contrainte de serrage (5.6) stipule alors une limitation de cette capacité de redistribution.

(C) Enfin, au-delà de l'exemple précédent, on peut envisager des indicateurs m de la forme,

$$(5.12) \qquad m(x,\ y,\ y^e,\ p,\ b) \ = \ \Phi(b), \quad \text{pour} \quad (x,\ y,\ y^e,\ p,\ b) \ \in \ V_*,$$

où Φ est une fonction numérique ≥ 0 sur R^I, donnée, continue et telle que,

$$(5.13) \qquad \Phi(b) \ = \ 0 \quad \text{entraine} \quad b \ = \ 0 \quad (b \in R^I). \quad \text{Par exemple,}$$

$$(5.14) \qquad \Phi(b) \ = \ \mathrm{Max} \ \{ \ \mu_i|b^i| \ \mid \ i\in I \ \} \quad (b \in R^I), \quad \text{ou encore,}$$

$$(5.15) \qquad \Phi(b) \ = \ \sum_{i\in I} \mu_i|b^i| \quad (b \in R^I),$$

où les $\mu_i > 0$ $(i\in I)$ sont des coefficients de pondération donnés.

(D) Les contraintes de serrage limite, ou approximativement limite (alinéa 5.1.D), correspondant à chacun des exemples précédents expriment un comportement de l'Etat consistant à rechercher une "vérité des prix", compte tenu (ou malgré) ses diverses interventions. Dans ce sens, il serait intéressant de comparer - formellement et numériquement avec une maquette - les vecteurs de prix d'équilibre obtenus sous ces diverses contraintes. Plus généralement, il serait intéressant de comparer les équilibres stricts correspondants, i.e. les équilibres limites avec niveau de serrage nul, cela à la fois du point de vue des conditions d'existence de ces équilibres et de leurs propriétés, dans l'éventualité de leur existence ([5e]).

En particulier, dans le cas classique (§ 3.6), d'une part les deux premiers indicateurs précédents (alinéas 5.2.A et 5.2.B) coïncident, d'autre part un équilibre strict relatif à un indicateur de la forme (5.12) est <u>sans transfert</u> (alinéa 3.6.F), en vertu de la condition (5.13).

(E) Dans les exemples précédents, l'indicateur de serrage m est défini explicitement en fonction des termes qui constituent le jeu de données et ne réclame pas de donnée supplémentaire de type quantitatif. D'autres exemples sont évidemment envisageables où il n'en serait pas ainsi. Dans ce sens, mis à part son caractère global, le protocole de serrage ne joue pas un rôle fondamentalement différent de celui des autres données constituant un "jeu de données" (alinéa 3.1.B) et on peut l'inclure dans la définition de ce dernier en en reconsidérant l'analyse (§ 5.3).

§ 5.3 - <u>TAXATION OPTIMALE ET TAXATION SELECTIVE</u>

(A) Dans les paragraphes précédents, on s'est intéressé à l'existence d'équilibres relatifs à un multiplet de données - "jeu de données" et protocole de serrage - toutes fixées de la même façon.

On va maintenant distinguer, parmi les diverses données, d'une part, les **données de constitution**, composantes du multiplet $d°$ [relation (3.1b)], qui définissent l'état du système pendant la période en cause et sont non contingentes, d'autre part les **paramètres de politique économique**, composantes du multiplet ($\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, m, α), qui définissent le comportement de l'état et de ce fait sont contingentes, sont à déterminer dans les études visées (alinéas 1.1.F, 1.2.A-C).

Dans ce sens et eu égard aux motivations des modèles en cause (§ 1.2), le problème de la **taxation optimale** consiste à déterminer, à partir du jeu de données de constitution, toujours fixé, le multiplet des paramètres de politique économique de manière à satisfaire à une **finalité collective** à laquelle sont censés devoir se soumettre tous les agents, y compris l'Etat. On envisage ci-après rapidement diverses formulations de cette finalité ([5f]).

(B) Dans la formulation standard de la taxation optimale, on suppose donné, outre le jeu de données de constitution $\mathbf{d}^\circ$, un indicateur de serrage M (alinéa 5.1.B) qui va jouer le rôle d'**indicateur de finalité collective** en ce sens qu'on exprime cette dernière par la minimisation, par rapport au multiplet des paramètres de politique économique ($\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, m, α), de la quantité $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}(\mathbf{d}^\circ, \mathbf{t}, \mathbf{u}, m, \alpha)$ définie par,

$$(5.16) \qquad \underline{\underline{M}} = \mathrm{Inf}\ \{\ M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e, \mathbf{p}, \mathbf{b}) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_e, \mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{b}) \in \mathrm{Eq}(\mathbf{d}^\circ, \mathbf{t}, \mathbf{u}) \text{ et } m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e, \mathbf{p}, \mathbf{b}) \le \alpha\ \}.$$

Ainsi, une **politique optimale**, relativement au jeu de données de constitution $\mathbf{d}^\circ$ et à la finalité collective d'indicateur M, est un multiplet ($\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, m, α) minimisant la fonctionnelle $\underline{\underline{M}}(\mathbf{d}^\circ, \mathbf{t}, \mathbf{u}, m, \alpha)$ définie par (5.16). De plus, dans ces conditions, un **équilibre optimal**, i.e. un équilibre correspondant à une politique optimale conformément à (5.16), peut être considéré comme un **équilibre adapté** à la finalité collective en cause. En particulier, les prix correspondants à un tel équilibre peuvent être considérés comme des **prix adaptés** à cette finalité (alinéas 5.3.H et 7.4.D).

Sans chercher ici à préciser davantage le cadre formel de ce problème d'optimisation, on fait seulement à son sujet les remarques (C) à (F) ci-après.

(C) On souligne d'abord que la double optimisation de la formulation précédente se réduit en fait à une seule, puisqu'il s'agit par deux fois de minimisation. De plus, en pratique, le multiplet ($\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, m, α) variable est paramétré de telle sorte qu'il ne décrive qu'un espace de dimension finie, ce qui fait que le problème relève de la programmation non linéaire de dimension finie. Il en est ainsi, par exemple, si, d'une part $\mathbf{t}$ et $\mathbf{u}$ sont de type TVA, i.e. de la forme (2.33) et (2.44), avec des fonctions τ, τ', τ'' de la forme (2.37), les variables réduites étant alors les taux de taxation $\underline{\tau}_h$, $\underline{\tau}'_h$, $\underline{\tau}''_h$ ($h \in H$), d'autre part m est de l'une des formes explicites (5.8), (5.11) ou (5.12), tandis que α, par ailleurs quelconque, vérifie (5.4).

Cependant, même ainsi réduit en dimension finie, le problème reste difficile, car il s'y agit d'optimisation globale, vu le caractère en général non convexe de l'ensemble $\mathrm{Eq}(\mathbf{d}^\circ, \mathbf{t}, \mathbf{u})$ des équilibres (§ 8.8).

(D) On souligne ensuite la distinction entre, d'une part l'indicateur m, ici variable, qui conditionne le comportement de l'état, d'autre par l'indicateur, donné, M qui exprime la finalité collective, ce dernier introduisant une donnée supplémentaire de type quantitatif, alors qu'il peut ne pas en être ainsi pour le premier, comme dans les exemples des alinéas 5.2.A-C. De plus, en général,

$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ ne dépend que du **régime physique**, multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e)$ des variables physiques, et dépend effectivement de chacune des composantes de ce multiplet.

(E) Dans ce sens, un premier exemple est celui où $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e)$ est un **indicateur global de pollution**, auquel cas il dépend naturellement de toutes les variables physiques. Un autre exemple, est celui où $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e)$ est déterminé par la (une) distance entre le multiplet courant $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e)$ et un multiplet donné $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}^e)$ représentant un régime physique jugé collectivement souhaitable. L'indicateur de serrage m peut être variable, comme dans l'exemple de l'alinéa 5.3.C ci-dessus, ou (plus souvent) fixé, le niveau de serrage étant par contre variable, eu égard aux difficultés mentionnées à l'alinéa 5.1.D.

(F) Une variante de la problématique précédente consiste à supposer donnés plusieurs indicateurs de finalité collective, M_k $(k \in K)$, par exemple correspondant à plusieurs types de pollution, et à (tenter de) procéder, les concernant, à une **analyse multicritères** visant à déterminer des niveaux de serrage α_k $(k \in K)$ conjuguant "le mieux possible" les diverses contraintes de serrage,

(5.17) $\quad M_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e) \leq \alpha_k \quad (k \in K)$.

(G) Une autre variante, la **taxation sélective**, consiste à introduire, en plus des diverses contraintes intervenant dans la démarche de taxation optimale (alinéa 5.3.B ci-dessus), la restriction supplémentaire selon laquelle, pour le multiplet $(t, \mathbf{u}, m, \alpha)$ en cause,

(5.18) la projection, de l'ensemble des équilibres $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e, \mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ tels que $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e)$ atteigne ou approxime son minimum $\underline{\underline{M}}$, sur l'ensemble des régimes physiques $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e)$, est "la plus restreinte possible", par exemple, ce qui est un idéal sans doute difficile à atteindre, est réduite à un élément.

Un exemple typique d'application de cette variante concerne le cas où, l'indicateur M étant défini, comme dans le deuxième exemple de l'alinéa 5.3.E ci-dessus, à partir d'un multiplet $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}^e)$, ce dernier est la projection d'un équilibre sans taxation, les données de constitution étant telles que, même avec une contrainte de serrage, le régime physique de cet équilibre n'est pas unique (§ 8.8). Dans ces conditions, la restriction (5.18) précédente vise à sélectionner, via une taxation convenable, le régime physique $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}^e)$ d'un équilibre parmi ceux d'une multiplicité d'équilibres sans taxation. D'où le qualificatif de "selective" donné à cette taxation (§ 8.9).

(H) Les considérations précédentes (alinéas 5.3.B à 5.3.G), envisagées ici seulement pour les paramètres de politique économique que sont les composantes du multiplet (t, u, m, α), peuvent être étendues en adjoignant à ce multiplet d'autres composantes, représentant, par exemple, des normes ou des quotas divers. Pour cela, il faut modifier les données de constitution, représentées jusqu'ici par un jeu fixe $\mathbf{d}°$, en remplaçant ce dernier par une fonction $n \longrightarrow \underline{\mathbf{d}}°(n)$ indiquant comment ces données dépendent du multiplet n des nouveaux paramètres. Un exemple de telle extension est fourni au § 7.4, à propos du traitement des échanges extérieurs, par le cas où les paramètres en question sont des quotas concernant ces échanges.

§ 5.4 - DISCUSSION

(A) Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, c'est seulement à titre de préliminaire à une recherche avenir que certaines perspectives d'exploitation du modèle y sont envisagées, perspectives concernant en particulier le problème de la taxation optimale. En fonction de ce caractère préliminaire, les liens de ces perspectives avec la théorie mathématique de l'économie publique ne sont pas systématiquement discutés, comme le réclamerait leur approfondissement : on fait seulement à leur propos les remarques suivantes.

(B) On souligne d'abord, en particulier à propos des exemples envisagés à l'alinéa 5.3.E, la différence entre la problématique en cause ici et, d'une part l'approche de l'équilibre général à la Negishi ([5g]), d'autre part les approches de la taxation en économique mathématique centrées sur l'optimalité parétiennne de second rang ([5h]).

(C) Dans l'approche à la Negishi, la fonction d'utilité collective est une somme pondérée des fonctions d'utilité des consommateurs, ce qui fait que cette approche est exclue ici à priori par l'absence de telles fonctions ([5i]). Cependant, on pourrait l'inscrire dans le cadre formel en cause ici, en définissant la quantité $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ comme l'opposé de l'utilité collective de Negishi, auquel cas cette quantité ne dépendrait que de $\mathbf{x}$. C'est, en particulier, pour souligner cette différence que la finalité collective est représentée ici par une minimisation plutôt que par une maximisation.

(D) Les approches de la taxation centrée sur l'optimalité parétienne de second rang sont aussi exclue par l'absence de relation de préférence ([5i]), ce qui ne signifie évidemment pas que des inscriptions de ces approches dans le cadre formel en cause ici - lequel est plus général que les leurs - ne puisse pas être intéressantes. En particulier les questions envisagées à l'alinéa 5.2.D pourraient être abordées via ces inscriptions.

(E) Par contre, la formulation standard de la taxation optimale envisagée ici (alinéa 5.3.B-E) fournit, au-delà de la représentation directe des consommateurs par des fonctions de demande, une généralisation naturelle des formulations usuelles ([5j]). Cependant, une prise en compte complète des problèmes d'environnement ([5k]) par des indicateurs globaux (alinéas 5.3.E et 5.3.H) réclamerait, entre autres (alinéa 5.4.G), un traitement des externalités qui manque dans les modèles présentés.

(F) La représentation du comportement de l'Etat par des contraintes de serrage (§ 5.1 et 5.2) devrait être approfondie en liaison avec les travaux, d'une part sur les situations de monopole et les règles de tarification ([5l]), d'autre part sur les équilibres non-walrassiens ([5m]) et sur les modèles keynesiens ([5n]). Par contre, le caractère macroéconomique des applications visées (alinéas 1.2.A-C) rend sans doute inutile l'alourdissement des modèles envisagés par un traitement microéconomique des biens publics ([5o]).

(G) Enfin, les divers approfondissements d'abord envisagés ci-dessus dans le cadre des modèles <u>statiques</u> en cause ici devraient être ensuite transposés au cadre des modèles <u>de cheminement</u> visés à terme (alinéa 1.2.G), cadre naturel de l'étude prospective des transformations profondes (alinéas (1.2.A-C).

On complète ici les définitions relatives aux fonctions de demande excédentaire à survie (§ 2.2 et 2.3) par une vue d'ensemble, dans l'esprit de ce travail (alinéas 1.1.A,C, 1.2.A,D), des procédés de construction de ces fonctions, soit à partir des fonctions de demande usuelles, via leur adaptation au traitement de la survie (§ 6.1 à 6.5), soit à partir des fonctions d'utilité (§ 6.6 et 6.7). Ces procédés posent de nombreuses questions qui sont peut être "bien connues" des spécialistes, mais sont rarement abordées dans la littérature, au moins dans cet esprit (§ 6.8 et 6.9).

Les notations sont celles introduites au § 2.1. En particulier, on suppose donnée une nomenclature de biens H (alinéa 2.1.D).

§ 6.1 - FONCTIONS DE DEMANDE USUELLES

(A) On appelle ici **fonction de demande**, relative à la nomenclature H, toute application [univoque [Ab]] ξ de $R^H_{+*} \times R_+$ dans R^H_+, homogène de degré zéro, continue et vérifiant la **loi de Walras usuelle**,

$$(6.1) \qquad p.\xi(p,r) \;=\; r \qquad \text{pour tous } p \in R^H_{+*} \text{ et } r \in R_+.$$

On note que, à cause de l'homogénéité, la donnée de ξ est équivalente à celle de sa restriction à $S_H \times R_+$ et que, à cause de la continuité et de la loi de Walras, on a,

$$(6.2) \qquad \xi(p,0) \;=\; 0 \qquad \text{pour tout } p \in R^H_{+*}.$$

On note aussi le caractère assez limitatif de cette définition, en ce sens que la fonction ξ est supposée définie et continue sur R^H_{+*} tout entier et pas seulement sur son intérieur R^H_{++}. Vu que les fonctions de demande ne sont envisagées ici que comme point de départ de la construction de fonctions de demande excédentaires (§ 6.2 et 6.3), cette limitation fait écho à celle introduite par la condition de continuité (2.12) concernant ces dernières (alinéa 2.3.B).

(B) Dans ce sens, l'exemple typique, "extrêmal", des fonctions de demande envisagées ici est du type "CES dégénéré" défini par,

$$(6.3a) \qquad \xi(p,r) \;=\; \frac{r}{p.u}\,u \qquad (p \in R^H_{+*},\ r \in R_+), \text{ avec } \quad (6.3b) \quad u \in R^H_{++} \text{ donné.}$$

Par contre les fonctions standard de type CES non dégénéré et les fonctions de Cobb-Douglas [6a] ne rentrent pas dans le cadre précédent car, pour ces fonctions, $\xi(p,r)$ n'est pas borné lorsque $p \in R^H_{++}$ tend vers le bord de R^H_{+*}.

D'autres fonctions de demande peuvent être construites par combinaisons barycentriques de celles de la forme (6.3), combinaisons à coefficients dépendant éventuellement de p et de r (alinéa 8.8.E). Plus généralement, si g est une application de $R^H_{+*} \times R_+$ dans R^H_+, homogène de degré zéro, continue et telle que,

$$(6.4) \qquad p.g(p,r) \;>\; 0 \qquad \text{pour tous } p \in R^H_{+*} \text{ et } r \in R_+,$$

entre autres si g est à valeurs dans R^H_{++}, on définit une fonction de demande ξ en posant,

$$(6.5) \qquad \xi(p,r) = \frac{r}{p.g(p,r)}\, g(p.r) \qquad (p \in R^H_{+*},\ r \in R_+).$$

En particulier, on construit ainsi des fonctions de demance ξ telles que, pour certains p, voire pour tout p, $\xi(p,r)$ est fonction non linéaire de r ([6b]).

(C) L'interprétation d'une fonction de demande ξ en termes du comportement d'un consommateur est standard :

Int. (6.6) les composantes $\xi_h(p,r)$ du vecteur $\xi(p,r)$ représentent les demandes du consommateur en les divers biens $h \in H$, cela en fonction du vecteur p des prix et du **revenu disponible** r de ce consommateur, la loi de Walras (6.1) exprimant ainsi l'équilibre de son budget.

En particulier, en ce qui concerne la fonction de demande ξ définie par les relations (6.3), les composantes u_h du vecteur u représentent des consommations de référence au prorata desquelles, ainsi que de son revenu, le consommateur détermine ses demandes en les divers biens $h \in H$.

§ 6.2 - FONCTIONS DE DEMANDE A SURVIE

(A) La définition précédente d'une fonction de demande (§ 6.1) ignore la question de la survie du consommateur, ce qui est contraire à l'impératif de réalisme (alinéa 1.2.F). Pour combler cette lacune (alinéa 1.1.C,E), on introduit la classe des **fonctions de demande à survie** : une telle fonction (relative à la nomenclature H) est un couple (β,ξ) où, d'une part β est une fonction numérique ≥ 0 sur R^H_{+*} homogène de degré un et continue, appelée **fonction seuil**, d'autre part ξ est une application de $R^H_{+*} \times R$ dans R^H_+, homogène de degré zéro, continue et vérifiant la **loi de Walras à survie**,

$$(6.7) \qquad p.\xi(p,r) = r, \quad \text{pour tous } p \in R^H_{+*} \text{ et } r \geq \beta(p),$$

complétée par la **condition de seuil**,

$$(6.8) \qquad \xi(p,r) = \xi(p,\beta(p)), \quad \text{pour tous } p \in R^H_{+*} \text{ et } r \leq \beta(p),$$

qui exprime que seule la restriction de ξ à l'ensemble des couples (p,r) tels que $r \geq \beta(p)$ est significative. Toute fonction de demande ξ (alinéa 6.1.A) peut évidemment être considérée comme une fonction de demande à survie dont la fonction seuil est identiquement nulle.

(B) La construction suivante fournit un premier exemple de fonction de demande à survie (β,ξ) qui illustre le traitement de la survie : étant donnés un vecteur $v \in R^H_+$ et une fonction de demande $\xi°$, on définit une fonction de demande à survie (β,ξ) en posant [eu égard à (6.2) pour $\xi°$, en ce qui concerne (6.9c)],

$$(6.9a) \qquad \beta(p) = p.v \quad \text{pour } p \in R^H_{+*},$$

$$(6.9b) \qquad \xi(p,r) = v + \xi°(p,\ r - \beta(p)) \quad \text{pour } p \in R^H_{+*} \text{ et } r \geq \beta(p),$$

$$(6.9c) \qquad \xi(p,r) = v \quad \text{pour } p \in R^H_{+*} \text{ et } r \leq \beta(p).$$

(C) L'interprétation d'une fonction de demande à survie (β,ξ) prolonge naturellement celle d'une fonction de demande usuelle [Int. (6.6)] :

Int. (6.10) $\beta(p)$ représente un seuil tel que la survie du consommateur ne peut être assurée, aux prix p, que si son revenu r est au moins égal à $\beta(p)$.

En particulier, en ce qui concerne la fonction de demande ξ définie par les relations (6.9), les composantes v_h du vecteur v représentent des consommations de survie du consommateur en cause en les divers biens $h \epsilon H$, cette interprétation étant confortée par la **contrainte de survie**,

(6.11) $\quad \xi(p,r) \geq v \quad$ pour tous $p \in R^H_{+*}$ et $r \in R_+$,

que vérifie cette fonction, d'après (6.9b,c), puisque $\xi°(p,r) \geq 0$ quels que soient p et r. L'extension de cette contrainte à des fonctions plus générales pose des problèmes difficiles qui seront envisagés à propos des fonctions de demande excédentaires (alinéas 6.4.C, 6.9.D, 8.12.B).

§ 6.3 - FONCTIONS DE DEMANDE EXCEDENTAIRES ET FONCTIONS DE DEMANDE

(A) Dans les § 6.1 et 6.2, le comportement du consommateur n'est représenté que par sa demande, représentation insuffisante, puiqu'elle ignore l'offre (en particulier de facteurs de production) du consommateur. La considération des fonctions de demande excédentaires (§ 2.2) comble cette lacune en permettant la prise en compte de l'offre du consommateur en même temps que, en liaison avec, sa demande. On envisage ici le lien entre les deux représentations en étudiant des procédés de construction de fonctions de demande excédentaires à partir de fonctions de demande et de fonctions d'offre.

(B) Commençant par le cas le plus simple où l'offre de facteurs est constante, cas standard en microéconomie (en particulier cas du modèle de Scarf), on suppose donnés, d'une part une fonction de demande à survie (β,ξ) (§ 6.2), d'autre part un vecteur $w \in R^H_+$ d'offres (alias de dotations). On définit alors une fonction de demande excédentaire à survie (σ,f) univoque, vérifiant la condition de continuité (2.12) et la loi de Walras globale (2.16), en posant ([6c]),

(6.12a) $\quad \sigma(p) = \beta(p) - p.w \quad$ et $\quad$ (6.12b) $\quad f(p,s) = \{\xi(p, p.w + s) - w\}$

$(p \in R^H_{+*},\ s \in R)$.

De plus, le socle $\underline{X}(\sigma,f)$ de cette fonction est donné par,

(6.13) $\quad \underline{X}(\sigma,f) = \{ \xi(p,\beta(p)) - w \mid p \in R^H_{+*} \}$.

En particulier, si la fonction de demande (β,ξ) est de la forme (6.9), le socle de (σ,f) est réduit à l'élément v - w,

(6.14) $\quad \underline{X}(\sigma,f) = \{ v - w \}$.

(C) On va maintenant généraliser cet exemple en explicitant un procédé de construction permettant, en particulier, de prendre en compte, d'une part une offre variable du consommateur, d'autre part des alternatives (§ 6.4), correspondant au caractère multivoque de la fonction de demande excédentaire obtenue.

Pour cela, supposant donné un quintuplet $(M, \Gamma, \zeta, \Phi, \omega)$, dit multiplet d'indexation, tel que, d'une part M est un espace topologique et Γ une correspondance de R^H_{+*} dans M, d'autre part ζ est fonction numérique ≥ 0 sur $M \times R^H_{+*}$ et Φ une application de $M \times R^H_{+*} \times R$ dans R^H_+, enfin ω est une application de $M \times R^H_{+*}$ dans R^H_+, on considère les conditions suivantes relatives à ce multiplet :

(6.15) (a) l'espace M est compact et (b) la correspondance Γ est homogène de degré zéro, à valeurs non vides et continue ;

(6.16) les applications ζ, Φ et ω sont continues ;

(6.17) pour chaque $\mu \in M$, le couple $(\zeta(\mu,.), \Phi(\mu,.,.))$ est une fonction de demande à survie (§ 6.2) et la fonction $\omega(\mu,.)$ est homogène de degré 0 ;

(6.18) (a) M est un sous-ensemble convexe d'une espace Euclidien et, pour chaque $p \in \mathbf{R}^H_{+*}$, l'ensemble $\Gamma(p)$ est convexe ;
(b) pour chaque $p \in \mathbf{R}^H_{+*}$, la fonction partielle $\zeta(., p) - p.\omega(., p)$ est convexe ;

(6.19) (a) pour chaque $p \in \mathbf{R}^H_{+*}$ et chaque $r \in \mathbf{R}$, les fonctions partielles $\zeta(., p)$, $\Phi(., p, r)$ et $\omega(.,p)$ sont affines à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^H$.

(b) pour chaque $\mu \in M$ et chaque $p \in \mathbf{R}^H_{+*}$, la fonction partielle $\Phi(\mu, p, .)$ est linéaire.

(D) Cela étant, la fonction de demande excédentaire (σ,f) visée, qui sera dite **de type indexé** (par l'ensemble M), peut être définie, compte tenue de la convention (2.4) concernant f, par les relations (6.20) ci-après, conformément à la proposition 6.3 qui suit,

(6.20a) $\sigma(p) = \operatorname{Min} \{ \zeta(\mu,p) - p.\omega(\mu,p) \mid \mu \in \Gamma(p) \} \quad (p \in \mathbf{R}^H_{+*})$,

(6.20b) $f(p,s) = \{ \Phi(\mu, p, p.\omega(\mu,p) + s) - \omega(\mu, p) \mid \mu \in \Gamma(p)$ et $s \geq \zeta(\mu,p) - p.\omega(\mu,p) \} \quad (p \in \mathbf{R}^H_{+*}, s \geq \sigma(p))$.

PROPOSITION 6.3 - (A) Si le multiplet d'indexation $(M, \Gamma, \zeta, \Phi, \omega)$ vérifie les conditions (6.15), (6.16) et (6.17), les relations (6.20) définissent une fonction de demande excédentaire à survie (σ,f) vérifiant la condition de continuité (2.12) et la loi de Walras globale (2.16).

(B) Si le multiplet $(M, \Gamma, \zeta, \Phi, \omega)$ vérifie, de plus, les conditions (6.18) et (6.19), cette fonction (σ,f) vérifie la condition de convexité (2.13).

Sous les conditions (6.15) à (6.17), la continuité (2.12a) de σ découle directement du théorème du maximum (A.17) tandis que le caractère h.c.s (2.12b) de f résulte, vu la compacité de M, de ce que son graphe est fermé [critère (A.13)]. La loi de Walras (2.16) résulte de celle (6.7) des fonction de demande $(\zeta(\mu,.), \Phi(\mu,.,.))$ $(\mu \in M)$, via la condition (6.17). La condition de convexité (2.13) découle directement des conditions (6.18) et (6.19) sur ces fonctions. Par contre, cette condition de convexité peut être en défaut si la condition de linéarité (6.19) n'est pas satisfaite, mais, conformément à ce qui suit, cela n'altère pas la possibilité d'application de la proposition.

(E) La propriété (B) de la proposition précédente montre que, si le multiplet $(M, \Gamma, \zeta, \Phi, \omega)$ vérifie les conditions (6.15) à (6.19), la fonction de demande excédentaire de type indexé correspondante vérifie les conditions requises par le théorème 3.4 en ce qui concerne les fonctions de demande excédentaires. En fait, la condition (6.19) est inutile pour cette application, conformément au Scolie suivant (§ 4.11 et 4.12)[4c]

SCOLIE 6.3 - Les propriétés (A), (B), (C) du théorème 3.4 restent valables si les fonctions de demande excédentaires (σ^i,f^i) $(i \in I)$ du jeu de données **d** en question sont de type indexé correspondant à des multiplets d'indexation $(M, \Gamma, \zeta, \Phi, \omega)$ vérifiant les conditions (6.15) à (6.18).

On note que, si la correspondance Γ est constante, $\Gamma(p) = M°$ pour tout p, les énoncés précédents sont valables indépendamment des conditions (6.18) et (6.19), car, sous les seules conditions (6.15) à (6.17), le théorème 3.4 entraîne alors qu'il existe un équilibre pour chaque $\mu \in M^{o}$.

§ 6.4 - INTERPRETATIONS ET SPECIFICATIONS

(A) Les spécificités du comportement d'un consommateur représenté par une fonction de demande excédentaire (σ, f) de type indexé (alinéa 6.3.D) peuvent être appréhendées, en termes d'alternatives, par les interprétations suivantes des composants du multiplet d'indexation $(M, \Gamma, \zeta, \Phi, \omega)$:

(Int. (6.21) chaque élément μ de l'ensemble M repère une alternative pour le consommateur en cause, alternative qui est décrite par le triplet de fonctions partielles $(\zeta(\mu,.), \Phi(\mu,.,.), \omega(\mu,.))$;

(Int. (6.22) aux prix p, (a) seules les alternatives μ appartenant au sous-ensemble $\Gamma(p)$ de M sont prises en compte par le consommateur et, pour une telle alternative $\mu \in \Gamma(p)$, d'une part (b) la demande du consommateur est représentée par le vecteur $\Phi(\mu,p,r)$, pourvu que son revenu r soit au moins égal au seuil de survie $\zeta(\mu,p)$, d'autre part (c) son offre de facteurs est représentée par le vecteur $\omega(\mu,p)$, ce qui fait que (d) son revenu disponible r est égal à la somme du revenu $p.\omega(\mu,p)$ résultant de l'offre et du solde des transferts s, puis que (e) sa demande excédentaire est égale à la différence de sa demande $\Phi(\mu, p, p.\omega(\mu,p) + s)$ et de son offre $\omega(\mu, p)$.

Ces interprétations, jointes aux interprétations (2.9), (2.10, (6.6), (6.10), fournissent une justification des relations (6.20). En particulier les occurrences de $\omega(\mu,p)$ dans ces relations résultent des assertions (6.22c,d,e). Pour le voir, on peut s'appuyer sur l'explicitation (6.23) ci-après, pour la fonction de demande excédentaire de type indexé (6.20), des contraintes d'équilibre du consommateur (2.11) liant sa demande excédentaire x au vecteur p des prix et au solde des transferts s :

(6.23) il existe $\mu \in \Gamma(p)$ tel que (a) $s \geq \zeta(\mu, p) - p.\omega(\mu, p)$ et

(b) $x = \Phi(\mu, p, p.\omega(\mu, p) + s) - \omega(\mu, p)$.

On souligne le rôle crucial que joue dans, cette justification, l'hypothèse selon laqelle l'offre $\omega(\mu,p)$ ne dépend pas du revenu r. S'il n'en était pas ainsi, le revenu devrait être déterminé par l'équation, pour le moins insolite, $r = p.\omega(\mu,p,r) + s$, ce qui grèverait, au-delà de la condition (6.16), l'obtention de la condition de continuité (2.12) que stipule la proposition 6.3 pour la fonction de demande excédentaire (σ, f) de type indexé en cause.

(B) Voici deux procédés de construction plus spécifiques fournissant des fonctions de demande excédentaires de type indexé.

Lorsque la correspondance Γ est univoque, la fonction de demande excédentaire (σ, f) définie par (6.20) constitue seulement une variante de celle définie par (6.12) pour laquelle le vecteur w d'offres dépend du vecteur des prix p.

Plus généralement, on obtient un multiplet d'indexation $(M, \Gamma, \zeta, \Phi, \omega)$ vérifiant les conditions (6.15) à (6.18) en supposant que, d'une part l'espace M coïncide avec un simplexe,

(6.24) $M = S_K$,

où K est un ensemble fini non vide pouvant être interprété comme une nomenclature d'**alternatives élémentaires** ([6d]), la correspondance Γ étant par ailleurs quelconque, d'autre part les fonctions ζ, Φ et ω sont de la forme (6.25) sous la condition (6.26) ci-après,

$$(6.25a) \qquad \zeta(\mu,\ p) \;=\; \mathrm{Max}\ \{\ \beta^k(p)\ |\ k\in K\ \} \qquad (\mu \in M,\ p \in R^H_{+*}),$$

$$(6.25b) \qquad \Phi(\mu,\ p,\ r) \;=\; \sum_{k\in K} \mu_k\Phi^k(p,\ r) \qquad (\mu \in M,\ p \in R^H_{+*},\ r \in R_+),$$

$$(6.25c) \qquad \omega(\mu,\ p) \;=\; \sum_{k\in K} \mu_k\omega^k(p) \qquad (\mu \in M,\ p \in R^H_{+*}),$$

(6.26) pour chaque $k\in K$, le couple (β^k,Φ^k) est une fonction de demande à survie et ω^k est une application continue de R^H_{+*} dans R^H_+.

On note que le seuil $\zeta(\mu,\ p)$ défini par (6.25a) ne dépend pas de μ. Cette limitation, plus précisément la définition uniforme (6.25a) qui l'entraîne, semble inévitable pour que la loi de Walras (6.7) vérifiée par les fonctions de demande élémentaires (β^k,Φ^k) entraîne celle requise par la condition (6.18) visée.

(C) Dans le cadre précédent, on peut considérer le cas plus spécifique où, pour chaque $k\in K$, d'une part la fonction de demande à survie (β^k,Φ^k) est de la forme (6.9) relativement à un vecteur $v^k \in R^H_+$, d'autre part la fonction d'offre ω^k est une constante $w^k \in R^H_+$, ce cas généralisant l'exemple (6.12) ([6e]). Il est alors tentant de chercher une relation entre le socle $\underline{X}(\sigma,f)$ de la fonction de demande de type indexé correspondante et l'ensemble $\underline{\underline{X}}$ défini par l'expression,

$$(6.27) \qquad \underline{\underline{X}} \;=\; \{\ \sum_{k\in K} \mu_k(v^k - w^k)\ |\ \mu \in M\ \},$$

qui généralise l'expression (6.14) du socle dans l'exemple (6.12). Cette relation, qui ne réside pas en général dans l'inclusion,

$$(6.28) \qquad \underline{X}(\sigma,f) \quad \subset \quad \underline{\underline{X}},$$

n'est pas simple et doit être étudiée en même temps qu'une éventuelle généralisation de la contrainte de survie (6.11). Elle réclame sans doute des hypothèses supplémentaires sur la correspondance Γ, par exemple,

$$(6.29) \qquad \Gamma(p) \;=\; \mathrm{Argmax}\ \{\ \sum_{k\in K} \mu_k w^k\ |\ \mu \in M\ \},$$

voire une modification de la définition (6.25a) de la fonction seuil ζ. Elle serait utile pour la vérification de la condition de s-viabilité (3.14).

§ 6.5 - CAS DE LA TAXATION DU CONSOMMATEUR

(A) L'utilisation d'une fonction de demande excédentaire (σ,f) de type indexé (alinéa 6.3.D) peut donner lieu à diverses variantes en ce qui concerne la formulation du comportement du consommateur soumis à un protocole de taxation t.

D'abord, la simple explicitation, en termes du multiplet de composants $(M,\ \Gamma,\ \zeta,\ \Phi,\ \omega)$, des contraintes d'équilibre du consommateur avec taxation (2.28), fournit - comme, dans le cas sans taxation, (2.11) fournit (6.23) - la première formulation :

(6.30) il existe $\mu \in \Gamma(p)$ tel que,

(a) $s \geq \zeta(\mu,\ t(p,x)) - t(p,x).\omega(\mu,\ t(p,x))$ et

(b) $x = \Phi(\mu,\ t(p,x),\ t(p,x).\omega(\mu,\ t(p,x)) + s) - \omega(\mu,\ t(p,x))$.

Mais, l'offre nominale $\omega(\mu,t(p,x))$, qui est valorisée dans ces relations aux prix avec taxe correspondant au vecteur $t(p,x)$, peut aussi l'être aux prix hors taxe correspondant au vecteur p, ce qui conduit à l'autre formulation,

(6.31) il existe $\mu \in \Gamma(p)$ tel que,

(a) $s \geq \zeta(\mu,\ t(p,x)) - p.\omega(\mu,\ t(p,x))$ et

(b) $x = \Phi(\mu,\ t(p,x),\ p.\omega(\mu,\ t(p,x)) + s) - \omega(\mu,\ t(p,x))$,

(B) Cela étant, il serait naturel d'étudier : (1) comment ces deux formulations diffèrent selon le protocole de taxation, en particulier selon les protocoles t' et t'' définis par (2.33) et (2.34) ; (2) à quels protocoles t on peut associer un protocole $t°$ tel que la formulation (6.31) pour le protocole t soit équivalente à la formulation (6.30) pour le protocole $t°$, ce qui ferait rentrer la formulation (6.31) dans le cadre - basé sur la considération de fonctions de demande excédentaire - de la contrainte d'équilibre (2.28).

Ces questions, qui se posent déjà dans le cas le plus simple des fonctions de la forme (6.12), mettent en cause la décomposition de la demande excédentaire en une différence "demande - offre" qui est à la base des constructions envisagées au § 6.3. Elles sont liées, au-delà de la condition de pure taxation (2.29), à la rigidité de la décomposition en cause, rigidité qui se traduit en général par l'éventualité que $\Phi_h(\mu,\ p,\ r)$ et $\omega_h(\mu,\ p)$ soient simultanément > 0 pour certains biens $h \in H$.

§ 6.6 - FONCTIONS DE DEMANDE A SURVIE ET FONCTIONS D'UTILITE

(A) Même si l'un des buts de ce texte est le traitement de l'équilibre général dans le cadre de modèles représentant les comportements de consommation par des fonctions de demande plutôt que par des relations de préférences ou des fonctions d'utilité (alinéas 1.1.A,C,D), le lien entre les deux représentations reste évidemment important. On l'envisage ici en reprenant le procédé standard de construction d'une fonction de demande excédentaire à partir d'un ensemble de consommation et d'une fonction d'utilité du consommateur. Par contre, la traduction de ce lien en termes de relations de préférences n'est pas envisagée.

(B) Dans la problématique de représentation du comportement d'un consommateur en termes d'une fonction d'utilité, la donnée de base est un couple (X,u), où X est un sous-ensemble de R^H, dit **ensemble de consommation**, et u une fonction numérique sur X, dite **fonction d'utilité**. On supposera toujours que cette donnée vérifie, eu égard à l'impératif de réalisme (alinéa 1.2.F), les conditions,

(6.32a) [**compacité**] l'ensemble de consommation X est compact,

(6.32b) [**continuité**] la fonction d'utilité u est continue.

Un tel couple (X,u) sera appelé **système (de consommation) à finalité**.

Au système à finalité (X,u) est **associée** la fonction de demande excédentaire à survie (σ,f) définie, compte tenue des conditions (6.32) et de la convention (2.4) concernant f, en posant,

$$(6.33a) \quad \sigma(p) = \text{Min}\ \{\ p.x \mid x \in X\ \} \quad (\ p \in R^H_{+*}),$$

$$(6.33b) \quad f(p,s) = \text{Argmax}\ \{\ u(x) \mid x \in X \ \text{ et } \ p.x \leq s\ \} \quad (p \in R^H_{+*},\ s \geq \sigma(p)).$$

On note que le seuil $\sigma(p)$ est défini par (6.33a) au plus juste pour assurer que, compte tenu de la condition (6.32a), l'ensemble des $x \in X$ tels que $p.x \leq s$, qui intervient au second membre de (6.33b), soit non vide pour tout $s \geq \sigma(p)$.

(C) La signification de cette définition en termes du comportement du consommateur qu'elle vise à représenter - via les interprétations (2.9) et (2.10) de (σ,f) et la définition correspondante (2.11) de l'équilibre du consommateur - peut être appréhendée en termes des interprétation - standard (6f) - suivantes du système à finalité (X,u) :

Int. (6.34) chaque élément x de l'ensemble X représente une demande excédentaire du consommateur [Interprétation (2.9)] considérée comme **possible** pour lui, en particulier compatible avec, permettant, sa **survie**.

Int. (6.35) la **finalité** du consommateur consiste en ce qu'il choisit sa demande excédentaire x, dans son ensemble de consommation X, de façon à maximiser l'utilité u(x) sous la **contrainte de budget** $p.x \leq s$ qui exprime que, aux prix p, le montant $p.x^+$ des achats du consommateur n'excède pas la somme du montant $p.x^-$ des ses ventes et du solde s des transferts vers lui.

La terminologie - standard (6f) - adoptée pour le couple (X,u) reflète ces interprétations. On souligne que les éléments x de X représentent des demandes excédentaires, i.e. des "demandes - offres", conformément à la convention précisée dans l'interprétation (2.9). En particulier, un éventuel vecteur w de dotations du consommateur peut être pris en compte via une spécification convenable de l'ensemble de consommation. On souligne aussi que, même si c'est ici la fonction d'utilité qui est supposée constituer la donnée primaire, rien n'empèche évidemment que cette fonction soit associée à une relation de préférences. Par ailleurs, la condition de compacité (6.32a) est à rapprocher de l'impératif de réalisme de la représentation (alinéas 1.2.F et 2.3.B).

(D) La proposition 6.6 ci-après relie, pour une fonction de demande excédentaire associée à un système à finalité, les diverses propriétés requise par le théorème 3.4 aux conditions suivantes relatives à un tel système :

(6.36) **[convexité]** l'ensemble de consommation X est convexe ;

(6.37) **[quasi-concavité]** la fonction d'utilité u est quasi-concave.

(6.38) **[p-exposition]** pour tout $p \in S_H$, l'ensemble des $x \in X$ tels que
$$p.x = \text{Min}\ \{\ p.x' \mid x' \in X\ \} \ \text{ est un singleton.}$$

PROPOSITION 6.6 - Soient (X,u) un système de consommation à finalité [vérifiant les conditions (6.32)] et (σ,f) la fonction de demande excédentaire associée. Alors :

(A) (σ,f) vérifie la condition de <u>continuité</u> (2.12), si (X,u) vérifie la condition de <u>convexité</u> (6.36) et la condition de <u>p-exposition</u> (6.38) ;

(B) (σ,f) vérifie la condition de <u>convexité</u> (2.13), si (X,u) vérifie la condition de <u>convexité</u> (6.36) et la condition de <u>quasi-concavité</u> (6.37) ;

(C) (σ,f) vérifie la <u>loi de Walras locale</u> (2.17).

§ 6.7 - DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6.6

(A) En vertu de l'homogénéité des fonctions σ et f, il suffit d'établir les propriétés en cause pour les restriction de ces fonctions à S_H et à $S_H \times R$ respectivement. C'est ce qu'on fait aux alinéas 6.7.B et 6.7.C ci-après.

(B) En ce qui concerne la propriété (A), La continuité de la fonction σ est un des aspects du théorème de maximum (A.17). Par ailleurs, le caractère h.c.s de la correspondance f résulte directement de celui de sa restriction f^* au sous-espace E de l'espace topologique $S_H \times R$ défini par,

(6.39) $\quad E = \{ (p,s) \in S_H \times R \mid s \geq \sigma(p) \},$

ce qui fait qu'on est ramené à établir que la correspondance f^* est h.c.s. Pour ce faire, on désigne d'abord par G et F les sous-espaces, respectivement ouvert et fermé, de E définis par,

(6.40a) $\quad G = \{ (p,s) \in S_H \times R \mid s > \sigma(p) \}$ et (6.40b) $\quad F = E \setminus G,$

ensuite par f° la restriction de la correspondance f (ou. f^*) à G et par g la correspondance de E dans R^H définie par,

(6.41) $\quad g(p,s) = \{ x \mid x \in X \text{ et } p.x \leq s \} \quad ((p,s) \in E),$

enfin par $f^\#$ la correspondance de E dans R^H qui coïncide avec f° sur G et avec g sur F. Cela étant, le caractère h.c.s de f^* va résulter de ce que, d'une part,

(6.42) $\quad f^\# = f^*,$ d'autre part,

(6.43) $\quad$ la correspondance $f^\#$ est h.c.s,

cette dernière propriété résultant des propriétés (6.44) et (6.45) ci-après,

(6.44) $\quad$ la correspondance f° de G dans R^H est h.c.s ;

(6.45a) $\quad$ la correspondance g de E dans R^H est h.c.s ;

(6.45b) $\quad$ pour tout $(p,s) \in E$, $f(p,s) \subset g(p,s)$.

D'abord, (6.42) résulte directement de la condition de p-exposition (6.38). Ensuite, d'une part (6.43) résulte de (6.44) et (6.45) d'après le Lemme de recollement (A.20), d'autre part (6.45a) résulte de ce que g est de graphe fermé et prend ses valeurs dans le compact X [critère (A.13)], tandis que (6.45b) est immédiat. Enfin, (6.44) résulte du théorème du maximum (A.17), puique, d'une part, par définition (6.41) de g, on a,

(6.46) $\quad f^\circ(p,s) = \text{Argmax} \{ u(x) \mid x \in g(p,s) \} \quad ((p,s) \in G),$ d'autre part,

(6.47) $\quad$ la correspondance g de G dans R^H est continue,

conformément à un des lemmes de base de la théorie de Arrow-Debreu ([6g]), lemme qui réclame, outre la condition de continuité (6.32b), la condition de convexité (6.36).

(C) La propriété (B) découlant immédiatement des définitions, il reste à établir la propriété (C). Pour cela, soient $p \in S_H$, $s \in R$ et $x \in R^H$ tels que,

(6.48a) $\quad s \geq \sigma(p)$ et (6.48b) $\quad x \in f(p,s).$

Il s'agit de montrer que, le triplet (p,s,x) vérifie les relations (2.17a) et (2.17b). D'abord, (2.17a) résulte des définitions (6.33), puisque (6.48b) entraîne, d'une part $x \in X$ d'après (6.33b), donc $p.x \geq \sigma(p)$ d'après (6.33a), d'autre part p.x ≤ s. Ensuite, (2.17b) résulte de ce que, g(p,s) étant toujours défini par (6.41) ci-dessus, on a, d'une part,

(6.49a) $\quad f(p,s) \;=\; \text{Argmax}\; \{\; u(x') \mid x' \in g(p,s) \;\}$, $\quad$ d'autre part,

(6.49b) $\quad f(p,p.x) \;=\; \text{Argmax}\; \{\; u(x') \mid x' \in g(p,p.x) \;\}$, $\quad$ enfin,

(6.49c) $\quad g(p,p.x) \;\subset\; g(p.s) \quad$ et $\quad x \in g(p,p.x)$,

puisque p.x ≤ s d'après (2.17a) déjà établi. Ce qui achève d'établir la propriété (C) et la proposition 6.6.

§ 6.8 - REMARQUES SUR LA PROPOSITION 6.6

(A) A propos de la loi de Walras locale (2.17), on souligne, d'une part qu'elle est obtenue - facilement (alinéa 6.7.C) - avec le minimum d'hypothèses (6.32) nécessaire pour définir la fonction de demande excédentaire (σ,f) via (6.33), d'autre part comment l'assertion (2.17b) de cette loi transforme en égalité, via l'occurrence de p.x comme argument de f, l'inégalité ≤ qui figure dans la contrainte de budget, au second membre de (6.33b).

Au-delà de cette dernière remarque, on peut dire que c'est la loi de Walras locale postulée ici qui permet, dans la démonstration de l'existence d'un équilibre (en particulier, à l'alinéa 4.7.B), de se passer d'une condition de type non satiation locale ([6h]) pour obtenir la loi de Walras en situation (3.8), elle même nécessaire à l'équilibre (proposition 3.3), mais il ne faut pas oublier à ce propos qu'on n'obtient ainsi qu'un équilibre avec transferts (alinéa 3.6.F),

(B) La proposition 6.6 entraîne - en conjuguant les propriétés (A), (B), (C) - que la fonction de demande excédentaire (σ,f) associée à un système à finalité (X,u) vérifie toutes les conditions requises d'une telle fonction par le théorème 3.4 dès que ce système vérifie les conditions (6.32) et (6.36) à (6.38).

Parmi ces conditions, la plus limitative est évidemment celle de p-exposition (6.38) sur X. Il s'agit d'une condition géométrique de courbure de la partie de la frontière de X qui se situe par rapport à X du coté de, fait face à, l'orthant négatif. En particulier, cette condition est satisfaite si tous les points de la frontière, ou au moins ceux situés de ce coté, sont exposés au sens de l'analyse convexe ([6i]), par exemple si X est une boule euclidienne. Par contre elle n'est évidemment pas satisfaite si X est de type polyédral (alinéa B.5.A), ce qui est contraire à l'impératif de réalisme (alinéa 1.2.F), vu l'importance pratique de tels ensembles ([6j]). La question se pose donc de dépasser la limitation qu'elle introduit (alinéa 6.9.D). On aborde cette question négativement par l'exemple de l'alinéa suivant.

(C) Voici un exemple de système à finalité (X,u), tel que X est de type polyédral convexe, mais pour lequel la fonction de demande excédentaire associée (σ,f) ne vérifie pas la condition de continuité (2.12). La nomenclature H étant quelconque, l'ensemble X est le polytope défini par,

(6.50a) $\quad X \;=\; \{\; x \in \mathbf{R}^H \mid \underline{x} \le x \le \underline{\underline{x}} \;\}$, $\quad$ avec $\quad$ (6.50b) $\quad \underline{x} \;\le\; \underline{\underline{x}}$,

$\underline{x}$ et $\underline{\underline{x}}$ étant donnés dans $\mathbf{R}^H$, tandis que la fonction d'utilité u est supposée strictement croissante sur X, par exemple,

(6.51) $\quad u(x) \;=\; \sum_{h \in H} x_h \quad (x \in X)$.

Dans ces conditions, définissant σ et f par (6.33), on a d'abord,

$$(6.52) \qquad \sigma(p) = p.\underline{x}, \quad \text{puis,}$$

$$(6.53a) \qquad f(p,\sigma(p)) = \{\underline{x}\} \quad \text{si} \quad p \in \mathbf{R}^H_{++},$$

$$(6.53b) \qquad f(e^h,\sigma(e^h)) = \{\underline{x}^h\} \quad (h \in H),$$

où, d'une part, $(e^h,\ h \in H)$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^H$, d'autre part, les vecteurs $\underline{x}^h$ $(h \in H)$ de $\mathbf{R}^H$ sont définis par,

$$(6.54) \qquad \underline{x}^h = \underline{x}_h e^h + \sum_{h' \in H \setminus \{h\}} \underline{\underline{x}}_{h'} e^{h'} \quad (h \in H).$$

Ainsi, par exemple, si $\underline{x}_h < \underline{\underline{x}}_h$, la fonction composée $p \longrightarrow f(p,\sigma(p))$ n'est pas continue au point $p = e^h$, ce qui entraîne, puisque la fonction σ est continue, que la correspondance f n'est pas h.c.s en $(p,s) = (e^h,\underline{x}_h)$.

On note que cet exemple peut être interprété, comme les fonctions de demande définies par (6.12) et (6.9), en termes d'un vecteur v de consommations de survie et d'un vecteur w de dotations : il suffit pour cela de définir $\underline{x}$ par,

$$(6.55) \qquad \underline{x} = v - w.$$

(D) Il est naturel de poser la question d'une réciproque de la Proposition 6.6 qui consisterait en une caractérisation des fonctions de demande excédentaires à survie qui sont associées à un système à finalité. On n'aborde ici cette question que par l'exemple de l'alinéa 6.8.E ci-après qui montre que la réponse n'est pas immédiate.

Au préalable, on note que, au-delà de l'analogie de langage, il faut se garder d'un rapprochement hatif entre cette question et le théorème de Debreu-Mantel-Sonnenschein relatif à la représentation d'une fonction de demande excédentaire usuelle comme fonction de demande excédentaire agrégée d'une économie d'échange [6k] : il s'agit ici de représenter la fonction de demande d'<u>un consommateur</u> et non celle, agrégée, d'une économie. Dans ce sens, un rapprochement serait préférable avec le résultat de Debreu concernant le comportement, non borné lorsque p tend vers le bord du simplexe, d'une fonction de demande - ici individuelle - associée à une relation de préférence monotone [61]. Mais, ce dernier rapprochement serait aussi sujet à caution car, comme le montre l'exemple suivant, le hic peut ne pas se situer au bord du simplexe, lorsque l'ensemble de consommation est compact.

(E) A la suite de l'alinéa précédent, voici un exemple simple de fonction de demande excédentaire à survie qui n'est pas associée à un système à finalité. Supposant donnés, d'une part, comme à l'alinéa (6.8.C), des vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{\underline{x}}$ de $\mathbf{R}^H$ vérifiant (6.50b), d'autre part un vecteur v de $\mathbf{R}^H$ tel que,

$$(6.56) \qquad v \in \mathbf{R}^H_{++}, \quad \text{on pose,}$$

$$(6.57a) \qquad \sigma(p) = p.\underline{x} \quad (p \in \mathbf{R}^H_{+*}), \qquad (6.57b) \qquad \delta(p) = p.\underline{\underline{x}} \quad (p \in \mathbf{R}^H_{+*}),$$

$$(6.57c) \qquad f(p,s) = \left\{ \underline{x} + \frac{\mathrm{Min}(s,\ \delta(p)) - \sigma(p)}{p.v}\, v \right\} \quad (p \in \mathbf{R}^H_{+*},\ s \geq \sigma(p)).$$

Le couple (σ,f) ainsi défini constitue une fonction de demande excédentaire à survie, univoque, en vertu de la proposition 2.3 appliquée à une fonction f° définie par (6.12) et (6.9), où v et w sont supposés vérifier (6.55). De plus, le domaine $X(\sigma,f)$ de cette fonction est borné (car compact), ce qui est nécessaire pour qu'elle puisse être associée à un système à finalité. Cela étant :

(6.58) la fonction (σ,f) définie par (6.57) ne peut être associée à un système de consommation à finalité (X,u) que si,

(a) les vecteurs v et $\underline{\underline{x}} - \underline{x}$ sont colinéaires.

En effet, supposant que la fonction (σ,f) est associée à un système à finalité (X,u), soit $x^\circ \in X$ un point de satiété de u dans X, i.e. tel que,

$$(6.59) \qquad u(x^\circ) = \mathrm{Max}\ \{\ u(x)\ |\ x \in X\ \}.$$

En prenant s suffisamment grand dans la relation $x^\circ \in f(p,s)$, on voit que,

$$(6.60) \qquad x^\circ - \underline{x} = \frac{p.(\underline{\underline{x}} - \underline{x})}{p.v}\, d, \quad \text{pour tout } p \in R^H_{+*}.$$

D'où on déduit, d'abord $p.x^\circ = p.\underline{\underline{x}}$ pour tout p, donc $x^\circ = \underline{\underline{x}}$, puis (6.58a). Ce qui établit l'assertion (6.58) ci-dessus. Ainsi, il suffit de choisir v et $\underline{\underline{x}} - \underline{x}$ non colinéaires pour que la fonction (σ,f) ne puisse pas être associée à un système à finalité. De plus, l'argument précédent établissant (6.58a) est valable si, au lieu de (6.33b), on suppose seulement que,

$$(6.61) \qquad f(p,s) = \mathrm{Argmax}\ \{\ u(x)\ |\ x \in X \text{ et } p.x \le s\ \}$$

$$\text{pour tous } p \in G \text{ et } s \in R,$$

où G est un sous ensemble de R^H_{+*} d'intérieur (dans R^H) non vide. Ce qui montre, ainsi qu'annoncé à la fin de l'alinéa 6.8.D ci-dessus, que le comportement de f au bord du simplexe n'est pas en cause.

§ 6.9 - <u>ELEMENTS DE SYNTHESE</u>

(A) En conclusion de ce chapitre, on envisage une généralisation du premier des deux procédés de construction de fonctions de demande excédentaire étudiés ci-dessus (§ 6.3 et 6.6), qui englobe aussi les cas particuliers du second pouvant se traduire par un système de relations de Kuhn et Tucker (§ B.4).

(B) Considérant, donc, d'abord le cas du premier procédé, i.e partant d'un multiplet d'indexation $(M, \Gamma, \zeta, \Phi, \omega)$, on lui associe le sous-ensemble F de l'espace produit $M \times R^H_{+*} \times R \times R^H$ défini par,

$$(6.62) \qquad (\mu,p,s,x) \in F, \text{ si et seulement si, } \quad (a) \quad p \in \Gamma(p),$$

$$(b) \quad s \ge \zeta(\mu,p) - p.\omega(\mu,p), \quad (c) \quad x = \Phi(\mu, p, p.\omega(\mu,p) + s) - \omega(\mu, p).$$

Ainsi, les relations (6.20) de définition de la fonction (σ,f) de type indexé sont équivalentes aux relations,

$$(6.63a) \qquad \sigma(p) = \mathrm{Min}\ \{\ s \in R\ |\ \exists\ \mu,\ \exists\ x,\ (\mu,p,s,x) \in F\ \} \quad (\ p \in R^H_{+*}),$$

$$(6.63b) \qquad f(p,s) = \{\ x \in R^H\ |\ \exists\ \mu,\ \exists\ x,\ (\mu,p,s,x) \in F\ \} \quad (p \in R^H_{+*},\ s \ge \sigma(p)).$$

(C) La généralisation visée réside alors dans la définition de la fonction (σ,f), par ces relation, à partir d'un sous-ensemble F de l'espace produit $M \times R^H_{+*} \times R \times R^H$ constituant ici la donnée primaire. Ce sous-ensemble peut aussi être considéré comme un **prédicat** $\underline{F}(\mu,p,s,x)$ sur cet espace, prédicat qui exprime le comportement du consommateur en termes du paramètre de variabilité μ. La démarche n'a évidement un intérêt que si ce prédicat est convenablement explicite en termes de contraintes qui expriment les divers aspects de ce comportement.

(D) Cela étant, un motif de cette généralisation réside en ce qu'elle peut aussi concerner le second procédé, en ce sens que la fonction (σ, f) associée à un système à finalité (X, u) peut être mise sous la forme (6.63) lorsque le système à finalité (X, u) est tel que la détermination de (σ, f) via (6.33) corresponde à la résolution d'un **problème de programmation convexe** à données régulières, ce qui fait que le prédicat $\underline{F}(\mu, p, s, x)$ est fourni - explicitement - par les relations de Kuhn et Tucker, l'espace M que décrit le paramètre μ étant alors un orthant positif convenable, donc n'étant plus compact.

Ce dernier point est essentiel, car il est lié au défaut de continuité de la fonction f discutée aux alinéas 6.8.B,C. Il amène à se demander s'il ne serait pas possible - lorsque le système à finalité (X, u) ne vérifie pas la condition de p-exposition (6.38), par exemple lorsque X est polyédral - d'approximer le prédicat de Kuhn et Tucker $\underline{F}$ correspondant par un prédicat comportant un espace de paramètres M <u>compact</u>, ce qui, si F est par ailleurs fermé, fournirait, via (6.63), une fonction (σ, f) vérifiant la condition de continuité voulue (2.12). Dans ce sens, le problème, apparemment, le plus difficile est de dégager des conditions suffisantes concernant F pour que la fonction (σ, f) définie par les relations (6.63) vérifie la loi de Walras locale (2.17). Ce problème est sans doute à rapprocher de ceux que pose la détermination du socle $\underline{X}(\sigma, f)$ d'une fonction de type indexé (alinéa 6.4.C). Dans ce sens, il serait naturel de l'aborder en s'appuyant sur l'approche des fonctions de demande macroéconomiques par agrégation de préférences individuelles [6m].

On complète ici les définitions relatives aux ensembles de production (§ 2.4) par des indication sur leurs procédés de construction axés sur la première caractéristique des modèles envisagés (alinéa 1.2.D). Dans ce sens, on envisage successivement, le procédé général basé sur l'analyse d'activités (§ 7.1 et 7.2), puis celui, plus spécifique, fournissant l'ensemble de production d'un agent d'import-export (§ 7.3), ce dernier procédé permettant la prise en compte de l'influence des échanges extérieurs sur l'équilibre intérieur, pour un ensemble concurrencé (§ 7.4). On illustre cette prise en compte en montrant que, conformément à la seconde caractéristique visée (alinéa 1.2.D), elle permet de faire apparaître comme un résultat mathématique la propriété de domination des prix intérieurs pour un ensemble à la fois concurrencé et ouvert (§ 7.5 à 7.8).

Les notations sont celles introduites au § 2.1. En particulier, on suppose donnée une <u>nomenclature de biens</u> H (alinéa 2.1.D).

§ 7.1 - <u>ANALYSE D'ACTIVITES</u> : <u>SCHEMA GENERAL</u>, <u>OPERATIONS</u>

(A) Partant de la donnée nominative constituée par une **nomenclature d'opérations (technologiques)** O [7a], le procédé de construction d'un ensemble de production Y basé sur l'analyse d'activités, relative à la nomenclature de biens H, consiste à définir Y par la formule générale,

(7.1) $\quad Y = A(Z)$,

où, d'une part $A \in \mathbf{R}^{H\times O}$ est une matrice réelle $H\times O$ donnée, la **matrice technologique**, d'autre part Z est un sous-ensemble donné de $\mathbf{R}_+^O$ figurant **l'organisation interne** du producteur. En explicitant la matrice A par ses coefficients, les **coefficients techniques**, i.e. en posant,

(7.2) $\quad A = (a_{h,o},\ h\in H, o\in O)$, la relation de définition (7.1) s'écrit,

(7.3) $\quad$ Y est l'ensemble des vecteurs $y = (y_h, h\in H)$ de $\mathbf{R}^H$ de la forme,

(a) $\quad y_h = \sum_{o\in O} a_{h,o} z_o \quad (h\in H)$, où,

(b) $\quad z = (z_o, o\in O)$ appartient à Z.

L'ensemble de production Y ainsi défini par les relations (7.3) est dit **engendré** par une **analyse d'activités** reposant sur la nomenclature d'opérations O et le couple (A,Z) de **données technologiques**, les relation (7.3a) et (7.3b) exprimant respectivement le principe de **conjugaison des opérations** et les **contraintes d'organisation interne** du producteur [7b].

(B) La terminologie introduite formellement ci-dessus est nourrie par les interprétations (7.4) à (7.6) ci-après qui situent, de façon générale, les composants O, A, Z de l'analyse d'activités par rapport à l'interprétation (2.20) de l'ensemble Y [7c].

Int. (7.4) (a) Une **opération (technologique)** est définie, considérée, comme un agrégat de **processus techniques** qui concourent à la circulation - production ou consommation - des divers biens (alinéa 2.1.C) ; (b) à chaque opération est associée une grandeur mesurable, son **niveau** (toujours ≥ 0), via la spécification d'un **niveau unité** (7d).

Int. (7.5) Le niveau unité d'une opération est défini, en extension, par ses **coefficients techniques** a_h ($h \in H$), cela en convenant que, d'une part (a) le nombre a_h mesure la quantité du bien $h \in H$, produite si a_h est ≥ 0, consommée si a_h est ≤ 0, par l'opération à son niveau unité, d'autre part (b) lorsque l'opération est au niveau $z_* \geq 0$, sa production algébrique du bien $h \in H$ est mesurée par le nombre $a_h z_*$ (production si $a_h z_* \geq 0$, consommation si $a_h z_* \leq 0$).

Int. (7.6) (a) le multiplet $z = (z_o, o \in O)$ des niveaux des diverses opérations $o \in O$ représente un **plan d'opérations** du producteur pendant la période de référence (alinéa 2.1.C), ce plan étant soumis aux contraintes d'organisation interne (7.3b), qui expriment, soit (1) des impératifs de fonctionnement, soit (2) le potentiel et les limitations des équipements en place ; (b) l'expression (7.3a) du vecteur d'échanges y du producteur traduit, via la sommation et les conventions de signe (7.5a), la conservation des biens (alinéa 2.1.D), lors de la conjugaison des diverses opérations.

(C) Ces interprétations font apparaître le caractère **purement physique**, indépendant des circulations symboliques (alinéa 2.1.C), du procédé de construction en cause : ce caractère est un élément essentiel de la représentation **intrinsèque** du système productif que stipule la première caractéristique des modèles visés (alinéa 1.2.D) (7e).

Dans un modèle de la classe en cause ici, la nomenclature d'opérations O et la matrice technologique A peuvent être communes aux divers producteurs $j \in J^{\#}$, lesquels, par contre, diffèrent par leurs organisations internes Z^j.

(D) A cause du caractère linéaire de l'application de R^H dans lui-même associée à la matrice A, pour que l'ensemble de production Y engendré par le couple (A,Z) vérifie la condition de compacité (2.22) [resp. de convexité (2.23)], il suffit que Z soit un sous-ensemble compact [resp. convexe] de R^O, mais ce n'est pas nécessaire [alinéa 7.2.D, point (3)]. De plus, si Z est de type polyédral et si le protocole de taxation u vérifie la condition de convexité (2.43) (resp. si u est nul), la contrainte de maximisation du profit (2.40) signifie que y est solution d'un problème de programmation convexe (resp. linéaire) (7f).

§ 7.2 - ANALYSE D'ACTIVITES : SPECIFICATIONS

(A) Le schéma général donné au § 7.1 va être particularisé en l'appliquant à des nomenclatures d'opérations définies à partir d'une nomenclature d'activités supposée constituer la donnée de base. Pour cela, on commence par inscrire le concept d'activité dans la problématique en cause ici :

Int. (7.7) Une **activité** est une opération (technologique) [Int. (7.4)] complexe concernant des processus techniques qui constituent une **unité de production** jouissant d'une certaine autonomie, unité identifiable, d'une part (a) par sa **finalité technique**, consistant essentiellement à produire certains biens spécifiés via des opérations de **fonctionnement**, d'autre part (b) par les **équipements** et le **savoir faire** qu'elle requiert, lesquels donnent lieu à des opérations spécifiques d'**entretien**, de **construction**, de **transformation** ou de **démantèlement**.

D'après les assertions (7.7a) et (7.7b), une activité peut être décomposée en plusieurs opérations (opérations de fonctionnement, d'entretien, de construction, etc.) qui sont quantifiées conformément aux interprétations (7.4a) et (7.5), l'activité elle-même n'étant pas, en général, quantifiée ([7g]).

Cela étant, supposant donnée, dans la suite de ce § 7.2, une **nomenclature d'activités** L ([7a]), on va définir, à partir de cette nomenclature, des nomenclatures d'opérations et des données technologiques engendrant des ensembles de production de complexité croissante.

(B) Le premier exemple correspond à l'ensemble de production de l'unique producteur représentant le système productif dans le <u>modèle de Scarf</u> (alinéa 1.1.B et § 8.1 à 8.4) ([7h]). La nomenclature d'opérations est alors identifiée à celle d'activités, i.e.,

(7.8) $O = L$, et on pose,

(7.9) $Z = R_+^L$,

les coefficients techniques $a_{h,l}$ ($h \in H$, $l \in L$), coefficients de la matrice technologique A, étant interprétés comme les coefficients de **fonctionnement** du processus de production, ainsi qu'il est usuel en programmation linéaire ([7g]).

L'ensemble de production Y ainsi défini n'est pas conforme à l'<u>impératif de réalisme</u> (alinéa 1.2.F), au moins pour deux raisons dépendantes. D'abord, formellement, puique cet ensemble n'est compact que si la matrice technologique A est réduite à zéro. Ensuite, plus précisément, parce qu'il ne prend pas en compte les équipements dont dispose le producteur [interprétation (7.7b)], donc les limitations du potentiel productif et les consommations, par exemple d'entretien, correspondantes.

Cette seconde lacune ne signifie pas que <u>toutes</u> les limitations dues aux équipements sont ignorées, mais seulement que sont ignorées celles concernant les équipements dont dispose le producteur. En effet, dans le modèle de Scarf, les limitations dues aux équipements sont prises en compte indirectement, via la consommation par le producteur de biens d'usage d'équipements [mis pour cela dans la nomenclature de biens ; alinéa 7.2.D, point (2)], lesquels lui sont fournis par les consommateurs, qui en disposent en dotations. Autrement dit, tous les équipements sont supposés être possédés par les consommateurs qui les louent (en vendent les biens d'usage) au producteur. Le manque de réalisme de cette hypothèse apparaît aussi en termes du circuit économique, puisqu'elle entraîne que le profit du producteur est nul à l'équilibre. Les exemples suivant montrent comment la dépasser.

(C) Afin de prendre en compte, au-delà de l'exemple du modèle de Scarf (alinéa 7.2.B), les équipements dont dispose le producteur et les consommations d'entretien correspondantes, on peut procéder comme suit.

On définit d'abord la nomenclature d'opérations O comme réunion de deux sous-nomenclatures disjointes L' et L", i.e. on pose,

(7.10a) $O = L' \cup L''$, avec (7.10b) $L' \cap L'' = \emptyset$, où,

(7.10c) L' et L" sont respectivement les images, dans O, de L et d'un sous-ensemble donné non vide L° de L par des injections $l \longrightarrow l'$ et $l \longrightarrow l''$.

La donnée de la matrice technologique $A \in R^{H\times O}$ est alors équivalente à celle de deux matrices, $A' \in R^{H\times L}$ et $A'' \in R^{H\times L^\circ}$, avec

(7.11) $\quad A' = (a'_{h,l},\ h\in H, l\in L) \quad$ et $\quad A'' = (a''_{h,l},\ h\in H, l\in L^\circ)$,

cela via la relation entre les coefficients techniques correspondants,

(7.12) $\quad a_{h,l'} = a'_{h,l} \quad (h\in H, l\in L) \quad$ et $\quad a_{h,l''} = a''_{h,l} \quad (h\in H, l\in L^\circ)$.

On définit ensuite l'ensemble d'organisation interne $Z \subset R^O$, qui est identifié, en vertu de (7.10), à un sous-ensemble de $R^L_+ \times R^{L^\circ}_+$, par,

(7.13) $\quad$ Z est l'ensemble des couples $(z',z'') \in R^L_+ \times R^{L^\circ}_+$ tels que,

(a) $\quad z'_l \leq z''_l \quad$ pour tout $l\in L^\circ \quad$ et

(b) $\quad z''_l = \underline{z}''_l \quad$ pour tout $l\in L_*$,

où L_* est un sous ensemble donné de L° et $\underline{z}$ un vecteur donné de $R^{L_*}_+$.

Ainsi, l'ensemble de production Y fourni par la relation générale (7.3) est ici défini par,

(7.14) $\quad$ Y est l'ensemble des vecteurs $y = (y_h, h\in H)$ de R^H de la forme,

(a) $\quad y_h = \sum_{l\in L} a'_{h,l} z'_l + \sum_{l\in L^\circ} a''_{h,l} z''_l \quad (h\in H)$, $\quad$ où,

(b) $\quad$ les couples $(z',z'') \in R^L_+ \times R^{L^\circ}_+$ vérifient (7.13a) et (7.13b).

(D) Les termes ainsi introduits formellement donnent lieu aux interprétations suivantes :

Int. (7.15) (a) Pour chaque activité $l\in L$, l'élément l' de L' représente l'opération de <u>fonctionnement</u> associée à l'activité l et la variable z'_l (i.e $z_{l'}$) le niveau de cette opération, i.e. le niveau de fonctionnement de l'activité ; (b) les éléments de l'ensemble L° correspondent aux activités $l\in L$ comportant des équipements spécifiques, l'élément l'' de L'', pour $l\in L^\circ$, représentant l'opération d'<u>entretien</u> de ces équipements ; (c) pour chaque activité $l\in L^\circ$, la grandeur niveau de l'opération l'' est définie de telle sorte que la variable de niveau z''_l correspondante représente, conformément à (7.13a), le niveau maximum de fonctionnement z'_l compatible avec les équipements, niveau qui est fixé par $\underline{z}''_l$, si $l\in L_*$; (d) Pour chaque activité $l\in L$, les nombres $a'_{h,l}$ et $a''_{h,l}$ $(h\in H)$ constituent respectivement les coefficients techniques de fonctionnement et, si $l\in L^\circ$, d'entretien des équipements, de l'activité $l\in L$, ces derniers étant en général ≤ 0.

On souligne les propriétés suivantes : (1) si $L^\circ \neq L$, les activité $l\in L\backslash L^\circ$ ne comportent pas d'équipements spécifiques ; les équipements nécessaires au fonctionnement de ces activités leur sont fournis, via des biens d'usage d'équipements, par des activités spécifiques, les parcs d'équipements polyvalents [7i] ; (2) les activités $l\in L^\circ\backslash L_*$ ont un niveau d'équipement z''_l variable ; cette variabilité, à priori insolite pour un modèle statique (alinéa 2.1.C), est importante pour les études de prospective à long terme axées sur le potentiel d'activités nouvelles [7j] ; (3) l'ensemble d'organisation interne Z défini par (7.13), n'est compact que si $L_* = L^\circ = L$, mais l'ensemble de production Y correspondant peut être compact sans qu'il en soit ainsi ; une situation importante de ce type est celle où la matrice A' des coefficients techniques de fonctionnement est telle que les activités $l\in L_*$, dont les niveaux d'équipement $z''_l = \underline{z}_l$ sont fixés, fournissent des ressources indispensables à la production, i.e. que consomment toutes les autres activité ([7k]) ; (4) par contre, l'ensemble Z défini par (7.13) est toujours convexe ; (5) de plus, cet ensemble est de type polyédral ([7f]).

(E) De nombreuses variantes du schéma précédent sont possibles. On indique rapidement ci-après comment prendre en compte les opérations de transformation des équipements et les effets d'échelle.

Pour prendre en compte les <u>transformations des équipements</u> de certaines activités, on peut introduire une nomenclature (d'opérations) de transformations Q, sous-ensemble du produit cartésien $L° \times L°$ constitué des couples $q = (l_1, l_2)$ pour lesquels la transformation de l'activité l_1 en l'activié l_2 est techniquement possible, la construction [resp. le démantèlement] des équipements de l'activité l étant alors, par exemple, représenté[e] par le couple (l_0, l) [resp. (l, l_0)], où l_0 est une activité fictive "vide" ou "néant". La relation (7.14a) de définition de l'ensemble de production Y devient ainsi,

$$(7.16) \qquad y_h = \sum_{l \in L} a'_{h,l} z'_l + \sum_{l \in L°} a''_{h,l} z''_l + \sum_{q \in Q} b_{h,q} \hat{z}_q \qquad (h \in H),$$

où, pour chaque $q \in Q$, les coefficiens techniques $b_{h,q}$ $(h \in H)$ de la transformation q sont donnés et son niveau $\hat{z}_q$ est variable ([7i]).

Pour prendre en compte les <u>effets d'échelle</u> relatifs à une activité $l \in L°$, on peut adjoindre, aux contraintes (7.13a,b) qui définissent l'ensemble d'organisation interne Z, la **contrainte à seuil**,

$$(7.17) \qquad z'_l \geq \underline{\underline{z}}'_l \quad \text{ou} \quad z'_l = 0,$$

qui exprime que, les coefficients techniques $a'_{h,l}$ et $a''_{h,l}$ $(h \in H)$ de l'activité l ne sont valables que lorsque son niveau de fonctionnement excède le seuil $\underline{\underline{z}}'_l > 0$ donné. L'adjonction de telles contraintes à seuil aux contraintes (7.13a,b) entraîne que l'ensemble Z n'est plus convexe, donc aussi, en général, l'ensemble de production Y correspondant ([7l]).

§ 7.3 - <u>PRODUCTEURS D'IMPORT-EXPORT</u>

(A) Dans ce paragraphe et les suivants (§ 7.4 à 7.8), on s'intéresse à la prise en compte de l'influence des échanges extérieurs sur l'équilibre intérieur, pour un ensemble économique limité, essentiellement de type national, dont certains agents sont en relation avec l'extérieur et, donc, exposés à la concurrence étrangère, le cadre formel étant celui d'un modèle d'équilibre général (de la classe envisagée dans ce texte) représentant seulement cet ensemble et non celui d'un modèle du commerce mondial ([7m]).

La difficulté de la modélisation des échanges extérieurs ([7n]), difficulté liée à la disparité de représentation entre l'intérieur et l'extérieur, se traduit, dans le cadre en cause ici qui est celui d'un modèle statique sans traitement de la monnaie (alinéa 1.2.G), par la nécessité d'une représentation agrégée des comportements d'échanges extérieur, vu l'impossibilité, dans ce cadre, d'une représentation détaillée de ces comportements pour tous les agents intérieurs.

Afin d'introduire une telle représentation agrégée, on va s'appuyer sur les hypothèses (7.18) ci-après concernant les échanges extérieurs - importations et exportations - de l'ensemble économique que représente le modèle :

Hyp. (7.18) (a) l'ensemble économique considéré est <u>concurrencé</u> en ce sens que les agents intérieurs en relation avec l'extérieur sont soumis à une forte concurrence étrangère qui fait que les prix à l'extérieur - prix des importations et prix des exportations - sont pour ces agents quasiement <u>fixés</u> ([7o]) ; (b) l'extérieur, de l'ensemble économique considéré, peut comporter plusieurs marchés distincts et indépendants, dont chacun est caractérisé par les prix et les limitations physiques relatifs aux échanges correspondants ; (c) la monnaie intérieure (alinéa 2.1.E) est sans rapport avec la ou les monnaie(s) sur le ou les marché(s) extérieur(s) ([7p]).

(B) A chaque marché extérieur [Hyp. (7.18b)] va être associé un (agent) producteur du modèle, dit d'**import-export**, qui va assumer les échanges de l'ensemble considéré avec ce marché, les conditions de ces échanges étant représentées par l'ensemble de production de ce producteur. Supposant fixé dans la suite l'un de ces marchés noté m°, on désigne par Y° l'ensemble de production, du producteur associé, qu'il s'agit de définir.

Le marché extérieur m° est spécifié, d'une part par la **donnée nominative** constituée par la sous-nomenclature de H° de H formée de biens $h \epsilon H$ susceptibles d'être échangés sur ce marché, d'autre part par la **donnée commerciale** constituée de multiplets $\mathbf{p}^{\circ}$ et $\mathbf{z}^{\circ}$, de paramètres réels, de la forme,

(7.19a) $\quad \mathbf{p}^{\circ} \;=\; ((p_h^{\downarrow}, h \epsilon H^{\circ}),\ (p_h^{\uparrow}, h \epsilon H^{\circ})),$

(7.19b) $\quad \mathbf{z}^{\circ} \;=\; ((\underline{z}_h^{\downarrow}, h \epsilon H^{\circ}),\ (\underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}, h \epsilon H^{\circ}),\ (\underline{z}_h^{\uparrow}, h \epsilon H^{\circ}),\ (\underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}, h \epsilon H^{\circ})),$

et d'un paramètre réel s°, qui sont supposés tels que,

(7.20a) $\quad 0 \le p_h^{\uparrow}$ et (7.20b) $\quad p_h^{\uparrow} \le p_h^{\downarrow}$ pour tout $h \epsilon H^{\circ}$,

(7.21a) $\quad 0 \le \underline{z}_h^{\downarrow}$ et (7.21b) $\quad \underline{z}_h^{\downarrow} \le \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}$ pour tout $h \epsilon H^{\circ}$,

(7.22a) $\quad 0 \le \underline{z}_h^{\uparrow}$ et (7.22b) $\quad \underline{z}_h^{\uparrow} \le \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$ pour tout $h \epsilon H^{\circ}$.

(7.23) $$\sum_{h \epsilon H^{\circ}} p_h^{\uparrow} \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow} \;-\; \sum_{h \epsilon H^{\circ}} p_h^{\downarrow} \underline{z}_h^{\downarrow} \;\ge\; s^{\circ},$$

Par ailleurs, les conditions techniques des échanges sont spécifiées par la **donnée technologique** B°, avec,

(7.24a) $\quad B^{\circ} \;=\; (B^{\downarrow}, B^{\uparrow}),$

où $B^{\downarrow}$ et $B^{\uparrow}$ sont des matrices de **coefficients techniques**, supposés tous ≥ 0,

(7.24) (b) $\; B^{\downarrow} = (b_{h,k}^{\downarrow},\ h \epsilon H, k \epsilon H^{\circ}) \;\epsilon\; \mathbf{R}_+^{H \times H^{\circ}}$, (c) $\; B^{\uparrow} = (b_{h,k}^{\uparrow},\ h \epsilon H, k \epsilon H^{\circ}) \;\epsilon\; \mathbf{R}_+^{H \times H^{\circ}}$.

Cela étant, au multiplet de **données d'import-export** $(H^{\circ}, \mathbf{p}^{\circ}, \mathbf{z}^{\circ}, s^{\circ}, B^{\circ})$ ainsi introduit par les relations (7.19) à (7.24), est associé l'ensemble de production Y°, noté $\underline{Y}^{\circ}(H^{\circ}, \mathbf{p}^{\circ}, \mathbf{z}^{\circ}, s^{\circ}, B^{\circ})$, du producteur d'import-export en cause, par,

(7.25) Y° est l'ensemble des vecteurs $y = (y_h, h \epsilon H)$ de $\mathbf{R}^H$ de la forme,

(a) $$y_h \;=\; z_h^{\downarrow} \;-\; z_h^{\uparrow} \;-\; \sum_{k \epsilon H^{\circ}} b_{h,k}^{\downarrow} z_k^{\downarrow} \;-\; \sum_{k \epsilon H^{\circ}} b_{h,k}^{\uparrow} z_k^{\uparrow} \quad (h \epsilon H), \text{ où,}$$

(b) $(z_h^{\downarrow}, h \epsilon H)$ et $(z_h^{\uparrow}, h \epsilon H)$ sont des vecteurs de $\mathbf{R}_+^H$ tels que,

(c) $z_h^{\downarrow} \;=\; 0$ et $z_h^{\uparrow} \;=\; 0$ pour tout $h \epsilon H \backslash H^{\circ}$,

(d) $$\sum_{h \epsilon H^{\circ}} p_h^{\uparrow} z_h^{\uparrow} \;-\; \sum_{h \epsilon H^{\circ}} p_h^{\downarrow} z_h^{\downarrow} \;\ge\; s^{\circ},$$

(e) $\underline{z}_h^{\downarrow} \le z_h^{\downarrow} \le \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}$ pour tout $h \in H^o$,

(f) $\underline{z}_h^{\uparrow} \le z_h^{\uparrow} \le \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$ pour tout $h \in H^o$.

Dans ces conditions, il est immédiat que, toujours sous les conditions (7.19) à (7.23) relatives au jeu de donnée d'import-export (H^o, p^o, z^o, B^o),

(7.26) l'ensemble Y^o défini par les relations (7.25) est non vide et vérifie les conditions de compacité (2.22) et de convexité (2.23).

La non vacuité résulte de la condition (7.23) et des encadrements (7.25e,f), la compacité de ces derniers et de (7.25c), la convexité du caractère linéaire de (7.25a,d).

(C) Les définitions formelles ci-dessus appellent les interprétations (7.27) à (7.29) ci-après qui précisent l'hypothèse (7.18).

Int. (7.27) (a) Le vecteur d'échanges courant $y = (y_h, h \in H)$ de l'ensemble de production Y^o est fonction, via son expression (7.25a), des variables ≥ 0 auxiliaires $z_h^{\downarrow}$ et $z_h^{\uparrow}$ $(h \in H^o)$, la variable $z_h^{\downarrow}$ (resp. $z_h^{\uparrow}$) représentant la quantité du bien $h \in H^o$ importée (resp. exportée), donc une fourniture (resp. une consommation) par le producteur en question ; (b) les contraintes d'encadrement (7.25e,f) expriment les diverses limitations physiques auxquelles sont soumises ces variables, limitations qui peuvent avoir des origines diverses ; (c) les bornes sup. $\underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}$ peuvent représenter, soit des quotas d'importation, soit des limitations de l'offre sur le marché extérieur m^o, tandis que (d) les bornes sup. $\underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$ $(h \in H^o)$ peuvent aussi représenter des limitations de la demande sur ce marché ; (e) les bornes inf. $\underline{z}_h^{\downarrow}$ et $\underline{z}_h^{\uparrow}$ $(h \in H^o)$ strictement positives peuvent représenter, soit des engagements pris antérieurement à la période de référence, soit des préférences exogènes, par exemple, en ce qui concerne les $\underline{z}_h^{\downarrow}$, préférences pour les produits importés dans le cas de biens $h \in H^o$ agrégeant produits importés et produits locaux ([7q]).

Int. (7.28) Pour chaque bien échangeable $h \in H^o$: (a) le nombre $p_h^{\downarrow}$ (resp. $p_h^{\uparrow}$) représente le **prix à l'importation** (resp. **à l'exportation**) sur le marché extérieur m^o, prix fixés, conformément à l'hypothèse (7.18a) ; (b) la condition (7.20b) signifie que la réexportation d'un bien importé n'est pas avantageuse ; (c) l'inégalité (7.25d) est une contrainte de budget exprimant que le montant des exportantions excède celui des importation majoré du montant fixé s^o, lequel représente un avoir s'il est < 0 et un dû s'il est > 0, reliquat de la période précédente ou engagement pour la suivante.

Int. (7.29) Aux consommations des biens $h \in H^o$ par lesquelle se traduisent les exportations [terme $- z_h^{\uparrow}$ au second membre de (7.25a)] viennent s'ajouter les consommations de ces biens (essentiellement de services) requises par les importations et les exportations des divers biens $h^o \in H^o$, consommations qui sont déterminées au prorata des quantités, $z_k^{\downarrow}$ et $z_k^{\uparrow}$, de ces dernières et des coefficients techniques $b_{h,k}^{\downarrow}$ et $b_{h,k}^{\uparrow}$ $(k \in H^o)$.

(D) On souligne le caractère <u>intrinsèque</u> de ce traitement, en ce sens que, d'une part les circulations physiques correspondant aux échanges extérieurs sont traités au même niveau de détail que les circulations intérieures, d'autre part, les données physiques sont clairement distinguées de celles relatives aux prix extérieurs et sont directement interprétables (alinéa 7.3.C), ces données ne concernant pas les comportements d'échanges dans leur complexité, lesquels sont pris en compte par l'ensemble des mécanismes standards qui président à l'équilibre général dans le cadre du modèle (§ 7.4), plutôt que, comme dans les modèles macroéconomiques empiriques (alinéa 1.2.E), de façon empirique, économétrique, via les données spéciales, de type comportemental, que sont les fonctions d'importation et les fonctions d'exportation ([7r]). Ainsi, ce traitement se rapproche de la première caractéristique voulue pour les modèles en cause, caractéristique que réclament les études de transformations profondes (alinéas 1.2.A,B,D) ([7s]).

(E) Toutefois, ce caractère intrinsèque est accompagné de limitations du traitement qui tiennent à son caractère agrégé, plus précisément à l'absence de représentation, d'une part des comportements d'échanges extérieurs des divers agents intérieurs, d'autre part de l'organisation du ou des marchés extérieurs. Ces limitations semblent difficiles à dépasser sans l'introduction d'un traitement de la monnaie, lequel réclame pratiquement de sortir du cadre statique des modèles en cause (alinéa 1.2.G). Elles font que ce traitement agrégé des échanges extérieurs doit être situé par rapport à la visée de prospective heuristique qui motive les modèles en cause dans ce texte (alinéa 1.2.A-C) ([7t]).

§ 7.4 - MODELES AVEC IMPORT-EXPORT

(A) L'introduction de producteurs d'import-export, dans un modèle axé sur la recherche d'une politique optimale par rapport à une finalité collective (alinéas 5.3.A,B), fournit un cadre formel permettant d'inclure, parmi les paramètres de politique économique à optimiser, ceux - quotas et droits de douane - concernant les échanges extérieurs. On définit ci-après ce cadre formel et on reprend les perspectives du type précédent qu'il offre.

(B) Un modèle comportant un (seul) producteur d'import-export, ou **modèle avec import-export (simple)**, est défini en adjoignant, aux données standard constituées par l'appareil nominatif (H, I, J, J^e) et le jeu de données $\mathbf{d}$ du modèle (alinéas 3.1.A,B), un élément $j°$ de J, représentant ce producteur, et un multiplet de données d'import-export $(H°,\mathbf{p}°,\mathbf{z}°,B°)$ relatif à H (alinéa 7.3.B), le définissant, de telle sorte que,

$$(7.30) \qquad Y^{j°} = \underline{Y}°(H°,\mathbf{p}°,\mathbf{z}°,s°,B°).$$

On désigne alors par J_* le complémentaire de $\{j°\}$ dans J,

$$(7.31) \qquad J_* = J\setminus\{j°\}.$$

Ainsi, un tel modèle est défini par son **jeu de données avec import-export simple** constitué du multiplet $\mathbf{D}°$ ci-après dont les composants (H, I, J, J^e), $\mathbf{d}$, $j°$, $(H°, \mathbf{p}°, \mathbf{z}°, s°, B°)$, qui viennent d'être introduits, vérifient la relation (7.30) [ainsi que les relations (7.19) à (7.24)],

$$(7.32) \qquad \mathbf{D}° = (H, I, J, J^e, \mathbf{d}, j°, H°, \mathbf{p}°, \mathbf{z}°, s°, B°).$$

Un équilibre de ce modèle, ou **équilibre avec import-export simple**, relatif au jeu de données avec import-export simple $\mathbf{D}°$, est un multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b}, z^{\downarrow}, z^{\uparrow})$ tel que le sous-multiplet $(\mathbf{x}, y, y^e, p, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ est un équilibre (standard) relatif au jeu de donnée $\mathbf{d}$, tandis que $z^{\downarrow} = (z_h^{\downarrow}, h\in H°)$ et $z^{\uparrow} = (z_h^{\uparrow}, h\in H°)$ sont des vecteurs de $\mathbf{R}_+^{H°}$ liés à la composante $y^{j°}$ de l'équilibre par les relations (7.25a), avec $y^{j°}$ mis pour y et l'extension (7.25c). L'existence d'un tel équilibre, i.e. la **consistance** du jeu $\mathbf{D}°$, équivaut à celle du jeu $\mathbf{d}$.

On étend ces définitions au cas de modèles d'import-export comportant plusieurs producteurs d'import-export en introduisant une sous-nomenclature J° de J, dont les éléments représentent les producteurs d'import-export, et des multiplets $(H^j, p^j, z^j, s^j, B^j)$ de données d'import définissant ces producteurs $j \in J^\circ$.

(C) Dans un modèle avec import-export, par ex. simple, les quotas sont représentés par les composantes de $\mathbf{z}^\circ$ constituées des bornes sup. $\underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}$ et $\underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$ $(h \in H^\circ)$ [Interprétations (7.27c,d)], tandis que les droits de douane le sont par le protocole de taxation u^{j° du producteur d'import-export j° (alinéa 3.5.E).

On souligne la distinction, dans ce modèle, entre les <u>prix extérieurs</u> $p_h^{\downarrow}$ et $p_h^{\uparrow}$ $(h \in H^\circ)$, qui sont des données et les <u>prix intérieurs</u> p_h des biens échangeables qui sont des variables du modèle. Cette distinction va jouer un rôle important dans les déterminations de prix adaptés (alinéa 7.4.D).

(D) Les prix intérieurs, déterminés comme prix d'équilibre correspondant à une politique optimale dans le cadre d'un modèle avec import-export (alinéa 7.4.B), peuvent être considérés comme **adaptés** à la finalité collective en cause (alinéas 5.3.B et 5.3.H)), compte tenu du caractère concurrencé de l'ensemble considéré. En particulier, la comparaison de ces prix aux prix extérieurs fournit une mesure du défaut d'adaptation de ces derniers à cette finalité ([7u]). Sans aborder ici l'étude de cette démarche dans sa généralité ([7v]), on envisage seulement ci-après le cas limite où elle est sans objet, en montrant comment une ouverture totale entraîne que les prix intérieurs sont calés sur les prix extérieurs (§ 7.5 à 7.8).

§ 7.5 - <u>DOMINATION DES PRIX INTERIEURS EN ECONOMIE OUVERTE</u> : <u>PRELIMINAIRES</u>

(A) Comme application du traitement des échanges extérieurs dans le cadre d'un modèle avec import-export simple (alinéa 7.4.B) et comme préliminaire à l'étude de prix adaptés (alinéa 7.4.D), on va montrer, dans les § 7.5 à 7.8, que ce traitement permet de faire apparaître comme un résultat mathématique la propriété de domination des prix intérieurs, i.e. de calage de ces prix sur les prix extérieurs, pour un ensemble économique à la fois concurrencé et ouvert ([7o]).

Considérant un jeu de données avec import-export simple $\mathbf{D}^\circ$, jeu de la forme (7.32), on commence par introduire, dans ce § 7.5, les conditions requises par le résultat annoncé (théorème 7.6, alinéa 7.6.B), en distinguant parmi elles deux groupes (alinéas 7.5.B,C et 7.5.D,E), qui, tout en correspondant à la logique de l'énoncé, donnent lieu, pour l'essentiel, à des interprétations spécifiques, respectivement en termes d'ouverture douanière et d'ouverture comportementale, i.e. de propension aux importations ([7w]). On s'intéresse d'abord ici à ces interprétations. La consistance de jeux de données avec import-export vérifiant ces conditions fait l'objet du § 7.8.

(B) Les **conditions d'ouverture douanière** concernent les données commerciales et la taxation des échanges extérieurs. Elles s'écrivent :

$$(7.33) \qquad \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow} - \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow} > \sum_{j \in J_*} y_h^j + y_h^e - \sum_{i \in I} x_h^i \quad \text{pour tout } h \in H^\circ,$$

pour tout $\mathbf{x} = (x^i, i \in I) \in \mathbf{R}^{H \times I}$ tel que $x^i \in X(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i \in I$,
pour tout $\mathbf{y} = (y^j, j \in J_*) \in \mathbf{R}^{H \times J_*}$ tel que $y^j \in Y^j$ pour tout $j \in J_*$,
pour tout $y^e \in Y^e$;

(7.34) $\sum_{k\in H^\circ} p_k^{\uparrow}\underline{\underline{z}}_k^{\uparrow} - p_h^{\downarrow}\underline{\underline{z}}_h^{\downarrow} < s^\circ$ pour tout $h\in H^\circ$;

(7.35) $\underline{z}_h^{\uparrow} < \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$ pour tout $h\in H^\circ$;

(7.36) $u^{j^\circ} = 0$.

(C) Les conditions (7.33), (7.34) et (7.36) expriment que les échanges extérieurs ne sont soumis, ni à quotas, ni à droits de douane, ainsi que l'explicitent les interprétations (7.37) et (7.38) ci-après :

Int. (7.37) (a) la condition (7.33) exprime que les bornes sup. $\underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$ des quantités exportées $z_h^{\uparrow}$ des biens échangeables $h\in H^\circ$ [contrainte (7.25f)] excèdent, aux importations minima $\underline{z}_h^{\downarrow}$ prés, le potentiel de fourniture interne représenté par le maximum du second membre, autrement dit que les exportations des biens échangeables ne sont limitées que par ce potentiel ; (b) de même, la condition (7.34) exprime que les bornes sup.$\underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}$ des quantités importées $z_h^{\downarrow}$ des biens échangeables $h\in H^\circ$ [contrainte (7.25e)] est si grande qu'elle n'est atteignable qu'en violant la contrainte d'équilibre des échanges extérieurs (7.23), autrement dit que les importations ne sont limitées que par cette contrainte ;

Int. (7.38) la condition (7.36) exprime que les échanges extérieurs ne sont pas soumises à taxation.

La condition (7.35), qui signifie que les exportations ne sont pas fixées, exprime la variabilité du marché extérieur plus que l'ouverture douanière ([7x]).

(D) Les **conditions de propension aux importations** concernent essentiellement le fonctionnement intérieur. Elles s'écrivent :

(7.39) pour tout multiplet $(x^i, i\in I)$ tel que $x^i \in X(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i\in I$ ([7y]),

(a) pour tout $h\in H^\circ$, $\sum_{i\in I} x_h^i \geq 0$,

(b) il existe $h\in H^\circ$ tel que, $\sum_{i\in I} x_h^i > 0$;

(7.40) pour tout $p \in S_H$ tel que, (a) $p_h = 0$ pour tout $h\in H^\circ$, et tout multiplet $(y^j, j\in J_*)$ tel que, (b) $y^j \in Am(Y^j, u^j, p)$ pour tout $j\in J_*$, on a,

(c) $\sum_{j\in J_*} y_h^j \leq 0$ pour tout $h\in H^\circ$ ([3d]) ;

(7.41) pour tout $y \in Y^e$, $y_h \leq 0$ pour tout $h\in H^\circ$;

(7.42) $B^{\downarrow} = 0$, i.e. $b_{h,k}^{\downarrow} = 0$ pour tous $h\in H$ et $k\in H^\circ$;

(7.43) $p_h^{\downarrow} > 0$ pour tout $h\in H^\circ$;

(7.44) $s^\circ \geq 0$.

(E) Les conditions (7.39) à (7.41) expriment, conformément aux interprétations (7.45) et (7.46) ci-après, des comportement des agents intérieurs vis-à-vis des biens importés, comportements qui peuvent être considérés comme relevant d'une propension aux importations :

Int. (7.45) la condition (7.39) exprime que les comportements des consommateurs [contraintes d'équilibre (3.3)] sont au total, via les sommes figurant dans les relations (7.39a) et (7.39b), tels que, quelles que soient les conditions du marché intérieur, d'une part les consommateurs n'offrent aucun des biens échangeables avec l'extérieur [relation (7.39a)], d'autre part ils demandent effectivement au moins l'un de ces biens [relation (7.39b)] ;

Int. (7.46) (a) la condition (7.40) exprime que les comportements des producteurs privés autres que celui d'import-export j°, [contraintes d'équilibre (3.4)] sont tels que, si les prix de tous les biens échangeables sont nuls, alors aucun de ces producteurs n'offre ces biens ([7z]) ; (b) la condition (7.41) exprime que, quelles que soient les conditions du marché intérieur, l'Etat ne peut fournir aucun des biens échangeables.

La condition (7.42), qui exprime que toutes les consommations (intérieures) dues aux importations sont nulles, est rattachée aux précédentes, puisqu'elle favorise aussi les importations, même si elle est de type plus technique que comportemental ([7w]).

La condition (7.43), qui exprime que toute importation est couteuse sur le marché extérieur, complète, en la renforçant, la condition (7.20). Elle concerne le caractère concurrencé plus que la propension aux importations ([7x]).

Enfin, la condition (7.44) ne concerne plus l'équilibre intérieur mais l'équilibre des échanges extérieurs. La logique libérale d'économie ouverte qui requiert cet équilibre peut être considérée comme relevant aussi, mais en ce qui concerne l'extérieur, d'une propension aux importations ([7w]).

§ 7.6 - DOMINATION DES PRIX INTERIEURS EN ECONOMIE OUVERTE : RESULTAT

(A) La logique de l'énoncé (théorème 7.6 ci-après) amène à envisager, pour la propriété de domination des prix intérieurs qui est visée (alinéa 7.5.A), deux formes, une large et une stricte.

Désignant par ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, y^e, p, $\mathbf{s}$, $\mathbf{b}$, $z^{\downarrow}$, $z^{\uparrow}$) un équilibre avec import-export simple, relatif au jeu de données avec import-export simple $\mathbf{D}°$ en cause (alinéas 7.4.B et 7.5.A), ces propriétés s'écrivent :

(7.47) **[propriété de domination large]** il existe $\mu° \in R$ tel que,

(a) $\mu° \geq 0$,

(b) $$\mu° p_h^{\uparrow} - \sum_{k \in H} p_k b_{k,h}^{\uparrow} \leq p_h \leq \mu° p_h^{\downarrow} + \sum_{k \in H} p_k b_{k,h}^{\downarrow}, \quad \text{pour tout } h \in H° ;$$

(7.48) **[propriété de domination stricte]** il existe $\mu° \in R$ tel que,

(a) $\mu° > 0$,

(b) $$\mu° p_h^{\uparrow} - \sum_{k \in H} p_k b_{k,h}^{\uparrow} \leq p_h \leq \mu° p_h^{\downarrow}, \quad \text{pour tout } h° \in H°.$$

(B) Cela étant, le résultat en cause est énoncé par le théorème suivant.

THEOREME 7.6 - Soit $\mathbf{D}°$ un jeu de données avec import-export simple.

(A) Si le jeu $\mathbf{D}°$ vérifie les conditions d'<u>ouverture douanière</u> (7.33) à (7.36), alors tout équilibre avec import-export relatif à ce jeu vérifie la propriété de <u>domination large</u> (7.47).

(B) Si le jeu $\mathbf{D}°$ vérifie les conditions d'<u>ouverture douanière</u> (7.33) à (7.36) et les conditions de <u>propension aux importations</u> (7.39) à (7.44), alors tout équilibre avec import-export relatif à ce jeu vérifie la propriété de domination stricte (7.48).

Ce théorème est établi au § 7.7. Au préalable, on fait les remarques (C) à (F) ci-après sur ses tenants et aboutissants.

(C) On souligne d'abord que le théorème s'applique à tout équilibre vérifiant les conditions requises, indépendamment des conditions assurant son existence, par exemple des conditions introduites par le théorème 3.4. L'existence de tels équilibres fait l'objet du § 7.8.

(D) On souligne ensuite le corollaire consistant en ce que, dans les conditions de la propriété stricte, si on suppose, outre (7.42), que,

(7.49) $\quad B^{\uparrow} = 0, \quad$ i.e. $\quad b^{\uparrow}_{h,k} = 0 \quad$ pour tous $h \epsilon H$ et $k \epsilon H°$;

alors il existe $\mu° > 0$ tel que,

(7.50) $\quad \mu° p^{\uparrow}_{h} \leq p_h \leq \mu° p^{\downarrow}_{h} \quad$ pour tout $h \epsilon H°$.

Cet encadrement constitue l'expression la plus forte de la propriété de domination annoncée (alinéa 7.5.A) : le calage des prix intérieurs sur les prix extérieurs pour les biens échangeables. En particulier, si, pour au moins deux biens $h \epsilon H°$, les prix à l'importation et à l'exportation sont égaux, alors les prix intérieurs de ces biens coïncident avec les prix extérieurs à une normalisation près.

(E) On souligne aussi que les propriétés (7.47) et (7.48) ne diffèrent que par le caractère <u>strictement</u> positif de $\mu°$ dans la propriété stricte [relations (7.47a) et (7.48a)], compte tenu de ce que le second terme au troisième membre de la relation (7.47b) est omis dans la relation (7.48b) en vertu de la condition technique (7.42) ([7w]). Au demeurant, cette condition est essentielle pour la validité du résultat (alinéa 7.7.D).

(F) A la suite de la remarque précédente, on note que, lorsque $\mu° = 0$, la propriété de domination large (7.47) s'écrit,

(7.51) $\quad 0 \leq p_h \leq \sum_{k \epsilon H} p_k b^{\downarrow}_{k,h}, \quad$ pour tout $h \epsilon H°$.

Ainsi, dans ce cas, d'une part, en ce qui concerne les prix intérieurs, tout se passe comme si les prix à l'importation étaient nuls, d'autre part le comportement de maximisation du profit est, pour le producteur d'import-export, indépendant de la contrainte d'équilibre des échanges extérieurs (7.25d). Ces assertions seront éclairées au cours de la démonstration de la propriété de domination stricte (alinéa 7.7.D).

§ 7.7 - DEMONSTRATION DU THEOREME 7.6

(A) Les notations et la terminologie étant celles introduites au § 7.6, on désigne par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^e, \mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{b}, \mathbf{z}^{\downarrow}, \mathbf{z}^{\uparrow})$ un équilibre avec import-export relatif au jeu de données avec import-export simple **D°**, lequel est supposé vérifier les conditions d'ouverture douanière (7.33) à (7.36).

Comme point de départ de la démonstration de la propriété (A) du théorème, on remarque que, en particulier en vertu de (7.36), la contrainte de maximisation du profit (3.4) relative au producteur d'import-export j° signifie que le multiplet de variables d'importation et d'exportation ($z_h^{\downarrow}$, $z_h^{\uparrow}$, $h \in H^\circ$), variables en fonction desquelles le vecteur d'échanges y^{j° s'exprime par (7.25a) et (7.25c) avec y^{j° mis pour y, est solution du problème de programmation linéaire consistant à maximiser $p.y^{j^\circ}$ sous les contraintes (7.25d-f).

Ainsi, en vertu de la condition nécessaire de Kuhn et Tucker (B.26) (7A) appliqué à ce problème, il existe un multiplet,

$$(\mu^\circ, (\mu_{1,h}^{\downarrow}, \mu_{2,h}^{\downarrow}, \mu_{1,h}^{\uparrow}, \mu_{2,h}^{\uparrow}, h \in H^\circ))$$

de nombres réels tels que les relations de Kuhn et Tucker (7.52) à (7.57) ci-après soient satisfaites,

(7.52) (a) $\mu^\circ \geq 0$,

(b) $\mu_{1,h}^{\downarrow} \geq 0$, $\mu_{2,h}^{\downarrow} \geq 0$, $\mu_{1,h}^{\uparrow} \geq 0$, $\mu_{2,h}^{\uparrow} \geq 0$, pour tout $h \in H^\circ$,

(7.53) $$p_h - \sum_{k \in H} p_k b_{k,h}^{\downarrow} = \mu^\circ p_h^{\downarrow} + \mu_{1,h}^{\downarrow} - \mu_{2,h}^{\downarrow},$$ pour tout $h \in H^\circ$,

(7.54) $$-p_h - \sum_{k \in H} p_k b_{k,h}^{\uparrow} = -\mu^\circ p_h^{\uparrow} + \mu_{1,h}^{\uparrow} - \mu_{2,h}^{\uparrow},$$ pour tout $h \in H^\circ$,

(7.55) $$\mu^\circ \Big(\sum_{h \in H^\circ} p_h^{\uparrow} z_h^{\uparrow} - \sum_{h \in H^\circ} p_h^{\downarrow} z_h^{\downarrow} - s^\circ \Big) = 0,$$

(7.56) (a) $\mu_{1,h}^{\downarrow}(z_h^{\downarrow} - \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}) = 0$, (b) $\mu_{2,h}^{\downarrow}(z_h^{\downarrow} - \bar{z}_h^{\downarrow}) = 0$, pour tout $h \in H^\circ$,

(7.57) (a) $\mu_{1,h}^{\uparrow}(z_h^{\uparrow} - \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}) = 0$, (b) $\mu_{2,h}^{\uparrow}(z_h^{\uparrow} - \bar{z}_h^{\uparrow}) = 0$, pour tout $h \in H^\circ$.

(B) En vertu des relations (7.52), (7.53) et (7.54), pour établir la propriété de domination large (7.47), il suffit de montrer que,

(7.58) (a) $\mu_{1,h}^{\downarrow} = 0$ pour tout $h \in H^\circ$, (b) $\mu_{1,h}^{\uparrow} = 0$, pour tout $h \in H^\circ$.

En ce qui concerne (7.58a), raisonnant par l'absurde, la relation,

(7.59) $\mu_{1,h}^{\downarrow} > 0$, pour un $h \in H^\circ$,

entraînerait d'abord $z_h^{\downarrow} = \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}$, d'après la relation de complémentarité (7.56a) ; donc, puisque $p_k^{\downarrow} \geq 0$ et $z_k^{\downarrow} \geq 0$ ($k \in H^\circ$),

(7.60) $$\sum_{k \in H^\circ} p_k^{\downarrow} z_1^{\downarrow} \geq p_h^{\downarrow} \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}.$$ Mais, par ailleurs, d'après (7.25f),

(7.61) $$\sum_{k \in H^\circ} p_k^{\uparrow} z_k^{\uparrow} \leq \sum_{k \in H^\circ} p_k^{\uparrow} \bar{z}_k^{\uparrow}.$$ D'où, en retranchant (7.60) de (7.61),

(7.62) $$\sum_{k \in H^\circ} p_k^{\uparrow} z_k^{\uparrow} - \sum_{k \in H^\circ} p_k^{\downarrow} z_k^{\downarrow} \leq \sum_{k \in H^\circ} p_k^{\uparrow} \bar{z}_k^{\uparrow} - p_h^{\downarrow} \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}.$$

Or, d'après la condition (7.34), cette relation entraînerait que son premier membre serait strictement inférieur à s°, ce qui contredirait la contrainte (7.25d). D'où la relation (7.58a).

Afin d'établir (7.58b), on va s'appuyer sur les relations (7.65) et (7.66) ci-après que l'on commence par établir. Pour cela, on remarque d'abord que la contrainte d'équilibre physique (3.7), qui s'écrit ici,

(7.63) $$y^{j^\circ} = \sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y^j - y^e,$$ et la condition (7.33) entraînent que, (7.64) $\quad y_h^{j^\circ} \;>\; \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow} - \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$ pour tout $h \in H^\circ$.

Mais, d'après l'expression (7.25a) de y^{j° et les conditions de positivité (7.24) sur les matrices $B^{\downarrow}$ et $B^{\uparrow}$, on a, $z_h^{\downarrow} - z_h^{\uparrow} \;\geq\; y_h^{j^\circ}$. D'où, d'après (7.64),

(7.65) $\quad z_h^{\uparrow} - z_h^{\downarrow} \;<\; \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow} - \underline{\underline{z}}_h^{\downarrow}$ pour tout $h \in H^\circ$.

Par ailleurs, en ajoutant membre à membre les relations de Kuhn et Tucker (7.53) et (7.54), puis en réordonnant les termes, on obtient,

(7.66)
$$\mu_{2,h}^{\downarrow} + \mu_{2,h}^{\uparrow} = \mu_{1,h}^{\downarrow} + \mu_{1,h}^{\uparrow} + \mu^\circ(p_h^{\downarrow} - p_h^{\uparrow}) + \sum_{k\in H} p_k b_{k,h}^{\downarrow} + \sum_{k\in H} p_k b_{k,h}^{\uparrow}, \quad \text{pour tout } h \in H^\circ.$$

Raisonnant alors par l'absurde, la négation de (7.58b),

(7.67) $\quad \mu_{1,h}^{\uparrow} > 0,$ pour un $h \in H^\circ$,

entraînerait successivement : $z_h^{\uparrow} = \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$, d'après la relation de complémentarité (7.57a) ; $z_h^{\uparrow} > \underline{z}_h^{\uparrow}$, d'après la condition (7.35) ; $\mu_{2,h}^{\uparrow} = 0$, d'après la relation de complémentarité (7.57b) ; $\mu_{2,h}^{\downarrow} > 0$, d'après la relation (7.66), vu que tous les termes au second membre sont ≥ 0, d'après les conditions (7.20b) et (7.24), et que $\mu_{1,h}^{\uparrow} > 0$, d'après (7.67) ; $z_h^{\downarrow} = \underline{z}_h^{\downarrow}$, d'après la relation de complémentarité (7.56b) ; $z_h^{\uparrow} < \underline{\underline{z}}_h^{\uparrow}$, d'après l'inégalité (7.65) ; enfin $\mu_{1,h}^{\uparrow} = 0$, de nouveau d'après la relation de complémentarité (7.57a) ; ce qui contredirait (7.67). D'où la relation (7.58b). Ce qui achève d'établir la propriété de domination large (7.47).

(C) Afin d'établir la propriété de domination stricte (7.48) lorsque, outre les conditions d'ouverture douanière (7.33) à (7.36), les conditions de propension aux importations (7.39) à (7.44) sont satisfaites, il s'agit de montrer que $\mu^\circ > 0$. On le fait ci-après en raisonnant de nouveau par l'absurde.

Supposant, donc, que $\mu^\circ = 0$, la propriété de domination large (7.47), qu'on vient d'établir, entraînerait, compte tenu de la condition (7.42), que,

(7.68) $\quad p_h = 0$ pour tout $h \in H^\circ$.

Cela étant, d'après les conditions (7.39) à (7.41) et la contrainte d'équilibre physique (7.63), on aurait,

(7.69) (a) $y_h^{j^\circ} \;\geq\; 0$ pour tout $h \in H^\circ$, (b) $y_h^{j^\circ} \;>\; 0$ pour un $h \in H^\circ$;

i.e., d'après l'expression (7.25a) de y^{j° et la condition de positivité (7.24c),

(7.70) (a) $z_h^{\downarrow} \;\geq\; z_h^{\uparrow}$ pour tout $h \in H^\circ$, (b) $z_h^{\downarrow} \;>\; z_h^{\uparrow}$ pour un $h \in H^\circ$;

donc, d'après les conditions (7.20) et (7.43),

(7.71) (a) $p_h^{\downarrow} z_h^{\downarrow} \;\geq\; p_h^{\uparrow} z_h^{\uparrow}$ pour tout $h \in H^\circ$, (b) $p_h^{\downarrow} z_h^{\downarrow} \;>\; p_h^{\uparrow} z_h^{\uparrow}$ pour un $h \in H^\circ$;

ce qui, d'après la condition (7.44) contredirait la contrainte (7.25d). D'où la relation $\mu^\circ > 0$, la propriété de domination stricte et le théorème 7.6.

(D) On souligne que, dans la démonstration précédente, la condition (7.42) de nullité de la matrice $B^{\downarrow}$ n'intervient que pour assurer que l'hypothèse $\mu^\circ = 0$ entraîne la relation (7.68), ce qui permet d'exploiter la condition (7.40). Ainsi, toute condition sur $B^{\downarrow}$ assurant cette implication pourrait remplacer (7.42).

On souligne aussi que, indépendamment de la condition (7.42), si $\mu^\circ = 0$, plus précisément, pour un équilibre tel que les relations de Kuhn et Tucker (7.52) à

(7.57) soient vérifiées avec $\mu^\circ = 0$, alors ces relations coïncident avec celles du problème déduit de celui envisagé ici en omettant la contrainte d'équilibre des échanges extérieurs (7.25e). D'où, en vertu de la condition suffisante de Kuhn et Tucker (B.26) valable dans ce cas ([7A]), l'assertion de l'alinéa 7.6.F concernant le comportement du producteur d'import-export.

§ 7.8 - CONSISTANCE DES JEUX DE DONNEES AVEC IMPORT-EXPORT

(A) On s'intéresse ici à l'existence de jeux de données avec import-export simple D° à la fois consistants et vérifiant les conditions requises par le théorème 7.6. Pour établir cette existence, on va utiliser une démarche constructive consistant à adjoindre, à un jeu de données vérifiant les conditions de consistances du théorème 3.4, mais sans producteur d'import-export, un tel producteur de façon à ce que les conditions voulues soient satisfaites, tout en conservant celles de consistance.

Ainsi, on suppose donnés, comme point de départ, d'une part un jeu de données $\mathbf{d}_*$ relatif à un appareil nominatif (H, I, J_*, J^e), sans producteur d'import-export désigné ([7B]), d'autre part un sous-ensemble H° de H. Pour chaque couple $(\mathbf{p}^\circ,\mathbf{z}^\circ)$ de la forme (7.19) relativement à H° et chaque $s^\circ \in \mathbb{R}$, on désigne par $\underline{D}^\circ(y^e_o,\mathbf{p}^\circ,\mathbf{z}^\circ,s^\circ)$ le jeu de données avec import-export simple [de la forme (7.32)] tel que, d'une part ce jeu est obtenu en adjoignant au jeu $\mathbf{d}_*$ le producteur d'import exports, <u>sans taxation</u> [conformément à la condition (7.36)], défini par le multiplet de données d'import-export $(H^\circ,\mathbf{p}^\circ,\mathbf{z}^\circ,s^\circ,B^\circ)$, avec des matrices $B^\downarrow$ et $B^\uparrow$ nulles,

$$(7.72) \qquad B^\downarrow = B^\uparrow = 0,$$

d'autre part, pour ce jeu, l'ensemble de production de l'Etat, Y^e, est dominé par celui Y^e_* du jeu $\mathbf{d}_*$, en ce sens qu'il est de la forme,

$$(7.73) \qquad \begin{aligned} Y^e &= \{\, y \mid y \in \mathbb{R}^H \text{ et } \exists\, y_* \in Y^e_* \text{ t.q. } y^e_o \le y \le y_* \,\}, \\ &= (Y^e_* - \mathbb{R}^H_+) \cap (\{y^e_o\} + \mathbb{R}^H_+), \quad \text{où } y^e_o \in \mathbb{R}^H \text{ est à déterminer.} \end{aligned}$$

De plus, un quadruplet $(y^e_o,\mathbf{p}^\circ,\mathbf{z}^\circ,s^\circ)$, avec $y^e_o \in \mathbb{R}^H$, $(\mathbf{p}^\circ,\mathbf{z}^\circ)$ de la forme (7.19) et $s^\circ \in \mathbb{R}$, est dit **adapté** au jeu $\mathbf{d}_*$ si, d'une part, $(\mathbf{p}^\circ,\mathbf{z}^\circ)$ vérifie les conditions (7.20) à (7.23), (7.43) ([7X]), (7.33) et (7.34) relativement à ce jeu, ainsi que (7.35) et,

$$(7.74) \qquad \underline{z}^\downarrow_h = 0 \text{ et } \underline{z}^\uparrow_h = 0, \quad \text{pour tout } h \in H^\circ, \quad \text{d'autre part } y^e_o \text{ est tel que,}$$

$$(7.75) \qquad y^e_o \le \sum_{i\in I} x^i - \sum_{j\in J_*} y^j - \underline{\underline{z}}^\downarrow,$$

pour tout $\mathbf{x} = (x^i, i\in I) \in \mathbb{R}^{H\times I}$ tel que $x^i \in X(\sigma^i,f^i)$ pour tout $i\in I$ ([7Y]),
pour tout $\mathbf{y} = (y^j, j\in J_*) \in \mathbb{R}^{H\times J^*}$ tel que $y^j \in Y^j$ pour tout $j\in J_*$.

Par ailleurs, la démarche envisagée pour établir la consistance d'un jeu de données va s'appuyer sur le théorème 3.4. Dans ce sens, on dit qu'un jeu de données est de **type A/C** s'il vérifie les conditions de la propriété (A), option (C) du théorème 3.4 ([7C]). En particulier un jeu de type A/C, d'une part vérifie les conditions de <u>libre disposition contrôlée</u> (3.16) et de <u>s-viabilité</u> (3.14), d'autre part est <u>sans taxation des producteurs</u>. Ainsi, le théorème 3.4 stipule que tout jeu de type A/C est consistant. De plus, on dit qu'un jeu de données vérifie la conditions (7.41) s'il en est ainsi de l'ensemble de production de l'Etat correspondant.

(B) En ce qui concerne les conditions d'ouverture douanière (7.33) à (7.35), la démarche d'extension envisagée se traduit par la proposition suivante.

PROPOSITION 7.8-1 - (A) Si le jeu de données d_* est de type A/C, alors, d'une part (A1), pour chaque $s° \in R$, il existe un quadruplet $(y^e_o, p°, z°, s°)$ adapté à ce jeu, d'autre part (A2), pour tout tel quadruplet tel que $s° \le 0$, le jeu $\underline{D}°(y^e_o, p°, z°, s°)$ est aussi de type A/C. (B) Si, de plus, le jeu d_* vérifie la condition (7.41), alors il en est de même du jeu $\underline{D}°(y^e_o, p°, z°, s°)$.

La propriété (A1) de cette proposition résulte des conditions (7.76) ci-après qui sont elles-mêmes incluses dans l'hypothèse de type A/C du jeu d_* [7C] :

(7.76) d'une part les fonctions de demande excédentaires (σ^i, f^i) $(i \in I)$ vérifient les conditions de bornitude inf. (2.15), d'autre part les Y^j $(j \in J_*)$ et Y^e_* vérifient les conditions de compacité (2.22).

En effet, en ce qui concerne l'existence de $(p°, z°)$, $s°$ étant donné, après avoir choisi les $p^{\downarrow}_h$ et $p^{\uparrow}_h$ $(h \in H°)$ vérifiant (7.20) et (7.43), puis les $\underline{z}^{\downarrow}_h$ et $\underline{z}^{\uparrow}_h$ $(h \in H°)$ nuls conformément à (7.74), on détermine, eu égard à (7.76), les $\underline{z}^{\uparrow}_h$ $(h \in H°)$ pour qu'ils vérifient (7.22b), (7.33) et (7.35), enfin les $\underline{z}^{\downarrow}_h$ $(h \in H°)$ pour qu'ils vérifient (7.21b) et (7.34). Par ailleurs, l'existence de y^e_o vérifiant (7.75) découle aussi directement des conditions (7.76).

En ce qui concerne la propriété (A2), si $s° \le 0$, le jeu $\underline{D}°(y^e_o, p°, z°, s°)$ vérifie - en particulier à cause des hypothèses (7.72), (7.74) et $s° \le 0$ qui font que $0 \in Y^{j°}$ - la condition de s-viabilité en même temps que le jeu de départ d_*. Il reste donc à vérifier que le jeu $\underline{D}°(y^e_o, p°, z°)$ vérifie la condition de libre disposition contrôlée (3.16), ce qui résulte de l'hypothèse (7.75) sur y^e_o. En effet, la relation (3.16a) s'écrit ici,

$$(7.77a) \quad y^{\#} \le y^e, \quad \text{avec} \quad (7.77b) \quad y^{\#} = \sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J_*} y^j - y^{j°}.$$

Donc, d'après (7.73), on a, $y^{\#} \in Y^e_* - R^H_+$. Ce qui fait que, de nouveau d'après (7.73), pour conclure à (3.16b), qui s'écrit ici $y^{\#} \in Y^e$, il suffit de vérifier que $y^e_o \le y^{\#}$. Or, compte tenu de l'expression (7.25a) de $y^{j°}$, cela résulte de (7.75) et de la majoration (7.25e). D'où la propriété (A) de la proposition. Par ailleurs, la propriété (B) résulte immédiatement de (7.73) [7D].

(C) En ce qui concerne les conditions de propension aux importations (7.39) à (7.44), la principale difficulté réside dans la condition (7.40), à cause de l'interaction entre prix et quantité qu'elle comporte. On va tourner cette difficulté en introduisant, pour chaque producteur privé $j \in J_*$, des conditions suffisantes de type purement physique qui, comme d'ailleurs (7.40), ne concernant que le jeu de départ d_*.

Ces conditions, pour le producteur $j \in J_*$, d'ensemble de production Y^j, sont de deux types qui s'expriment respectivement par (7.78) et (7.79) ci-après [7E] :

(7.78) pour tout $y \in Y^j$, $y_h \le 0$ pour tout $h \in H°$;

(7.79a) $0 \in Y^j$; (7.79b) pour tout $y \in Y^j$, $y_h \le 0$ pour tout $h \in H \backslash H°$;

(7.79c) pour tout $y \in Y^j$, il existe $h \in H°$ tel que $y_h > 0$ entraîne que $y_h < 0$ pour tout $h \in H \backslash H°$.

Cela étant, ainsi que l'énonce la proposition 7.8-2 ci-après, la variante en cause de la condition (7.40) s'écrit :

(7.80) pour tout $j \in J_*$, soit (a) Y^j vérifie (7.78) (et u^j est quelconque),
soit (b) Y^j vérifie (7.79) et (c) u^j vérifie la condition de pure taxation (2.41).

PROPOSITION 7.8-2 - Pour que le jeu de données avec import-export simple D° vérifie la condition (7.40), il suffit qu'il vérifie la condition (7.80).

Afin d'établir ce résultat, il suffit de montrer que, sous la condition (7.80), si $p \in S_H$ et $y \in Y^j$, avec $j \in J_*$, alors,

(7.81) (a) $p_h = 0$ pour tout $h \in H°$ et (b) $y \in Am(Y^j,u^j,p)$ entraîne

(7.82) $y_h \leq 0$ pour tout $h \in H°$.

En effet, si (7.40a) et (7.40b) sont vérifiées, l'implication précédente, pour chaque $j \in J_*$, entraîne (7.40c) en sommant, en $j \in J_*$, les relations (7.82) écrites avec y^j mis pour y. Par ailleurs, cette implication étant immédiate dans le cas de (7.80a), il s'agit seulement de traiter les cas de (7.80b,c).

Supposant que (7.81) est vérifiée, on montre d'abord que,

(7.83) $p.y = 0$.

En effet, puisque $y \in Y^j$, d'après (7.81b), et $p \in R^H_+$, on a, $p.y \leq 0$, d'après (7.81a) et (7.79b) ; donc $p.y - u^j(p,y) \leq 0$, d'après (7.80c) et (2.41a) pour $u = u^j$; donc $p.y - u^j(p,y) = 0$, d'après (7.81b), (7.79a), (7.80c) et (2.41b) pour $u = u^j$; i.e. $p.y = u^j(p,y)$; d'où (7.83), de nouveau d'après (7.80c) et (2.41a) pour $u = u^j$.

Cela étant, (7.81a) entraîne, d'une part que $p_h y_h = 0$ pour tout $h \in H \backslash H°$, d'après (7.83) et (7.79b), d'autre part, puisque $p \in S_H$, qu'il existe $h \in H \backslash H°$ tel que $p_h > 0$; d'où il résulte qu'il existe $h \in H \backslash H°$ tel que $y_h = 0$, ce qui, d'après (7.79c), par contraposition, entraîne la relation (7.82) cherchée et achève d'établir la proposition.

(D) Eu égard à la sommation en $j \in J_*$ figurant dans (7.40b), les conditions individuelles (7.80a), pour chaque $j \in J_*$, peuvent être affaiblies sous la forme collective (7.84) ci-après où J'_* désigne l'ensemble des $j \in J_*$ tels que (7.78) n'a pas lieu :

(7.84a) $0 \in \sum_{j \in J'_*} Y^j$;

(7.84b) pour tout $(y^j, j \in J'_*) \in \prod_{j \in J'_*} Y^j$, $\sum_{j \in J'_*} y^j_h \leq 0$ pour tout $h \in H \backslash H°$;

(7.84c) pour tout $(y^j, j \in J'_*) \in \prod_{j \in J'_*} Y^j$, il existe $h \in H°$ tel que $\sum_{j \in J'_*} y^j_h > 0$
entraîne que $\sum_{j \in J'_*} y^j_h < 0$ pour tout $h \in H \backslash H°$.

Mais la démonstration ci-dessus de (7.40) ne s'étend alors que si la condition (7.80c) est renforcée, en prenant tous les u^j $(j \in J'_*)$ nuls.

(E) La proposition suivante récapitule les résultats obtenus dans ce § 7.8 en ce qui concerne l'existence d'un jeu de données avec import-export.

PROPOSITION 7.8-3 - Pour que le jeu $\underline{\mathbf{D}}^\circ(y_0^e,\mathbf{p}^\circ,\mathbf{z}^\circ,s^\circ)$ vérifie les conditions d'<u>ouverture douanière</u> et les conditions de <u>propension aux importations</u>, tout en étant consistant, il suffit que, d'une part le jeu de départ $\mathbf{d}_*$ soit de type A/C et vérifie les conditions (7.39), (7.80) et (7.41), d'autre part le quadruplet $(y_0^e,\mathbf{p}^\circ,\mathbf{z}^\circ,s^\circ)$ soit adapté à ce jeu et $s^\circ = 0$.

Cette proposition découle directement des propositions 7.8-1 et 7.8-2. Elle doit d'ailleurs être conjugée avec la propriété (A1) de la première pour fournir l'existence voulue. On souligne l'importance de la condition $s^\circ = 0$, la relation $s^\circ \leq 0$ étant requise par la proposition 7.8-1 et la relation $s^\circ \geq 0$ par la condition (7.44).

(F) Pour terminer ce § 7.8, on examine rapidement les problèmes que pose l'existence, la construction, d'un jeu de données de départ $\mathbf{d}_*$ vérifiant les conditions requises par la proposition 7.8-3.

Tout d'abord le chapitre 8 fournit divers exemples de jeux de données de type A/C (§ 8.5 à 8.8 et 8.10). De même, la condition (7.39) peut être satistaite en prenant les fonctions de demande excédentaires (σ^i,f^i) de la forme (6.12) avec un vecteur de dotations w tel que $w_h = 0$ pour tout $h\epsilon H^\circ$. On souligne cependant, à propos de ces conditions, l'importance de l'alternative (7.80b,c) à la simple condition (7.80a). En effet, si (7.80) se réduisait à cette dernière condition, la condition de s-viabilité (3.14), du jeu $\mathbf{d}_*$, serait incompatible avec la conjonction des conditions (7.39) et (7.41).

Enfin, la condition (7.80b) peut être satisfaite en prenant des ensembles de production Y^j $(j\epsilon J_*)$ engendrés par une analyse d'activité (alinéa 7.1.A), par exemple de la forme (7.14), avec des coefficients techniques $a'_{h,l}$ et $a''_{h,l}$ $(h\epsilon H, l\epsilon L)$ tels que,

(7.85) $\quad a'_{h,l} < 0$ et $a''_{h,l} < 0$ pour tous $h\epsilon H\backslash H^\circ$ et $l\epsilon L$,

cette condition étant conjuguée avec la positivité stricte pour certains des coefficients de fonctionnement $a'_{h,l}$, pour $h\epsilon H^\circ$, de façon à ce que la condition de s-viabilité soit vérifiée en même tmps que la condition (7.39). Au demeurant, la condition de s-viabilité correspond alors à un programme linéaire et la vérification précédente se réduit à la recherche de conditions sur les coefficients techniques pour que ce programme admette une solution.

Cet exemple peut illustrer l'interprétation de la condition (7.80b) en considérant la situation extrême d'ouverture consistant en ce que tous les produits sont échangeables de telle sorte les éléments h de $H\backslash H^\circ$ ne représentent que du travail ou des services indispensables que seuls les ménages ou l'Etat peuvent offrir ([7F]).

CHAPITRE 8 - **EXEMPLES**

Après les compléments fournis par les chapitres 6 et 7 relativement aux composants des modèles de la classe en cause, on étudie, dans ce chapitre final, divers exemples de modèles complets de cette classe. Reprenant d'abord le modèle de Scarf sous sa forme originale (§ 8.1), on explicite et on discute ses liens avec le modèle classique (§ 8.2 et 8.3)), puis (§ 8.4) on donne la démonstration directe de l'existence d'un équilibre qui a été à l'origine du présent travail (alinéa 1.1.B). On étudie ensuite diverses variantes (§ 8.5, 8.6, 8.9, 8.10, 8.11) qui fournissent des exemples (§ 8.7, 8.8, 8.12, 8.13) permettant d'illustrer les développements généraux des chapitres 2 à 5 et de cerner leurs limites ainsi que certains problèmes qu'ils posent (§ 8.9 et alinéa 8.11.F).

§ 8.1 - MODELE DE SCARF : APPROCHE FORMELLE

(A) On introduit, dans ce § 8.1, le modèle de Scarf sous sa forme originale, d'abord formellement, de façon indépendante des développements des chapitres 2 à 7. Ainsi, ce § et le § 8.4 qui lui fait suite en ce qui concerne les démonstrations peuvent être abordés d'entrée, à partir de l'alinéa 1.1.B du chapitre 1 où est mentionné ce modèle, seulement après consultation des alinéas 2.1.A,B, pour ce qui est des notations. Les liens de ce modèle avec ceux en cause dans ce texte ne sont envisagés qu'ensuite, aux § 8.2 et 8.3.

(B) L'**appareil nominatif** du modèle (alinéa 1.1.A) comprend deux nomenclatures H et L, de **biens** et d'**activités**. Les **données** sont constituées par une application f de S_H dans R^H, la **fonction de demande excédentaire**, et une matrice à coefficients réels $A = (a_{h,l},\ h\epsilon H, l\epsilon L)\ \epsilon\ R^{H\times L}$, la **matrice technologique**. Les **variables** (numériques) sont les composantes z_l $(l\epsilon L)$ et p_h $(h\epsilon H)$ de multiplets $z = (z_l, l\epsilon L)$ et $p = (p_h, h\epsilon H)$ qui constituent les variables vectorielles.

Cela étant, un **équilibre**, du **modèle de Scarf** relatif aux données f et A, est un couple (p,z) vérifiant les **contraintes d'équilibre** (8.1) à (8.4) ci-après sous forme vectorielle ([8a]),

(8.1) $p\ \epsilon\ S_H$, (8.2) $z\ \epsilon\ R_+^L$,

(8.3a) $pA \leq 0$, (8.3b) $p.Az = 0$, (8.4) $Az \geq f(p)$,

ou (8.5) à (8.8) sous forme développée, en désignant par f_h $(h\epsilon H)$ les composantes de f dans R,

(8.5a) $p_h \geq 0$, pour tout $h\epsilon H$, (8.5b) $\sum_{h\epsilon H} p_h = 1$,

(8.6) $z_l \geq 0$, pour tout $l\epsilon L$,

(8.7a) $\sum_{h\epsilon H} p_h a_{h,l} \leq 0$, pour tout $l\epsilon L$, (8.7b) $\sum_{h\epsilon H} \sum_{l\epsilon L} p_h a_{h,l} z_l = 0$,

(8.8) $\sum_{l\epsilon L} a_{h,l} z_l \geq f_h(p)$, pour tout $h\epsilon H$.

(C) L'interprétation de ce modèle, seulement suggérée ci-dessus par la terminologie accompagnant les définitions formelles, sera déduite au § 8.3 de ses liens avec les modèles en cause dans ce texte, qui font l'objet du § 8.2. Restant ici au plan formel, on s'intéresse d'abord au résultat d'existence d'un équilibre qu'énonce le théorème 8.1 ci-après, lequel repose sur les conditions suivantes concernant les données f et A du modèle :

(8.9) **[continuité]** l'application f est continue de S_H dans R^H ;

(8.10) **[loi de Walras]** pour tout $p \in S_H$, $p.f(p) = 0$;

(8.11) **[consistance]** il existe $p \in S_H$ tel que $pA \leq 0$.

THEOREME 8.1 - Il existe un équilibre du modèle de Scarf dès que les données f et A vérifient les conditions (8.9), (8.10) et (8.11).

Ce théorème est établi au § 8.4. Au préalable, on fait les remarques (D) à (F) ci-après sur la formulation du modèle et les conditions du théorème.

(D) La formulation du modèle, via les contraintes (8.1) à (8.4), est équivalente à celle de Scarf ([8b]), mais en diffère par la contrainte (8.4) où figure l'inégalité $\geq$ alors que Scarf met l'égalité. Cette différence tient à ce que la matrice A est supposée ici, à priori, quelconque alors que Scarf lui impose de comporter une sous-matrice identité $H \times H$ qui sert à assumer les excédents.

Encore à propos de la formulation, on note que la contrainte d'équilibre (8.3b) découle des autres contraintes, dès que la fonction f vérifie la loi de Walras (8.10). En effet, d'une part, on a $pA.z \leq 0$, d'après (8.2) et (8.3a) ; d'autre part, on a $p.Az \geq p.f(p)$, d'après (8.1) et (8.4) ; donc $p.Az \geq 0$, d'après (8.10) ; d'où (8.3b), puisque $pA.z = p.Az$.

(E) On souligne le caractère limitatif de la condition de continuité (8.9) sur l'application f, en ce sens que cette application est supposée définie et continue sur le simplexe S_H tout entier et pas seulement sur son intérieur $S_H \cap R^H_{++}$. C'est aussi la condition requise par Scarf ([8c]). Par ailleurs, le caractère univoque de la fonction f n'est pas indispensable : on peut étendre le théorème 8.1 à un modèle dont la donnée f est remplacée par une correspondance h.c.s (alinéa A.2.A) de S_H dans R^H vérifiant l'extension naturelle de la loi de Walras (8.10),

(8.12) pour tout $p \in S_H$ et tout $x \in f(p)$, $p.x = 0$.

(F) La condition de consistance (8.11) sur la matrice A est sous-jacente à la présentation la plus récente de Scarf ([8d]). Cette condition, de type dual (i.e. s'exprimant en termes de la matrice transposée de A, via un quantificateur portant sur $p \in R^H$), est, de ce fait, difficile à interpréter en termes technologiques (alinéas 8.3.D et 8.4.I). D'où l'intérêt de conditions de type primal (i.e. s'exprimant directement en termes de A, via une quantification portant sur $z \in R^L$). Les conditions (8.13), (8.14) et (8.16) ci-après sont de ce type, mais, ainsi qu'il résulte de la proposition 8.1 qui suit, ne sont que suffisantes [pour assurer (8.11)], via la condition (8.17) :

(8.13) il existe $x \in R^H$ tel que $R(A,x)$ est non vide et borné,

(8.14) pour tout $x \in R^H$, $R(A,x)$ est, soit vide, soit borné, avec,

(8.15) $R(A,x) = \{Az \mid z \in R^L_+ \text{ et } Az \geq x\}$;

(8.16) pour tout $z \in R^L_+$, $Az \geq 0$ entraîne $Az = 0$;

(8.17) il existe $p \in R^H_{++}$ tel que $pA \leq 0$.

PROPOSITION 8.1 - (A) Les conditions (8.13), (8.15), (8.16) et (8.17) sont équivalentes entre elles et strictement plus fortes que la condition (8.11).

Cette proposition est établie au § 8.4 (alinéa 8.4.H). L'idée de la condition (8.13) figure chez Scarf, mais de façon liée à une forme particulière de la fonction f, alors que cette condition ne concerne que la matrice A ([8e]).

§ 8.2 - MODELE DE SCARF ET MODELE CLASSIQUE

(A) L'interprétation du modèle de Scarf introduit formellement au § 8.1 sera déduite au § 8.3 de celle des modèles de la classe en cause dans ce texte. Pour cela, on explicite ici certains modèles classiques de cette classe qui correspondent au modèle de Scarf, lequel est supposé donné par son appareil nominatif (H, L), sa fonction de demande excédentaire f et sa matrice technologique A.

Pour définir ce modèle classique (§ 3.6), il faut spécifier ses composants que sont l'appareil nominatif (H, I, J) (alinéa 3.6.B) et le jeu de données $\mathbf{d}^*$ (alinéa 3.6.B). Parmi les diverses façons de le faire, celle qui est présentée ci-après (alinéas 8.1.B,C) explicite, dans l'esprit du modèle de Arrow-Debreu, la problématique multi-consommateur qui est souvent implicite dans les présentations du modèle de Scarf ([8f]). La démarche correspondante est détaillée à titre d'illustration des exigences méthodologiques correspondant aux deux caractéristiques requises pour les modèles visés (alinéas 1.2.D,F).

(B) En ce qui concerne l'appareil nominatif (H, I, J), la nomenclature des biens coïncide avec celle, H, du modèle de scarf, la nomenclature I des consommateurs est quelconque, tandis que la nomenclature des producteurs privés J est réduite à un seul élément noté seulement j ([8g]). Cela étant, on désigne par Ds(f,A) la classe (l'ensemble) des jeux de données classiques $\mathbf{d}^*$, relatifs à cet appareil nominatif [de la forme 3.19)], qui sont caractérisés par les conditions (8.18) à (8.20) ci-après : en ce qui concerne les fonctions de demande excédentaires (σ^i, f^i) $(i \in I)$, d'une part on impose que,

(8.18a) $\quad \sigma^i(p) \leq 0 \quad (i \in I,\ p \in S_H)$,

d'autre part, les correspondances f^i $(i \in I)$ sont univoques, i.e., de la forme,

(8.18b) $\quad f^i(p,s) = \{\underline{f}^i(p,s)\} \quad (i \in I,\ p \in \mathbf{R}^H_{+*},\ s \in \mathbf{R})$,

où, pour chaque $i \in I$, $\underline{f}^i$ est une application de $S_H \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^H$, enfin ces correspondances sont liées à l'application f par,

(8.19) $\quad f(p) = \sum_{i \in I} \underline{f}^i(p,0) \quad (p \in \mathbf{R}^H_{+*})$;

tandis que l'ensemble de production Y^j est défini par,

(8.20) $\quad Y^j = A(\mathbf{R}^L_+)$;

(C) S'intéressant alors aux équilibres $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p, \mathbf{s}, \mathbf{b}) \in Eq(\mathbf{d}^*)$, du modèle associé à un tel jeu $\mathbf{d}^*$, qui sont sans transfert (alinéa 3.6.F), en ce sens que,

(8.22) $\quad$ (a) $b^i = 0$, (b) $s^i = 0$, pour tout $i \in I$ ([8h]),

on désigne, pour tout couple $(p,z) \in S_H \times \mathbf{R}^L_+$, par $\mathbf{e}(p,z)$ le multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ [de la forme (3.20), (3.2b,c)] engendré en définissant $\mathbf{s}$ et $\mathbf{b}$ par (8.22) et, eu égard aux conditions (8.18b) et (8.20), $\mathbf{x} = (x^i, i \in I)$ et y^j par,

(8.23) $\quad$ (a) $x^i = \underline{f}^i(p,0) \quad (i \in I)$, $\quad$ (b) $y^j = Az$.

(D) Cela étant, le lien entre les deux types de modèles est énoncé par la proposition suivante où les données f et A du modèle de Scarf sont quelconques.

PROPOSITION 8.2 - Soit d^* un jeu de données de la classe **Ds**(f,A). Pour qu'un couple $(p,z) \in S_H \times \mathbf{R}_+^L$ soit un équilibre du modèle de Scarf relatif aux données f et A, il faut et il suffit que le multiplet **e**(p,z) engendré par ce couple soit un équilibre <u>strict</u> du modèle associé à d^*.

La démonstration de cette proposition réclame seulement une confrontion laborieuse des contraintes d'équilibre (3.21) à (3.25) du modèle associé au jeu d^* à celles (8.1) à (8.4) du modèle de Scarf, en tenant compte des conditions (8.18) à (8.23). Pour cette confrontation, on souligne d'abord le point essentiel qui réside dans l'équivalence, en vertu de la condition nécessaire et suffisante de Kuhn et Tucker sous sa forme linéaire (B.26), entre la contrainte de maximisation du profit (3.22) relative au multiplet **e**(p,z) et celle (8.3) relative au couple (p,z). D'autre part, la contrainte de survie (3.21a) est vérifiée, quels que soit (p,z), en vertu des conditions (8.18a) et (8.22b), tandis que cette dernière condition entraîne que (3.21b) résulte de (8.23a) et que, d'après (8.22a), (3.21c) équivaut à (8.3b). Enfin, la contrainte d'équilibre physique (3.25) équivaut à (8.4), en vertu des conditions (8.18b), (8.19) et (8.23), tandis que la contrainte d'équilibre strict (3.29) résulte ici de l'absence de transfert (alinéa 3.6.F) que stipule (8.22a).

(E) En vertu du théorème 8.1, la proposition 8.2 ci-dessus admet le corollaire immédiat qui suit.

COROLLAIRE 8.2 - Un jeu de données de la classe **Ds**(f,A) est consistant dès que les données f et A vérifient les conditions (8.9), (8.10) et (8.11).

L'intérêt de ce corollaire tient à ce qu'il fournit l'existence d'un équilibre sans transfert (alinéa 3.6.F), existence qui est difficile à déduire du résultat général que constitue le théorème 3.4, au moins sous la seule condition (8.11) sur A (alinéas 5.2.D et 8.4.G). Toutefois, sa portée est limitée, puisque cette existence n'est obtenue que pour des jeux de données ignorant les contraintes de survie des consommateurs (alinéa 8.3.C).

§ 8.3 - <u>MODELE DE SCARF</u> : <u>INTERPRETATIONS</u>

(A) L'interprétation du modèle de Scarf découle directement de la proposition 8.2 et de celle des modèles de la classe **Ds**(f,A) : interprétation générale (§ 3.2) et interprétations spécifiques des conditions (8.18) à (8.23) qui définissent cette classe.

Pour illustrer ces dernières [alinéas (B) à (F) ci-après], on spécifie davantage les fonction de demande excédentaire (σ^i, f^i) $(i \in I)$ en prenant les fonctions $\underline{f}^i$ $(i \in I)$ de la forme définie par (6.12) et (6.9), ici avec v = 0, i.e.,

$$(8.24a) \quad \sigma^i(p) = -p.w^i, \qquad (8.24b) \quad \underline{f}^i(p,s) = \xi^i(p, p.w^i + s) - w^i$$
$$(i \in I,\ p \in S_H,\ s \in \mathbf{R}),$$

où, pour chaque $i \in I$, ξ^i et w^i sont respectivement une fonction de demande usuelle (§ 6.1) et un vecteur de $\mathbf{R}_+^H$, donnés.

(B) On souligne d'abord que, en vertu de l'égalité (8.23b) et de la contrainte de Scarf (8.3b), le profit $p.y^j$ est nul pour l'équilibre **e**(p,z), ce qui assure la cohérence de la condition (8.22b) jointe à l'absence de transfert (8.22a). Cette nullité du profit tient essentiellement à la forme particulière (8.20) de l'ensemble de production Y^j, plus précisément à l'absence de conditions d'organisation interne pour cet ensemble (alinéas 7.1.A, 7.2.B, 8.3.E). Elle constitue une lacune importante du modèle de Scarf (alinéa 7.2.B).

(C) La condition (8.18a) signifie que l'impératif de survie des consommateurs est ignoré, en ce sens que, pour chaque $i \in I$, le vecteur de consommation nul, qui correspond à la demande excédentaire $x^i = - w^i$, n'est pas exclu. En effet, en prenant, $s = - p.w^i$, (8.24b) donne $\underline{f}^i(p,s) = - w^i$, puisque $\xi^i(p,0) = 0$ [relation (6.2)], la contrainte de survie (3.21a), avec $s^i = s$, étant alors satisfaite d'après la condition (8.24a) qui précise (8.18a) (8i). Cela ne veut évidemment pas dire que la demande est nulle à l'équilibre, d'autant plus que les soldes des transferts s^i sont nuls dans les équilibres considérés.

Une contrainte de survie peut toutefois être introduite, avant de modifier le modèle (§ 8.5), par la démarche suivante, dans le cas où Card(I) = 1. On suppose d'abord que la fonction de demande excédentaire à survie (σ^i, f^i) de l'unique consommateur i est, au lieu de (8.24), de la forme générale définie par (6.12) et (6.9), i.e,

$$\text{(8.25a)} \quad \sigma^i(p) = p.(v^i - w^i), \qquad \text{(8.25b)} \quad \underline{f}^i(p,s) = \xi^i(p, p.w^i + s) - w^i$$

$$(p \in S_H, \ s \in R),$$

où le vecteur $v^i \in R^H_+$ des consommations de survie est ici quelconque. On suppose ensuite que la condition de s-viabilité (3.30) est vérifiée par le jeu de donnée d^* en question, i.e., d'après (6.14),

$$\text{(8.26)} \quad \text{il existe } z° \in R^H_+ \text{ tel que} \quad \text{(a)} \quad Az° \geq v^i - w^i.$$

Dans ces conditions, le multiplet $e(p,z)$ appartient à $Eq(d^*)$ dès que le couple (p,z) est un équilibre du modèle de Scarf. En effet, on a $p.Az° + p.w^i \geq p.v^i$, d'après (8.26) ; donc aussi $p.Az + p.w^i \geq p.v^i$, d'après la contrainte de maximisation du profit (3.22). D'où $s^i \geq \sigma^i(p)$, d'après la contrainte d'équilibre (8.3b), la condition (8.25a) et la condition (8.22b). On souligne que ce résultat, assez surprenant, ne se généralise pas au cas où Card(I) > 1.

Par ailleurs, la condition (8.19) signifie que la donnée f du modèle de Scarf représente la fonction de demande excédentaire <u>totale</u> des consommateurs. Ainsi, cette condition explicite l'interprétation usuelle de f comme fonction de demande excédentaire "du marché" (alinéa 8.2.A) (8f).

(D) La condition (8.20) signifie que l'ensemble de production Y^j de l'unique producteur privé j est engendré par une analyse d'activité (alinéas 7.1.A et 7.2.B). Outre les interprétations courantes (7.4) à (7.6) qu'elle permet, cette analyse fournit un cadre conceptuel pour l'interprétation, plus difficile, des conditions (8.11) et (8.13) à (8.17) concernant la matrice technologique A (alinéas 8.1.F) et 8.4.I), interprétation en termes des nécessités techniques régissant la production, lesqelles sont à approfondir en même temps que leur lien avec la condition de s-viabilité, par exemple sous la forme (8.26) (8j).

Par ailleurs, c'est la condition (8.20) qui permet l'expression (8.3) de la contrainte de maximisation du profit (3.22), expression dont la simplicité, via le caractère de dimension finie, est à la base des méthodes numériques de détermination de l'équilibre (8k).

(E) Le lien avec l'analyse d'activité repose sur l'option adoptée ici pour relier le modèle de Scarf à un modèle classique de la classe en cause dans ce texte (donc, plus généralement, à un modèle de Arrow-Debreu avec production), option consistant à introduire un appareil nominatif (H, I, J) ne comportant qu'un seul producteur (alinéa 8.2.B). Cette option peut sembler contingente, en ce sens qu'on peut aussi introduire un producteur privé j^1 pour chaque activité $l \in L$, ce qui fait que la contrainte (8.3), prise plutôt sous la forme développée (8.7a), peut être interprétée comme exprimant, pour chaque $l \in L$, la maximisation du profit du producteur j^1, mais cela seulement, il importe de le souligner, sous réserve de la contrainte d'équilibre global (8.7b) ([8l]).

C'est cette interprétation des contraintes (8.3), par une maximisation du profit pour chaque activité, qui semble être celle de Scarf ([8m]). On souligne que, contrairement à l'option avec un seul producteur adoptée ici, l'option avec un producteur par activité, ne permet pas, à cause de la condition globale (8.3b), de relier clairement les contraintes (8.3) [ou (8.7) sous forme développée] à la problématique de maximisation du profit dans le modèle classique de Arrow-Debreu qu'exprime la contrainte (3.22).

En outre, l'inadéquation de cette option est renforcée par le fait qu'elle n'est plus possible lorque les niveaux des activités z^1 ($l \in L$) sont soumis, au-delà de la simple positivité (8.6), à des contraintes d'organisation interne qui, par contre, peuvent être prises en compte naturellement dans le cadre de l'option avec un seul producteur (§ 8.5).

La discussion précédente montre l'importance de la distinction entre la notion, économique, de producteur et celle, technologique, d'activité ([8n]). Plus généralement, elle illustre l'importance des deux caractéristiques requises (alinéas 1.2.D,F, 8.2.A) en montrant comment les modèles de la classe en cause dans ce texte généralisent celui de Scarf.

(F) Au-delà des considérations précédentes, qui concernent le modèle de Scarf tel quel, on peut le confronter à l'éventuelle prise en compte de l'Etat, dans ses rôles, de producteur et de gestionnaire des divers transferts.

Le premier de ces rôles de l'Etat, ainsi que celui de gestionnaire des transferts forfaitaires ou de ceux résultant de la taxation des consommateurs, sont ignorés, dans le modèle de Scarf, conformément à son caractère classique (alinéa 8.2.A) et aux conditions (8.22a). Leur prise en compte réclame de sortir du cadre formel de ce modèle et conduit aux modèles de la classe en cause dans ce texte. Cependant, une taxation ad valorem de la production peut être introduite, dans ce cadre ([8o]), en remplaçant les contraintes (8.7) par les contraintes (8.27) ci-après,

(8.27a) $$\sum_{h \in H} p_h (1 - t_{h,l}) a_{h,l} \le 0, \quad \text{pour tout } l \in L,$$

(8.27b) $$\sum_{h \in H} \sum_{l \in L} p_h (1 - t_{h,l}) a_{h,l} z_l = 0,$$

où les taux de taxation $t_{h,l}$ ($h \in H$, $l \in L$) sont donnés tels que,

(8.28) $$t_{h,l} a_{h,l} \ge 0 \quad \text{pour tous } h \in H \text{ et } l \in L,$$

le montant de la taxe perçue par l'Etat étant alors, (8.29) $R = \sum_{h \in H} \sum_{l \in L} p_h t_{h,l} a_{h,l} z_l.$

Le théorème 8.1 s'étend sans difficulté à ce modèle avec taxation (alinéa 8.4.C), mais pas la proposition 8.2, en ce sens que, en général (§ 8.13), il n'existe pas de protocole de taxation u tel que les contraintes (8.27) ci-dessus soient équivalentes à la contrainte de maximisation du profit avec taxation (2.40), laquelle s'écrit ici,

(8.30) $z \in \text{Argmax} \{ p.Az' - u(p,Az') \mid z' \in R^L_+ \}.$

Cette propriété négative est liée à la dualité de définition de l'appareil nominatif (alinéa 8.3.D), en ce sens que la contrainte (8.27) est adaptée, correspond, à l'option avec un producteur par activité et non à celle avec un seul producteur correspondant à (8.30), ainsi que le laisse entendre l'argument suivant basé sur l'impératif de réalisme (alinéa 1.2.F) : la mise en oeuvre du procédé de taxation qu'exprime la contrainte (8.27) réclame que l'Etat ait connaissance du fonctionnement de toutes les activité $l \in L$, i.e. de leurs coefficients techniques et de leurs niveaux, afin de pouvoir déterminer le montant de la taxe R à percevoir, conformément à (8.29) ci-dessus ; or, dans l'option avec un seul producteur, une telle connaissance n'est pas réaliste, dans une problématique d'économie de marché, car elle concerne alors le fonctionnement interne du producteur ([8p]).

§ 8.4 - <u>MODELE DE SCARF</u> : <u>DEMONSTRATIONS</u>

(A) On établit d'abord directement le théorème 8.1 (alinéa 8.4.B), puis sa variante correspondant au modèle avec taxation (alinéa 8.4.C). On déduit ensuite du théorème 3.4 une variante affaiblie du théorème 8.1 basée sur les conditions (8.13) à (8.17) (alinéas 8.4.D-G). On établit enfin l'équivalence de ces conditions, i.e. la proposition 8.1 (alinéas 8.4.H,I). On suppose donné un modèle de Scarf par son appareil nominatif (H, L), sa fonction de demande excédentaire f et sa matrice technologique A.

(B) Afin d'établir le théorème 8.1, on va appliquer, ainsi que le suggère Scarf ([8d]), le théorème de Brouwer (A.27) au sous-ensemble convexe compact K_A de R^H défini par,

(8.31) $K_A = \{ p \mid p \in S_H \text{ et } pA \le 0 \}.$

Cet ensemble K_A étant non vide d'après la condition (8.11), le théorème de projection (A.28) fournit une application continue Φ de R^H sur K_A, l'opérateur de projection de R^H sur K_A (alinéa A.7.B), caractérisée par la propriété de projection (A.28b), qui s'écrit ici,

(8.32) $(y - \Phi(y)).(q - \Phi(y)) \le 0$, pour tous $y \in R^H$ et $q \in K_A$.

Cela étant, l'application g de K_A dans lui-même définie par,

(8.33) $g(p) = \Phi(p + f(p)) \quad (p \in K_A),$

est continue, comme le sont Φ et f, respectivement d'après le théorème de projection et la condition (8.9). Ainsi, le théorème de Brouwer (A.27), appliqué dans K_A à cette application g, entraîne l'existence de $p \in K_A$, tel que,

(8.34) $g(p) = p.$

Mais, d'après (8.32) avec $p + f(p)$ mis pour y, on a, puisque $\Phi(p + f(p)) = p$, d'après (8.33) et (8.34),

(8.35) $\quad f(p).(q - p) \leq 0,$ pour tout $q \in K_A$.

Donc, d'après la loi de Walras (8.10),

(8.36) $\quad f(p).q \leq 0,$ pour tout $q \in K_A$.

D'où, par définition (8.31) de K_A et par homogénéité par rapport à q,

(8.37) $\quad f(p).q \leq 0,$ pour tout $q \in R^H$ tel que $-q \leq 0$ et $qA \leq 0$.

Dès lors, le lemme de Farkas (B.27) entraîne l'existence de $y \in R^H_+$ et de $z \in R^L_+$ tels que,

(8.38) $\quad f(p) = -y + Az.$

Ainsi, le couple (p,z) vérifie, outre (8.1) et (8.2) par construction, d'une part (8.4), d'après (8.38), d'autre part (8.3a), par définition (8.31) de K_A, enfin (8.3b), comme conséquence de (8.1), (8.2), (8.3a), (8.4) et de la loi de Walras (8.10) (alinéa 8.1.D). D'où le le théorème 8.1.

(C) Pour étendre le théorème 8.1 au modèle de Scarf avec taxation (alinéa 8.3.F), il suffit d'appliquer ce théorème au modèle de Scarf sans taxation correspondant à la même fonction de demande excédentaire f et à la matrice technologique $A^T = (a^T_{h,l},\ h \in H, l \in L) \in R^{H\times L}$ définie par,

(8.39) $\quad a^T_{h,l} = (1 - t_{h,l})a_{h,l} \quad (h \in H, l \in L).$

En effet, d'après la condition (8.28), la matrice A^T est dominée par la matrice A en ce sens que,

(8.40) $\quad A - A^T \in R^{H\times L}_+.$

Ainsi, la condition de consistance (8.11) (pour le modèle initial) entraîne la même condition pour le modèle relatif à A^T. D'où l'existence d'un équilibre (p,z) pour ce modèle, d'après le théorème 8.1. Mais, ce couple (p,z) est aussi un équilibre pour le modèle avec taxation car il vérifie, d'une part (8.27) par définition (8.39) de A^T, d'autre part (8.4), puisque $A^Tz \leq Az$, d'après (8.40).

(D) On va maintenant déduire l'existence d'un équilibre (p,z) pour le modèle de Scarf du corollaire 3.6 et de la proposition 8.2, en supposant que la matrice technologique A vérifie la condition (8.14).

On commence par montrer que la classe $Ds(f,A)$ n'est pas vide, si l'appareil nominatif (H, I, J) sous-jacent à cette classe (alinéa 8.2.B) est tel que la nomenclature I, comme la nomenclature J, n'a qu'un seul élément noté i. Pour cela, on définit une fonction de demande excédentaire à survie (σ^i, f^i), de la forme (8.18), par,

(8.41a) $\quad \sigma^i(p) = -p.w \quad (p \in S_H),$

(8.41b) $\quad \underline{f}^i(p,s) = \dfrac{-s^- + p.w}{p.w} f(p) + \dfrac{s}{p.w} w \quad (p \in S_H,\ s \geq \sigma^i(p)),$ où,

(8.41c) $\quad w \in R^H_{++}$ est donné.

Le jeu de données d^* ainsi défini - par (8.41), (8.18b) et (8.20) - appartient à la classe $Ds(f,A)$ relativement à l'appareil nominatif (H, I, J) en cause, la relation (8.19) étant ici immédiate d'après (8.41b). Ainsi, en vertu de la proposition 8.2, pour montrer que le modèle de Scarf en cause admet un équilibre, il suffit de montrer l'existence d'un équilibre $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{p}, \mathbf{s}, \mathbf{b})$, relatif à ce jeu, vérifiant les contraintes (8.22), i.e., d'après (8.20), de la forme $\mathbf{e}(p,z)$, avec $p \in S_H$ et $z \in \mathbf{R}^L_+$. C'est ce qu'on va faire à partir du corollaire 3.6 par troncature de l'ensemble de production Y^j, vu qu'on ne peut pas appliquer directement le corollaire au jeu $\mathbf{d}^*$, car la condition de compacité (2.22) n'est pas satisfaite par l'ensemble de production définis par (8.20).

(E) En ce qui concerne la fonction de demande excédentaire à survie, univoque, (σ^i,f^i) les conditions requises par le corollaire 3.6 sont satisfaites, en ce sens qu'elle vérifie la condition de continuité (2.12), la condition de bornitude inf. (2.15) et la loi de Walras globale (2.16), en vertu, de la continuité (8.9) de f et de celle de la fonction $s \dashrightarrow s^- = \mathrm{Min}(s,0)$, de la condition (8.41c) sur w et de la loi de Walras (8.10) relative à f. On note, en particulier, que c'est l'occurrence de s^-, plutôt que de s, au second membre de (8.41b) qui assure, jointe à la continuité de f et à la compacité de S_H [propriété (A.9)], que la fonction $\underline{f}^i$ est bornée inférieurement.

On désigne par $\underline{x}$ un élément de R^H, qui existe en vertu de la bornitude inf. de la fonction $\underline{f}^i$, tel que,

(8.42a) $\underline{f}^i(p,s) \geq \underline{x},$ pour tous $p \in S_H$ et $s \in R$,

et on note que, puisque $\underline{f}^i(p,\sigma^i(p)) = -w$ pour tout $p \in S_H$, on a, d'après (8.41c) et par définition (2.7) de $\underline{X}(\sigma^i,f^i)$,

(8.42b) $\underline{x} \leq 0$ et (8.42c) $\underline{X}(\sigma^i,f^i) = \{-w\}$.

En ce qui concerne l'ensemble de production Y^j, on note d'abord que l'ensemble $R(A,\underline{x})$ défini par (8.15), qui n'est pas vide d'après (8.42b) puisqu'il contient l'élément 0, est borné, en vertu de la condition (8.14) sur A. Il existe donc $b \geq 0$ tel que,

(8.43) pour tout $z \in R^L_+$, $Az \geq \underline{x}$ entraîne $\|Az\| \leq b$,

en désignant par $\|.\|$ une norme sur R^H, par exemple la norme L^∞,

(8.44) $\|y\| = \mathrm{Max}\ \{\ \|y_h\|\ |\ h \in H\ \}\quad (y \in \mathbf{R}^H)$.

On définit alors l'ensemble de production tronqué $\underline{Y}^j$ par,

(8.45a) $\underline{Y}^j = \{\ Az\ |\ z \in \mathbf{R}^L_+$ et $\|Az\| \leq b'\ \}$, avec,

(8.45b) $b' = b + 1 + \mathrm{Max}\ \{\ \|Ae^l\|\ |\ l \in L\ \}$,

où $(e^l, l \in L)$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^L$. En particulier, d'après (8.43),

(8.46) pour tout $y \in \underline{Y}^j$, $y \geq \underline{x}$ entraîne $\|y\| \leq b$.

(F) Cela étant, désignant par $\underline{\mathbf{d}}^*$ le jeu de données tronqué, déduit du jeu $\mathbf{d}^*$ en remplaçant l'ensemble de production Y^j par l'ensemble tronqué $\underline{Y}^j$, il est facile de vérifier que ce jeu satisfait aux conditions du corollaire 3.6 assurant l'existence d'un équilibre strict : en ce qui concerne le caractère standard, le type convexe et la loi de Walras globale (2.16), cela résulte des propriétés de la fonction de demande excédentaire (σ^i,f^i) et de la forme des ensembles de production (alinéa 8.4.E) ; en ce concerne la condition de s-viabilité (3.30) qui équivaut ici d'après (8.42c) à l'existence de $y \in \underline{Y}^j$ tel que $-w \leq y$, elle est vérifiée d'après (8.41c), puique $0 \in \underline{Y}^j$; par ailleurs la condition de répartition de profits (3.17) est ici tautologique.

Ainsi, d'après le corollaire 3.6, il existe un équilibre strict $\mathbf{e} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{b})$ relatif au jeu tronqué $\underline{d}^*$. Dès lors, pour conclure (alinéa 8.4.D), il reste à monter que ce multiplet $\mathbf{e}$ est un équilibre relatif au jeu d^* vérifiant les contraintes (8.22).

Pour cela, on remarque d'abord que la contrainte (8.22a), i.e. $b^i = 0$, est vérifiée en vertu de ce que Card(I) = 1 et du caractère strict de l'équilibre, lequel, en l'absence de taxation [condition (8.21)], est exprimé par (3.29). Ainsi, on a $s^i = p.y^j$, d'après (3.21c), ce qui fait que pour établir ensuite que la contrainte (8.22b), i.e. $s^i = 0$, est vérifiée il suffit de monter que $p.y^j = 0$.

Or, d'une part, on a $p.y^j \geq 0$, d'après la contrainte de maximisation du profit (3.22), puique $0 \in \underline{Y}^j$. D'autre part, la contrainte d'équilibre physique (3.25), qui s'écrit ici $y^j \geq \underline{f}^i(p,s)$, entraîne, compte tenu de (8.42a) et de (8.46), que, $\|y^j\| \leq b$; d'où $p.y^j \leq 0$, par définition (8.45a) de $\underline{Y}^j$, car $p.y^j > 0$ entraînerait qu'en posant $y = \mu y^j$, avec $1 < \mu \leq b'/b$, eu égard à ce que $b' > b$ d'après (8.45b), on aurait $y \in \underline{Y}^j$ et $p.y > p.y^j$, ce qui contredirait la contrainte de maximisation du profit (3.22) relative à $\underline{Y}^j$.

Ainsi, le multiplet $\mathbf{e}$ est un équilibre relatif au jeu $\underline{d}^*$ vérifiant la contrainte (8.22). Dès lors, pour montrer que $\mathbf{e}$ est aussi un équilibre du jeu d^*, il suffit de montrer qu'il vérifie la contrainte de maximisation du profit (3.22) relative à Y^j, ou encore, en vertu de la condition nécessaire et suffisante de Kuhn et Tucker (B.26) (alinéa 8.2.D), de montrer que $pA \leq 0$, ce qui résulte de ce que, d'une part les vecteurs Ae^l ($l \in L$) appartiennent à $\underline{Y}^j$, par définition (8.45b) de b', d'autre part $p.y^j = 0$ et $p.y \leq 0$ pour tout $y \in \underline{Y}^j$.

(G) La démonstration précédente (alinéas 8.4.D-F) établit, en particulier, l'existence de jeux de données de la classe **Ds**(f,A) et, pour ces jeux, d'équilibres sans transfert (alinéa 3.6.F), vérifiant les contraintes (8.22) (alinéas 8.2.B,C). On souligne qu'elle ne fournit qu'un résultat plus faible que le théorème 8.1, puisqu'elle repose, en ce qui concerne la matrice technologique A, sur la condition (8.14) qui, d'après la proposition 8.1, est strictement plus forte que la condition (8.11) (alinéa 8.4.I).

Cette démonstration est explicitée ici, dans ce chapitre 8 consacré à des exemples, comme illustration formelle, à propos du modèle de Scarf, de la théorie générale des chapitres 2 à 5. Cependant, cette illustration est essentiellement formelle, en ce sens que la définition (8.41) d'une fonction de demande excédentaire (σ^i, f^i) vise seulement à exhiber un jeu de données de la classe **Ds**(f,A) auquel on puisse appliquer le corollaire 3.6, avant la proposition 8.2. Ainsi, il serait sans doute assez vain de chercher une interprétation économique à cette fonction et, plus généralement, au jeu de données monoconsommateur de cette classe qu'elle permet de définir. En particulier, du point de vue interprétation, un modèle multiconsommateur serait préférable ([8q]), mais l'argument permettant d'établir que les contraintes (8.22) sont vérifiées (alinéa 8.4.F) pose alors problème.

(H) L'équivalence des conditions (8.13), (8.14) et (8.16) relatives à la matrice technologique **A** résulte immédiatement de la caractérisation des ensembles convexes (fermés) bornés par la réduction à $\{0\}$ de leur cône asymptote ([8r]) et de ce que, d'une part le cône asymptote de l'ensemble **R**(A,x) est l'ensemble **R**(A,0), d'autre part ce dernier est non vide, puisqu'il contient $\mathbf{z} = 0$.

Avant d'établir l'équivalence des conditions (8.16) et (8.17), on remarque que la condition (8.17) est elle même équivalente à la condition,

(8.47) pour tout $h \in H$, il existe $p \in R_+^H$ tel que, (a) $p_h > 0$ et $pA \leq 0$.

En effet : il est clair que (8.17) entraîne (8.47) ; inversement, si, pour chaque $h \in H$, $p^h \in R_+^H$ vérifie (8.47a) avec p^h mis pour p, alors la somme p des p^h appartient à R_{++}^H et vérifie $pA \leq 0$.

Cela étant, pour montrer l'équivalence de (8.16) et de (8.17), il suffit de montrer que "(8.17) entraîne (8.16)" et que "non (8.47) entraîne non (8.16)". En ce qui concerne la première implication : soient $p \in R_{++}^H$ vérifiant $pA \leq 0$ et $z \in R_+^L$ tel que $Az \geq 0$; on a, d'abord $p.Az = pA.z \leq 0$, puis $p.Az \geq 0$; donc $p.Az = 0$; d'où $Az = 0$, puisque $p \in R_{++}^H$. En ce qui concerne la seconde : la négation de (8.47) entraîne l'existence de $h \in H$ tel que, pour tout $p \in R_+^H$, $pA \leq 0$ entraîne $p_h \leq 0$, i.e. tel que,

(8.48) pour tout $p \in R^H$, $-p \leq 0$ et $pA \leq 0$ entraîne $p_h \leq 0$;

dès lors, le lemme de Farkas (B.27) entraîne l'existence de y et z tels que,

(8.49) (a) $y \in R_+^H$, (b) $z \in R_+^L$, (c) $e^h = -y + Az$, où,

(8.50) $e^h = (e_k^h, k \in H) \in R_+^H$ est donné par $e_h^h = 1$ et $e_k^h = 0$ pour $k \neq h$;

mais, l'égalité (8.49c) peut être écrite sous la forme, $Az = e^h + y$, laquelle, conjuguée avec (8.49a) et (8.50) entraîne que $Az \neq 0$, donc, compte tenu de (8.49b), la négation de (8.16). Ce qui achève d'établir l'équivalence en cause.

(I) Il est facile de voir que la condition (8.17) est strictement plus forte que la condition (8.11). Par exemple, si Card(L) = 1, toute matrice ayant au moins un coefficient $a_{h,1} > 0$ et un coefficient $a_{k,1} \leq 0$ vérifie (8.11), puisque $e^kA \leq 0$, mais pas (8.17), puisque $p \in R_{++}^H$ entraîne $p_h a_{h,1} > 0$.

La difficulté de l'interprétation de cet exemple, tel quel, montre l'intérêt qu'aurait une expression de type primal de la condition, de type dual, (8.11), comme la condition (8.14) est une expression de type primal de la condition (8.17) (alinéa 8.1.F).

§ 8.5 - MODELES DE SCARF AVEC SURVIE ET PROFIT

(A) Comme préliminaire à l'étude de divers exemples (§ 8.6 à 8.8), on introduit ici une classe de jeux de données classiques qui généralisent ceux de la classe **Ds** correspondant au modèle de Scarf (§ 8.2) par la prise en compte de la survie des consommateurs et de bornes des niveaux d'activité. Dans ce cas particulier, on reprend ou détaille les diverses formulations de l'équilibre, comme illustration ou commentaire de la théorie générale.

(B) Les modèles en cause sont classiques (§ 3.6) et leur appareil nominatif (H, I, J) est du même type que ceux de la classe **Ds**, en ce sens que les nomenclatures de biens et de consommateurs, H et I, sont quelconques, tandis que,

(8.51) la nomenclature de producteurs privés J a un seul élément noté j.

Cela étant, on s'intéresse aux jeux de données classiques $\mathbf{d}^*$, de la forme (3.19) relativement à un tel appareil nominatif, qui vérifient les conditions (8.52) à (8.54) ci-après : les fonctions de demande excédentaires (σ^i, f^i) $(i \in I)$, univoques, sont de la forme définie par (6.12) et (6.9), en ce sens que, (8.52) (a) $\sigma^i(p) = p.d^i$ $(i\in I,\ p \in R^H_{+*})$,

(b) $f^i(p,s) = \{ d^i + \xi^i(p,\ s - p.d^i) \}$ $(i\in I,\ p \in R^H_{+*},\ s \geq p.d^i)$,

où, pour chaque $i\in I$, d^i et ξ^i sont donnés tels que,

(8.53) (a) $d^i \in R^H$, (b) ξ^i est une <u>fonction de demande</u>, relative à la nomenclature H (alinéa 6.1.A) ;

l'ensemble de production Y^j est engendré par une <u>analyse d'activité</u> basée, sur une nomenclature d'opérations O, une matrice technologique $A = (a_{h,o},\ h\in H, o\in O)$ et un ensemble d'organisation interne Z (alinéa 7.1.A), de sorte que,

(8.54) (a) $Y^j = A(Z)$, avec (b) Z est un sous-ensemble convexe compact non vide de R^O_+.

On désigne par **Dsb**(H,I,O), ou seulement **Dsb**, la classe (l'ensemble) de ces jeux de données. De plus, on dit qu'un tel jeu est de **taille** (n',n",n°) si,

(8.55) Card(H) = n', Card(I) = n", Card(O) = n°.

(C) Relativement au jeu de données $\mathbf{d}^*$ de la classe **Dsb**, un équilibre (**x**, **y**, p, **s**, **b**) (alinéa 3.6.C) peut être appréhendé comme un triplet (p, z, **b**), élément de $R^H_{+*} \times R^O_+ \times R^I$, grâce à la correspondance,

(8.56) (a) pour tout $i\in I$, $x^i = d^i + \xi^i(p,\ s^i - p.d^i)$,

(b) pour tout $i\in I$, $s^i = o^{i,j}p.Az + b^i$, (c) $y^j = Az$.

Ainsi, un triplet (p, z, **b**) correspond, via (8.56), à un équilibre, si et seulement s'il vérifie les contraintes (d'équilibre) sous forme réduite (8.57) à (8.60) ci-après, avec des soldes s^i $(i\in I)$ fournis par (8.56b),

(8.57) $p \in S_H$, (8.58) $z \in \operatorname{Argmax} \{ p.Az' \mid z' \in Z \}$,

(8.59) $s^i \geq p.d^i$, (8.60) $Az \geq \sum_{i\in I} [d^i + \xi^i(p,\ s^i - p.d^i)]$.

De plus, l'équilibre (p, z, **b**) est strict si et seulement si,

(8.61) $\sum_{i\in I} b^i = 0$.

Enfin, la condition de <u>s-viabilité</u> (3.30) s'écrit ici,

(8.62) il existe $z \in Z$ tel que $Az \geq \sum_{i\in I} d^i$.

puisque, pour chaque $i\in I$, $\underline{X}(\sigma^i,f^i) = \{d^i\}$, conformément à (6.14).

(D) Un jeu de données $\mathbf{d}^*$ de la classe **Dsb** est standard, de type convexe et ses fonctions de demande excédentaire (σ^i,f^i) $(i\in I)$ vérifient la loi de Walras globale. Ainsi, le corollaire 3.6 du théorème 3.4, entraîne que ([8s]),

(8.63) il existe un équilibre si et seulement si la condition de s-viabilité est satisfaite et, dans ce cas, il existe un équilibre strict.

On va appliquer et illustrer ce résultat général dans divers cas particuliers, en spécifiant davantage les fonctions de demande ξ^i $(i\in I)$ (alinéa 8.5.E) et pour de petites tailles (n',n",n°) qui permettent une explicitation des équilibres (§ 8.6 à 8.8).

(E) On désigne par **Dsbx**(H,I,O), ou seulement **Dsbx**, la sous-classe de la classe **Dsb**(H,I,O) formée des jeux de données $\mathbf{d}^*$ pour lesquels, pour chaque $i \in I$, les termes d^i et ξ^i [conditions (8.52) et (8.53)] sont de la forme,

$$(8.64) \quad (a) \quad d^i = v^i - w^i, \qquad (b) \quad \xi^i(p,r) = \frac{r}{p.v^i} v^i \qquad (p \in R^H_{+*},\ r \in R_+),$$

où les vecteurs $v^i = (v^i_h,\ h \in H)$ et $w = (w^i_h,\ h \in H)$ sont donnés tels que,

$$(8.65) \quad (a) \quad v^i \in R^H_{++}, \qquad (b) \quad w^i \in R^H_+,$$

les composantes v^i_h $(h \in H)$ de v^i et w^i_h $(h \in H)$ de w^i représentant respectivement les <u>consommations de survie</u> et les <u>dotations</u> du consommateur i (alinéa 6.2.C).

Dans ce cas, d'après (8.52) et (8.64), pour chaque $i \in I$, la fonction de demande excédentaire à survie (σ^i, f^i) est donnée par,

$$(8.66) \quad (a) \quad \sigma^i(p) = p(v^i - w^i) \qquad (p \in R^H_{+*}),$$

$$(b) \quad f^i(p,s) = \left\{ \frac{p.w^i + s}{p.v^i} v^i - w^i \right\} \qquad (p \in R^H_{+*},\ s \geq p.(v^i - w^i)).$$

§ 8.6 - <u>CAS D'UN SEUL CONSOMMATEUR</u> : <u>MULTIPLICITE DES EQUILIBRES</u>

(A) Afin de faire apparaître la multiplicité des équilibres (alinéa 5.1.A) dans des cas simples, on s'intéresse ici aux équilibres relatifs aux jeux de données $\mathbf{d}^*$ de la classe **Dsbx**(H,I,O) (alinéa 8.5.E) pour lesquels,

(8.67) la nomenclature de consommateuurs I a un seul élément noté i.

On note alors respectivement v et w les vecteurs v^i et w^i. Un <u>équilibre</u>, relatif à ce jeu de données, peut être appréhendé, via la correspondance (8.56), comme un triplet $(p,\ z,\ b) \in R^H_{+*} \times R^O_+ \times R$, vérifiant les contraintes (8.57) et (8.58), ainsi que la contrainte de survie du consommateur (alinéa 2.2.B),

(8.68) $p.w + p.Az + b \geq p.v$, et la contrainte d'équilibre physique,

$$(8.69) \quad Az + w \geq \frac{pw + p.Az + b}{p.v} v,$$

qui correspondant respectivement à (8.59) et (8.60). Pour un tel triplet (p, z, b), le transfert forfaitaire b (alinéa 3.2.F) vérifie,

(8.70) $b \leq 0$, et la contrainte d'équilibre <u>strict</u> (8.61) se réduit à,

(8.71) $b = 0$.

De plus, la condition de s-viabilité (8.62) s'écrit,

(8.72) il existe $z \in Z$ tel que (a) $Az + w \geq v$.

La relation (8.72a) sera appelée **contrainte de s-viabilité**.

(B) Pour chaque couple $(p,z) \in S_H \times R^O_+$, on définit le nombre $\underline{r}(p,z)$ par,

(8.73) $\underline{r}(p,z) = \underline{a}(z)(p.v)$, où le nombre $\underline{a}(z)$ est lui-même défini par,

$$(8.74) \quad \underline{a}(z) = \mathrm{Max}\ \{ \alpha \in R_+ \mid Az + w \geq \alpha v \},$$

le Max étant atteint d'après le théorème de Weierstrass (A.16). On a alors, par définition (8.74) de $\underline{a}(z)$, d'une part, (8.75) $\underline{r}(p,z) \leq p.w + p.Az$ pour tout $p \in S_H$ et tout $z \in R^O_+$, d'autre part,

(8.76) $p.v \leq \underline{r}(p,z)$ pour tout $p \in S_H$ et tout $z \in R^O_+$ vérifiant (8.72a).

Dès lors, les équilibres (p, z, b) quelconques, puis stricts, sont caractérisés par les énoncé (8.77), puis (8.78), ci-après qui découlent directement, des formulations (8.68) et (8.69) et des relations (8.73) à (8.76) :

(8.77) pour qu'un triplet $(p, z, b) \in S_H \times R^O_+ \times R$ corresponde à un équilibre, il faut et il suffit que, d'une part (a) le couple (p,z) vérifie la contrainte de maximisation du profit (8.58), d'autre part (b) le vecteur des niveaux d'activité z vérifie la contrainte de s-viabilité (8.72a), enfin le transfert b vérifie (c) $p.v \leq p.w + p.Az + b \leq \underline{r}(p,z)$.

(8.78) pour qu'un couple $(p,z) \in S_H \times R^O_+$, vérifiant les contraintes (8.58) et (8.72a), corresponde à un équilibre <u>strict</u>, il faut et il suffit que, (a) $\underline{r}(p,z) = p.w + p.Az$.

(C) Ces énoncés montrent que les équilibres non stricts correspondent aux couples (p,z) pour lesquels,

(8.79) $\underline{r}(p,z) < p.w + p.Az$,

ce qui fait apparaître leur multiplicité. Cette dernière participe ainsi de deux types d'indétermination : d'abord celle du couple (p,z) vérifiant seulement les contraintes (8.77a,b) [d'où découle que $p.v \leq \underline{r}(p,z)$, conformément à (8.75) et (8.76)], puis celle de b vérifiant (8.77c), lorsque (8.79) a lieu.

A propos du premier type d'indétermination, on note que, puisque la contrainte de s-viabilité (8.72a) ne dépend que de z, les choix de p et de z peuvent être, pratiquement, découplés lorsque, comme dans le modèle de Scarf, la contrainte de maximisation du profit (8.58) est vérifiée si pA = 0. On note aussi, à propos du second, que pour que l'inégalité (8.79) ait lieu, z étant donné, il suffit que p soit tel que $p \in R^H_{++}$ et que le vecteur $d = Az + w - [(p.w + p.Az)/(p.v)]v$ ne soit pas nul [en effet, par définition de $\underline{r}(p,z)$, $\underline{r}(p,z) = p.w + p.Az$ entraînerait $d \geq 0$, donc $d = 0$, puisque $p \in R^H_{++}$ et $p.d = 0$]. Ces deux remarques seront utilisées dans l'exemple traité au § 8.7 (alinéa 8.7.G).

§ 8.7 - <u>EQUILIBRES STRICTS D'UN PETIT MODELE</u>

(A) S'intéressant ici à des jeux, de la classe **Dsbx**, de taille (3,1,1) (alinéas 8.5.B,E), on explicite, pour certaines valeurs des paramètres en cause, tous les équilibres stricts. Outre les conditions de survie, cette explicitation permet d'illustrer comment des bornes de l'activité du producteur font apparaître un profit non nul pour ce dernier (alinéa 8.7.C).

(B) La nomenclature de <u>biens</u> H, qui comporte trois postes, est de la forme,

(8.80) $H = \{ a, b, c \} = H^* \cup H^\circ$, avec $H^* = \{ a, b \}$ et $H^\circ = \{ c \}$,

les postes $h \in H^*$ représentant des <u>facteurs de production</u> et le poste c un <u>produit</u>. La nomenclature d'<u>opérations</u> O comporte aussi un seul poste, noté o, ce qui fait que, d'après (8.54b), l'ensemble d'organisation interne Z peut être identifié à un intervalle compact $[\underline{z},\underline{\underline{z}}]$ de R_+, supposé tel que,

(8.81) $0 \leq \underline{z} < \underline{\underline{z}}$. Enfin, la matrice $A = (a_{h,o}, h \in H)$ est donnée par,

(8.82) $a_{h,o} = -1$, si $h \in H^*$, et $a_{c,o} = 1$, ce qui fait que l'ensemble de production Y^j est donné par,

(8.83) $\quad Y^j = \{ y \mid y \in \mathbf{R}^H \text{ et } \exists\, z \in Z,\ y_a = -z,\ y_b = -z,\ y_c = z \}.$

(C) Conformément à (8.65), avec, comme au § 8.6, v et w mis pour v^i et w^i, on suppose que,

(8.84) $\quad$ (a) $v \in \mathbf{R}^H_{++}$, $\quad$ (b) $w \in \mathbf{R}^H_{+}$, $\quad$ (c) $w_c = 0$,

ce qui fait que la condition de s-viabilité (8.72) s'écrit ici,

(8.85) $\quad$ (a) $\mathrm{Max}(v_c, \underline{z}) \le v_h - w_h$ pour tout $h \in H^*$, $\quad$ (b) $v_c \le \underline{\underline{z}}$.

De plus, on suppose que,

(8.86) $\quad \underline{w}_a < \underline{w}_b$, $\quad$ en définissant les paramètres réduits $\underline{w}_h$ $(h \in H^*)$ par,

(8.87) $$\underline{w}_h = \frac{v_c w_h}{v_h + v_c} \quad (h \in H^*).$$

Les <u>équilibres stricts</u> sont alors caractérisés par l'énoncé (8.88) ci-après et son corollaire (8.89), qui fait apparaître l'influence des bornes d'activité $\underline{z}$ et $\underline{\underline{z}}$ sur le profit p.Az (alinéa 8.7.A).

(8.88) Pour qu'il existe un équilibre strict, il faut et il suffit que la condition de s-viabilité (8.85) soit vérifié. Dans ce cas, pour que le couple $(p,z) \in S_H \times \mathbf{R}$ soit un tel équilibre, il faut et il suffit que :

(a) $p_c = 1$ et $z = \underline{\underline{z}}$, si $\underline{\underline{z}} < \underline{w}_a$;

($\underline{a}$) $p_a \in [0,1/2]$, $p_b = 0$ et $z = \underline{w}_a$, si $\underline{\underline{z}} = \underline{w}_a$;

(b) $p_a = p_c = 1/2$, $p_b = 0$, $z = \underline{w}_a$, si $\underline{z} < \underline{w}_a < \underline{\underline{z}}$;

($\underline{b}$) $p_c \in [0,1/2]$, $p_b = 0$, $z = \underline{w}_a$, si $\underline{z} = \underline{w}_a$;

(c) $p_a = 1$ et $z = \underline{z}$, si $\underline{w}_a < \underline{z} \le \underline{w}_b$ [8t].

(8.89) sous la condition de s-viabilité (8.85), (a) l'équilibre est unique dans les cas (8.88a,b,c), (b) l'ensemble des équilibres est convexe dans les cas limite (8.88$\underline{a}$,$\underline{b}$), (c) on a p.Az > 0, dans le cas (8.88a), p.Az = 0, dans le cas (8.88b), p.Az < 0, dans le cas (8.88c), si $\underline{z} > 0$.

(D) La démonstration de l'énoncé (8.88) peut s'appuyer sur la conséquence (8.92) du théorème de Kuhn et Tucker et sur les formules (8.96) qui permettent d'unifier et de systématiser le traitement des divers cas (alinéa 8.7.E). Au préalable, on note que, puique Card(O) = 1 et d'après (8.82),

(8.90) $\quad$ (a) $pA \in \mathbf{R}$ $\quad$ et $\quad$ (b) $pA = p_c - p_a - p_b$. $\quad$ En particulier,

(8.91) $\quad$ pour tout $p \in S_H$, $pA \ge 0$ $\quad$ entraîne $\quad p_c > 0$.

La condition nécessaire et suffisante de Kuhn et Tucker (B.26), donne ici :

(8.92) pour que qu'un couple $(p,z) \in S_H \times \mathbf{R}$ vérifie la contrainte (8.58), il faut et il suffit que $z \in [\underline{z}, \underline{\underline{z}}]$ et que, soit (a) $pA > 0$ et $z = \underline{\underline{z}}$, soit (b) $pA = 0$, soit (c) $pA < 0$ et $z = \underline{z}$.

Pour chaque couple $(p,z) \in S_H \times \mathbf{R}$, on désigne par $\underline{d}(p,z) = (\underline{d}_h(p,z),\ h \in H)$ le vecteur de $\mathbf{R}^H$ qui est la différence des deux membres de (8.69), i.e., (8.93) $\quad \underline{d}(p,z) = Az + w - \dfrac{p.Az + p.w}{p.v} v,$ et on définit $\delta(p,z) \in \mathbf{R}$ par,

(8.94) $\quad \delta(p,z) = (v_a + v_c)v_b(z - \underline{w}_a) + (v_b + v_c)v_a(\underline{w}_b - z).$

On a alors, en particulier, l'implication,

(8.95) pour chaque couple $(p,z) \in S_H \times \mathbf{R}$,

(a) $\underline{d}(p,z) \geq 0$ et $p_c > 0$ entraîne $\underline{d}_c(p,z) = 0$,

ainsi que les formules (8.96) qui concentrent l'aspect combinatoire ([8u]).

(8.96) pour chaque $(p,z) \in S_H \times \mathbf{R}$, on a :

(a) $\underline{d}_a(p,z) = \dfrac{1}{p.v} \left[\dfrac{-p_b}{v_c} \delta(p,z) - p_c(v_a + v_c)(z - \underline{w}_a) \right]$;

(b) $\underline{d}_b(p,z) = \dfrac{1}{p.v} \left[\dfrac{p_a}{v_c} \delta(p,z) - p_c(v_b + v_c)(z - \underline{w}_b) \right]$;

(c) $\underline{d}_c(p,z) = \dfrac{1}{p.v} \left[(v_a + v_c)p_a(z - \underline{w}_a) + (v_b + v_c)p_b(z - \underline{w}_b) \right]$;

(d) $\underline{d}_c(p,z) = 0$ entraîne

pour tout $h \in H_*$, $\underline{d}_h(p,z) = (v_h + v_c)(\underline{w}_h - z)$.

(E) En conjuguant les remarques (8.90), (8.91) et (8.95), l'énoncé (8.92) et les formules (8.96), on obtient l'énoncé (8.88) par de simples vérifications, en examinant les divers cas.

Par exemple, si le couple $(p,z) \in S_H \times \mathbf{R}$ est un équilibre tel que $pA \geq 0$, on a, $p_c > 0$, d'après (8.91), donc $\underline{d}_c(p,z) = 0$, d'après (8.95), puis $\underline{w}_h - z \geq 0$ $(h \in H^*)$, d'après (8.96d). D'où la condition nécessaire dans les cas (8.88a,$\underline{a}$,b), d'après (8.96c), (8.92a,b) et la condition (8.86). Inversement, on vérifie que, dans ces cas, la condition est suffisante en utilisant de nouveau les formules (8.96c,d), ainsi que (8.92a,b). On note que la condition de s-viabilité (8.85) n'intervient pas dans ce raisonnement.

On traite de façon analogue le cas d'un équilibre pour lequel $pA \leq 0$, mais en s'appuyant aussi sur les formules (8.96a,b), après avoir remarqué que la condition $\underline{w}_a < \underline{z}$ entraine que $p_c = 0$, comme ci-dessus d'après (8.91), (8.95) et (8.96d), mais ici par contraposition.

(F) La disparité entre le caractère laborieux de la démarche précédente [malgré l'introduction des formules (8.96)], et la simplicité [pour ne pas dire le simplisme économique ([8v])] de son résultat (8.88) amène à poser la question d'une démarche moins laborieuse, en particulier, d'une démarche permettant de voir directement que, sous la condition (8.86), on a $p_b = 0$ pour tout équilibre. A ce propos, on souligne le lien de la propriété de convexité obtenue pour l'ensemble des équilibres [énoncés (8.78a,b] avec la condition WA de Mas-Colell (alinéas 8.8.D,E).

(G) Pour obtenir un équilibre <u>non strict</u> relatif à un jeu de donnée du type en cause dans ce §, il suffit de choisir les vecteurs v et w tels que,

(8.97) (a) $v_a \neq v_b$ et (b) $w_a = w_b$.

En effet, cette condition entraine que, pour tout couple $(p,z) \in S_H \times Z$, on a, $\underline{d}_a(p,z) \neq \underline{d}_b(p,z)$, donc $\underline{d}(p,z) \neq 0$, ce qui fait que l'inégalité stricte (8.79) a lieu dès que $p \in R^H_{++}$ (alinéa 8.6.C). Ainsi, le triplet (p, z, b) est un équilibre non strict si, d'une part $p \in R^H_{++}$ et $p_c - p_a - p_b = 0$, d'autre part z appartient à $[\underline{z},\underline{\underline{z}}]$ et vérifie (8.72a), enfin, par exemple, $b = \underline{r}(p,z) - p.w + p.Az$.

§ 8.8 - UN EXEMPLE D'ENSEMBLE FINI D'EQUILIBRES STRICTS

(A) S'intéressant ici aux jeux de données de la classe **Dsb** (§ 8.5) pour lesquels l'ensemble E des équilibres stricts est fini et non réduit à un élément, donc en particulier est non convexe (alinéa 5.3.C), on explicite un tel jeu de la classe **Dsbx** (alinéa 8.8.B,C), puis on indique comment la recherche de ces jeux est liée à la condition WA de Mas-Colell (alinéa 8.8.D,E) [8w].

(B) Voici un jeu de données de la classe **Dsbx**, de taille (4,2,2) et pour lequel Card(E) = 3. Les nomenclatures de biens H, d'opérations O et de consommateurs I, qui comportent respectivement quatre et deux postes, sont de la forme,

(8.98) (a) $H = \{ a, b, c, d \} = H^* \cup O$, avec,

(b) $H^* = \{ a, b \}$ et (c) $O = \{ c, d \}$,

(c) $I = \{ k, l \}$, avec les interprétations,

Int. (8.99) les postes $h \in H^*$ représentent les facteurs de production et les poste $h \in O$ les activités de production, ainsi que les produits correspondants.

Les vecteurs de consommations de survie v^i et de dotations w^i $(i \in I)$, ainsi que la matrice technologique $A = (a_{h,o}, h \in H, o \in O)$, sont donnés par,

(8.100) $v^k_a = v^k_b = v^k_d = 1$, $v^k_c = 3$, $v^l_a = v^l_b = v^l_c = 1$, $v^l_d = 3$,

(8.101) $w^k_a = 20$, $w^k_b = 6$, $w^l_a = 6$, $w^l_b = 20$, $w^k_c = w^k_d = w^l_c = w^l_d = 0$,

(8.102) $a_{a,c} = -2$, $a_{b,c} = -1$, $a_{c,c} = 1$, $a_{d,c} = 0$,

$a_{a,d} = -1$, $a_{b,d} = -2$, $a_{c,d} = 0$, $a_{d,d} = 1$ [8x].

Enfin, l'ensemble d'organisation interne $Z \subset R^O_+$ est défini par,

(8.103) (a) $Z = \{ z \in R^O_+ \mid 0 \leq z_c \leq \underline{\underline{z}}$ et $0 \leq z_d \leq \underline{\underline{z}} \}$, avec,

(b) $\underline{\underline{z}} > 17/2$.

On note que ces définitions des termes v^i, w^i $(i \in I)$ et A sont, eu égard à l'impératif de réalisme (alinéa 1.2.F), en accord avec la structure (8.98) de l'appareil nominatif (H,I,O) et son interprétation (8.99), en ce sens que, d'une part les dotations en produits sont nulles, d'autre part ce sont les facteurs de production qui sont consommés par les activités, enfin chaque activité fournit un produit et un seul. Au demeurant, ces deux dernières caractéristiques sont à la base de la démarche conduisant aux équilibres (alinéa 8.8.C).

(C) Le jeu de données de la classe **Dsbx** défini par les relations (8.98) et (8.100) à (8.103) possède exactement trois équilibres stricts correspondant aux couples (p',z'), (p",z") et (p°,z°) donnés par,

(8.104) $p'_a = 0$, $p'_b = 1/4$, $p'_c = 1/4$, $p'_d = 1/2$, $z'_c = 11/2$, $z'_d = 17/2$,

(8.105) $p''_a = 1/4$, $p''_b = 0$, $p''_c = 1/2$, $p''_d = 1/4$, $z''_c = 17/2$, $z''_d = 11/2$,

(8.106) (a) $p^\circ_a = 1/8$, $p^\circ_b = 1/8$, $p^\circ_c = 3/8$, $p^\circ_d = 3/8$, $z^\circ_c = z^\circ_d = 52/7$.

De plus, pour les trois vecteurs de prix p, on a, $pA = 0$.

Que les relations (8.104) à (8.106) définissent des équilibres stricts réclame une simple vérification [8Y]. Que ces équilibres soient les seuls peut être établi par la démarche de réduction à la détermination des équilibres d'une économie d'échange que permet la structure particulière, de type de Leontief, de la matrice technologique A [8Z]. On note que l'ensemble d'organisation interne Z ne joue aucun rôle dans cette démarche, qui concerne le modèle de Scarf, si ce n'est que cet ensemble doit être assez vaste pour que ses limitations n'interviennent pas [d'où la condition (8.103b) sur $\underline{\underline{z}}$].

(D) Le résultat précédent, concernant les jeux de la classe Dsbx, repose de façon cruciale sur la condition (8.98c) selon laquelle $\mathrm{Card}(I) > 1$. Plus précisément, pour tous les jeux de données de cette classe tels que $\mathrm{Card}(I) = 1$, i.e. pour les jeux étudiés aux § 8.6 et 8.7, l'ensemble des vecteurs p d'équilibre strict tels que $pA = 0$ est convexe, ce qui exclut qu'il soit fini et non réduit à un élément. Cela résulte de ce que la fonction de demande excédentaire f du modèle de Scarf sous-jacent, application de R^H_{+*} dans R^H de la forme,

$$(8.107) \quad f(p) = \frac{p.w}{p.v} v - w \quad (p \in R^H_{+*}), \quad \text{avec} \quad v \in R^H_{++} \quad \text{et} \quad w \in R^H_{+},$$

vérifie la condition WA de Mas-Colell, i.e. [8A],

(8.108) pour tous $p \in R^H_{+*}$ et $q \in R^H_{+*}$,

(a) $q.f(p) \leq 0$ et $p.f(q) \leq 0$ entraîne $f(p) = f(q)$.

(E) Plus généralement, les fonctions de demande excédentaire f de la forme,

$$(8.109) \quad \text{(a)} \quad f(p) = \sum_{k \in K} [\mu_k \frac{p.w}{p.v^k} v^k] - w \quad (p \in R^H_{+*}), \quad \text{avec,}$$

(b) $(\mu_k,\ k \in K) \in S_K$, (c) $v^k \in R^H_{++}$ $(k \in K)$, (d) $w \in R^H_{+}$, donnés,

où K est un ensemble fini d'indices, vérifient aussi la condition WA [8B]. Il est donc exclu que l'ensemble des vecteurs p d'équilibre strict tels que $pA = 0$ soit fini et non réduit à un élément, pour les jeux de données de la classe Dsb tels que, d'une part $\mathrm{Card}(I) = 1$, d'autre part $d^i \in - R^H_{+}$ et la fonction de demande ξ^i est de la forme,

$$(8.110) \quad \text{(a)} \quad \xi^i(p,r) = \sum_{k \in K} \mu_k \frac{r}{p.v^k} v^k \quad (p \in R^H_{+*},\ r \in R_{+}), \quad \text{avec,}$$

(b) $(\mu_k,\ k \in K) \in S_K$, (c) $v^k \in R^H_{++}$ $(k \in K)$, donnés [8C].

Toutefois, la condition WA peut aussi ne pas être satisfaite, ce qui autorise les questions envisagées au § 8.9.

§ 8.9 - UNE APPROCHE DE LA TAXATION SELECTIVE

(A) Revenant ici sur la problématique de la taxation sélective (alinéa 5.3.G), on l'inscrit dans le cadre d'un modèle de Scarf à un consommateur avec taxation du producteur (alinéa 8.3.F), afin de poser relativement à ce modèle des questions, de type mathématique, qui pourraient intéresser certains spécialistes, en particulier, au-delà de l'économie mathématique, de géométrie algébrique (alinéa 8.9.E). Pour faciliter l'accès à ces questions, elles sont présentées de façon formellement indépendante du reste du texte, mis à part les alinéas 2.1.A,B pour ce qui est des notations, le § 6.1 pour la définition d'une fonction de demande et, éventuellement, le § 8.1.

(B) Désignant par H et L des nomenclatures, à priori, quelconques (alinéas 2.1.B et 8.1.B), un jeu de données **de constitution** (du modèle en cause) est un multiplet (d, ξ, A), où, d est un élément de R^H, ξ une fonction de demande relative à la nomenclature H (alinéa 6.1.A), $A = (a_{h,l}, h \in H, l \in L) \in \mathbf{R}^{H \times L}$ une matrice technologique, tandis qu'une jeu de données **avec taxation** est un multiplet (d, ξ, A, T), où (d, ξ, A) est un jeu de données de constitution, tandis que $T = (t_{h,l}, h \in H, l \in L) \in R^{H \times L}$ est une matrice de taxation vérifiant la condition (8.28). Un **équilibre** relatif à un tel jeu (d, ξ, A, T) est entendu ici comme un couple $(p,z) \in S_H \times R^L_+$ tel que ([8D]),

(8.111) (a) $pA^T \leq 0$, (b) $p.A^Tz = 0$,

(c) $p.d \leq 0$, (d) $Az \geq d + \xi(p, -p.d)$,

où A^T désigne la matrice $((1 - t_{h,l})a_{h,l}, h \in H, l \in L)$. On désigne, par $Eq(d,\xi,A,T)$ l'ensemble des équilibres relatif au jeu (d, ξ, A, T), par $Eqz(d,\xi,A,T)$ la projection sur R^L_+ de l'ensemble $Eq(d,\xi,A,T)$, par $Eq(d,\xi,A)$ [resp. $Eqz(d,\xi,A)$] l'ensemble $Eq(d,\xi,A,T)$ [resp. $Eqz(d,\xi,A,T)$] pour $T = 0$.

(C) Dans ce cadre, on envisage, pour la question de la taxation sélective, plusieurs formulations s'appuyant sur les diverses conditions (8.112) à (8.115) ci-après imposées aux jeux de données (d, ξ, A) et (d, ξ, A, T) :

(8.112) $Card(Eq(d,\xi,A)) > 1$;

(8.113) $Eq(d,\xi,A)$ est fini ;

(8.114) $Eqz(d,\xi,A,T) \subset Eqz(d,\xi,A)$, avec inclusion stricte ;

(8.115) $Eq(d,\xi,A,T)$ est un singleton.

Cela étant, la **formulation faible** (Q1a) [resp. renforcée (Q1b) ; renforcée (Q1c)] de la propriété en question consiste en ce que le jeu de données avec taxation (d, ξ, A, T) vérifie (8.112) et (8.114) [resp. (8.112), (8.113) et (8.114) ; (8.112) à (8.115)], tandis que la **formulation forte** (Q2a) [resp. renforcée (Q2b)] consiste en ce que, d'une part le jeu de données de constitution (d, ξ, A) vérifie (8.112) [resp. (8.112) et (8.113)], d'autre part, désignant par $Z°$ un sous-ensemble non vide de $Eq(d,\xi,A)$ donné, pour tout $z \in Z°$, il existe une matrice de taxation T telle que le jeu (d, ξ, A, T) vérifie (8.114) [resp. (8.114) et (8.115)] et que $z \in Eqz(d,\xi,A,T)$ [resp. $Eqz(d,\xi,A,T) = \{z\}$]. Dans la formulation forte, l'ensemble $Z°$ est à préciser, la formulation la plus forte correspondant évidemment à $Z° = Eqz(d,\xi,A)$.

(D) Lorsque l'appareil nominatif, de taille (3,1,1), et la matrice A sont ceux du jeu étudié au § 8.7, le vecteur d étant défini par,

(8.116) (a) $d = -w$, où $w \in R^H_+$ est tel que, au-delà de (8.84b,c),

(b) $w_a > 0$, $w_b > 0$ et $w_c = 0$,

on peut montrer ([8E]) que, étant donnés, d'une part un sous-ensemble fini E de $S_H \times R^L_+$ tel que,

(8.117) $pA \leq 0$ et $p.Az = 0$ pour tout $(p,z) \in E$, d'autre part un élément (p°, z°) de E, il existe une fonction de demande ξ telle que le jeu de données avec taxation (d, ξ, A, T) vérifie la propriété (Q1c), avec,

(8.117) (a) $Eq(d,\xi,A) = E$ et (b) $Eqz(d,\xi,A,T) = \{z^\circ\}$.

Outre qu'il ne concerne que la formulation faible, dans un cas très particulier, le résultat précédent est insatisfaisant pour deux raisons. D'une part la survie du consommateur est ignorée, conformément à la condition (8.116a). D'autre part et surtout, la fonction de demande ξ n'est pas obtenue par une construction explicite, mais par une application du théorème de prolongement de Tietze-Urysohn ([8F]).

(E) Au-delà des insuffisances de cet exemple, en particulier de la seconde, la **question** qui motive ce § est celle de la recherche de jeux de données de constitution (d, ξ, A) (alinéa 8.9.B) donnant lieu à la formulation forte, en particulier et essentiellement de fonctions de demande ξ <u>explicitement</u> définies ou caractérisées. Cette recherche pourrait relever, au-delà de la théorie des économies régulières et des méthodes de la topologie différentielle qui y interviennent, de celles de la géométrie algébrique, pour étudier de telles classes de "fonctions spéciales".

§ 8.10 - <u>UN EXEMPLE SANS EQUILIBRE STRICT</u>

(A) On construit ici un jeu de données classique $\mathbf{d}^*$ (§ 3.6) relativement auquel il existe un équilibre mais pas d'équilibre strict (alinéa 5.1.A). L'appareil nominatif (H, I, J) comporte une nomenclature de biens H quelconque, un seul consommateur noté i et un seul producteur noté j. La propriété annoncée va résulter de la disparité entre une limitation, pour le consommateur, de la possibilité de consommer et la disposition, par le producteur, d'un stock de biens de consommation pratiquement illimité, mais tel que tout déstockage consomme un bien (facteur, travail) fourni seulement par le consommateur.

(B) La fonction de demande excédentaire (σ^i, f^i) et l'ensemble de production Y^j du jeu $\mathbf{d}^*$ en cause vont être définis à partir des données de départ constituées par des vecteurs q, d de R^H et une fonction de demande excédentaire à survie (σ°, f°), que l'on suppose tels que :

(8.118) (a) $q \in S_H \cap \mathbf{R}^H_{++}$, (b) $q.d < 0$;

(8.119) (σ°, f°) vérifie les conditions de continuité (2.12) et de convexité (2.13), ainsi que la loi de Walras globale (2.16) ;

(8.120) (a) $\sigma^\circ(p) = p.d$;

(b) $\underline{X}(\sigma^\circ, f^\circ) = \{d\}$, (c) $X(\sigma^\circ, f^\circ) \subset \{d\} + \mathbf{R}^H_+$.

Qu'il existe des vecteurs q et d vérifiant les conditions (8.118) est immédiat et, à partir de ces vecteurs, on obtient, par exemple, un fonction (σ°, f°) vérifiant les conditions (8.119) et (8.120) en prenant (σ°, f°) univoque de la forme définie par (6.12) et (6.9), i.e. de la forme définie par (8.52) et (8.53).

(C) Cela étant, on définit la fonction de demande excédentaire (σ^i, f^i) par troncature de la fonction (σ°, f°) (proposition 2.3), i.e. par,

(8.121) (a) $\sigma^i = \sigma^\circ$, (b) $f^i(p,s) = f^\circ(p, \mathrm{Min}(s, \delta(p))$ $(p \in \mathbf{R}^H_{+*},\ s \in \mathbf{R})$, où δ est une fonction numérique sur R^H_{+*}, homogène de degré un, continue et telle que,

(8.122) (a) $\sigma(p) \leq \delta(p)$ pour tout $p \in R^H_{+*}$, (b) $\delta(q) < 0$,

l'existence d'une telle fonction δ étant assurée par la condition (8.118b), ne serait-ce qu'en prenant $\delta = \sigma$. De plus, d'après la condition (8.120b) et la proposition 2.3, on a,

(8.123) (a) $\underline{X}(\sigma^i,f^i) = \{d^i\}$, (b) $X(\sigma^i,f^i) \subset \{d^i\} + R^H_+$.

D'autre part, on requiert de l'ensemble de production Y^j qu'il vérifie les conditions,

(8.124) (a) Y^j est convexe compact, (b) $q.y = 0$ pour tout $j \in Y^j$,

(8.125) il existe $y \in Y^j$ tel que (a) $d \leq y$,

(8.126) pour tout couple $(p,y) \in S_H \times Y^j$,

$$y \in \text{Argmax}\{\, p.y' \mid y' \in Y^j \,\} \text{ et } d \leq y \text{ entraîne } p = q.$$

L'existence, le vecteur q étant donné vérifiant (8.118a), d'un vecteur d et d'un ensemble Y^j vérifiant ces conditions est établie à l'alinéa 8.10.E.

(D) Sous les conditions (8.118) à (8.122) et (8.124) à (8.126), le jeu de données d^* a la propriété annoncée (alinéa 8.10.A). D'abord, l'existence d'un équilibre résulte directement du corollaire 3.6. En effet, d'une part, d'après les conditions (8.119) et (8.124a), le jeu est standard, de type convexe, et la fonction de demande excédentaire (σ^i,f^i) vérifie la loi de Waras locale (2.17) en vertu de la proposition 2.3, d'autre part ce jeu vérifie la condition de s-viabilité (3.30) d'après la relation (8.123a) et la condition (8.125), enfin la condition de répartition des profits (3.17) est ici tautologique.

Ensuite, tout équilibre (classique) est non strict. Un équilibre étant identifié à un multiplet (x^i, y^j, p, s^i, b^i), élément de $R^H \times R^H \times S_H \times R \times R$, qui vérifie les contraintes (alinéa 3.6.C),

(8.127) (a) $s^i \geq \sigma^i(p)$, (b) $x^i \in f^i(p,s^i)$, (c) $s^i = p.y^j + b^i$,

(8.128) $y^j \in \text{Argmax}\{\, p.y \mid y \in Y^j \,\}$,

(8.129) $b^i = p.y^e$, (8.130) $x^i \leq y^j$, où,

(8.131) $y^e = x^i - y^j$, il s'agit de montrer que,

(8.132) $b^i < 0$.

En effet, on a successivement. D'abord : $d \leq y^j$, d'après les contraintes (8.127b), (8.130) et la relation (8.123) ; $p = q$, d'après la contrainte (8.128) et la condition (8.126) ; $p.y^j = 0$, d'après la condition (8.124b) ; $s^i = b^i$ et $s^i = p.x^i$, d'après les contraintes (8.127c), (8.129) et la relation (8.131). Ensuite : $x^i \in f^\circ(p,\text{Min}(s^i,\delta(p)))$, d'après la contrainte (8.127b) et la définition (8.121b) ; $p.x^i = \text{Min}(s^i,\delta(p))$, d'après la loi de Walras globale pour (σ°,f°) [condition (8.119)] ; $s^i = \text{Min}(s^i,\delta(p))$. D'où $s^i \leq \delta(p) = \delta(q)$ et l'inégalité (8.132), d'après la condition (8.122b).

(E) Pour montrer l'existence, le vecteur q étant donné vérifiant (8.118a), d'un vecteur d et d'un ensemble ensemble Y^j vérifiant les conditions (8.124) à (8.126), on peut chercher Y^j de la forme, (8.133) $\quad Y^j = \{ y \in R^H \mid q.y = 0, \; -M_{h°} \le y_{h°} \le 0$

$\quad$ et $\; 0 \le y_h \le M_h$ pour tout $h \in H\backslash\{h°\} \}$,

où h° est un élément fixé de la nomenclature H et où les M_h ($h\in H$) sont des nombres > 0 qu'il s'agit de déterminer. En fait, cet ensemble Y^j convient dès que, d'une part le vecteur d vérifie, outre la condition (8.118b),

(8.134) $\quad$ (a) $d_{h°} < 0$, $\quad$ (b) $d_h > 0$ pour tout $h \in H\backslash\{h°\}$,

d'autre part les nombres M_h ($h\in H$) vérifient,

(8.135) $\quad$ (a) $M_{h°} > -d_{h°}$, $\quad$ (b) $M_h > -(q_{h°}/q_h)d_{h°}$ $\quad$ pour tout $h \in H\backslash\{h°\}$.

Pour établir ce résultat, on peut s'appuyer sur la condition nécessaire de Kuhn et Tucker (B.26) appliquée au programme linéaire correspondant au premier membre de l'implication (8.26) et remarquer que l'inégalité $d \le y$ et la condition (8.134b) entraînent que $y_h > 0$ pour $h\in H\backslash\{h°\}$, ce qui fait que les multiplicateurs associés aux contraintes $y_h \ge 0$ ($h\in H\backslash\{h°\}$) sont nuls et conduit aux conditions (8.135), de nouveau d'après l'inégalité $d \le y$ et compte tenu de la condition (8.118a) sur le vecteur q, en explicitant la contrainte $q.y = 0$.

Cette construction permet de préciser l'interprétation de cet exemple en termes de stock, de déstockage et de limitation de la consommation (alinéa 8.10.A) : le poste h° de H représente le facteur de production et les autres postes $h\in H\backslash\{h°\}$ les biens de consommation ; les quotients $q_h/q_{h°}$ représentent les coefficients techniques de déstockage, via la contrainte $q.y = 0$; enfin, la limitation de la consommation est représentée par la fonction δ, via la définition (8.121) de la fonction (σ^i, f^i) par troncature.

§ 8.11 - CAS DES ECONOMIES D'ECHANGE

(A) Considérant ici le cas des économies d'échange, on reprend dans ce cas les résultats concernant l'existence de l'équilibre, en insistant sur le rôle de la condition de s-viabilité (alinéas 8.11.B,C), et on situe ces résultats par rapport à ceux de la théorie classique (alinéas 8.11.D,E). On envisage ensuite ce qu'il en est lorsque les fonctions de demande excédentaire ne sont pas bornées inférieurement (alinéa 8.11.F).

(B) Un jeu de données **d** [de la forme (3.1a)] correspond à, représente, une économie d'échange (pur) si, d'une part la nomenclature des producteurs privés J n'a qu'un seul poste, j, et l'ensemble de production Y^j est réduit au singleton {0}, d'autre part on a $Y^e = -R^H_+$. Dans ce cas, un **équilibre** peut être identifié à un multiplet (**x**, p, **b**), élément de $R^{HxI} \times S_H \times R^I$, avec $\mathbf{x} = (x^i, i\in I)$ et $\mathbf{b} = (b^i, i\in I)$, tel que,

(8.136) $\quad$ pour tout $i\in I$, $\quad$ (a) $b^i \ge \sigma^i(t^i(p,x^i))$,

$\quad$ (b) $x^i \in f^i(t^i(p,x^i), b^i)$,

(8.137) $\quad \sum_{i\in I} b^i = \sum_{i\in I} [p.x^i + \underline{t}^i(p,x^i)]$, $\qquad$ (8.138) $\quad \sum_{i\in I} x^i \le 0$,

l'équilibre étant **strict** si, de plus,

(8.139) $\quad \sum_{i\in I} p.x^i = 0$.

La condition de **s-viabilité** (3.14) s'écrit ici, par définition (2.8) des socles $\underline{X}(\sigma^i,f^i)$ $(i\in I)$,

(8.140) pour tout $p \in S^H$ et tout $x = (x^i, i\in I) \in R^{H\times I}$,

$$x^i \in f^i(p,\sigma^i(p)) \text{ pour tout } i\in I \quad \text{entraîne} \quad \sum_{i\in I} x^i \le 0.$$

Cela étant, le théorème 3.4 entraîne qu'il existe un équilibre [resp. un équilibre strict] dès que, d'une part les fonctions de demande excédentaires (σ^i,f^i) $(i\in I)$ vérifient les conditions de continuité (2.12), de convexité (2.13), de bornitude inf. (2.15) et la loi de Walras locale (2.17) [resp. globale (2.18)], d'autre part les protocoles de taxation t^i $(i\in I)$ vérifient la condition de continuité (2.30), enfin le jeu vérifie celle de s-viabilité (8.140).

(C) Afin de situer le résultat précédent par rapport aux résultats classiques (alinéa 8.11.D), on particularise les fonctions de demande excédentaires (σ^i,f^i) $(i\in I)$ en les supposant de la forme définie par (8.52) et (8.53). Dans ces conditions, les contraintes d'équilibre (8.136) à (8.138) s'écrivent (8G),

(8.141) pour tout $i\in I$, (a) $b^i \ge t^i(p,x^i).d^i$,

(b) $x^i = d^i + \xi^i(t^i(p,x^i),\ b^i - t^i(p,x^i).d^i)$,

(8.142) $\sum_{i\in I} b^i = \sum_{i\in I} [p.x^i + \underline{t}^i(p,x^i)]$, (8.143) $\sum_{i\in I} x^i \le 0$,

tandis que la condition de s-viabilité (8.140) devient, puisque $\underline{X}(\sigma^i,f^i) = \{d^i\}$ pour chaque $i\in I$, conformément à (6.14),

(8.144) $\sum_{i\in I} d^i \le 0$.

Ainsi, sous la seule condition (8.53b) sur les fonctions de demande ξ^i $(i\in I)$, le théorème 3.4 se traduit par l'existence d'un tel équilibre $(\mathbf{x},\ p,\ \mathbf{b})$ <u>strict</u> dès que la condition de s-viabilité, purement physique, (8.141) est vérifiée. On souligne le caractère strict de cet équilibre et le caractère implicite par rapport aux variables x^i $(i\in I)$ du système de contraintes (8.141) à (8.143), à cause de la dépendance des $t^i(p,x)$ $(i\in I)$ vis-à-vis de x.

(D) En particulier, en l'absence de taxation des consommateurs, i.e. dans le cas classique (alinéa 3.6.B,C), un équilibre peut être identifié à un couple $(p,\ \mathbf{b}) \in S_H \times R^I$ tel que (8H),

(8.145) pour tout $i\in I$, (a) $b^i \ge p.d^i$,

(8.146) $\sum_{i\in I} [\xi^i(p,\ b^i - p.d^i) + d^i] \le 0$,

la contrainte d'équilibre strict (8.139) se réduisant ici à,

(8.147) $\sum_{i\in I} b^i = 0$.

On souligne, comme dans le cas avec production (alinéa 3.6.F), que, si les vecteurs d^i $(i\in I)$ sont quelconques, i.e. s'ils prennent en compte des contraintes de survie des consommateurs (alinéas 6.2.C, 6.3.B, 8.5.E), l'équilibre peut réclamer des transferts b^i $(i\in I)$ non nuls (alinéa 8.11.E). Par contre, si ces contraintes sont ignorées, i.e. si les vecteurs d^i $(i\in I)$ sont ≤ 0, (8.148) pour tout $i \in I$, $d^i = -w^i$, avec $w^i \in R^H_+$,

il existe un équilibre (p, b) pour lequel, au-delà de la condition d'équilibre strict (8.147), tous les transferts b^i ($i \in I$) sont nuls [relation 3.32)], auquel cas la contrainte d'équilibre (8.146) prend la forme usuelle (8I),

(8.149) $$\sum_{i \in I} \xi^i(p, p.w^i) \leq \sum_{i \in I} w^i.$$

Plus généralement, dans la situation de l'alinéa 8.11.B, si toutes les fonctions seuil σ^i ($i \in I$) sont ≤ 0, il existe un équilibre pour lequel tous les transferts b^i ($i \in I$) sont nuls (8J), la condition de s-viabilité (8.140) étant alors inutile (et excessive ; alinéa 8.12.B).

(E) Dans la situation de l'alinéa 8.11.D, voici un exemple de jeu de données pour lequel des transferts sont nécessaires à l'équilibre. On suppose que, d'une part les nomenclatures H et I sont formellement identifiées, $H = I$, et $n \geq 2$, avec $n = \mathrm{Card}(H)$, d'autre part les données d^i et ξ^i ($i \in I$) sont de la forme (8.64), enfin les vecteurs v^i et w^i ($i \in I$) sont tels que,

(8.150) pour tous $h \in H$ et $i \in H$, $v^i_h = 1$,

(8.151) pour tout $i \in H$, (a) $w^i_i > 0$ et (b) pour tout $h \in H\backslash\{i\}$, $w^i_h = 0$.

Cela étant, soit $p \in S_H$ un vecteur de prix d'équilibre correspondant à des transferts b^i ($i \in I$) nuls. Les contraintes de survie (8.145) donnent, d'après les conditions (8.64a), (8.150) et (8.151),

(8.152) pour tout $h \in H$, $p_h w^h_h \geq 1$.

Mais, cette relation entraîne que, $p \in R^H_{++}$, donc que l'égalité a lieu dans la contrainte d'équilibre (8.146), ce qui, fait que cette contrainte s'écrit, d'après les même conditions et la forme (8.64b) des fonctions ξ^i ($i \in I$),

(8.153) pour tout $i \in H$, $$\sum_{h \in H} p_h w^h_h = w^i_i.$$

Or, ces égalités ne sont possibles, compte tenu de ce que $n \geq 2$ et $p \in R^H_{++}$, que si tous les w^i_i ($i \in I$) sont égaux. Ainsi, dans le cas contraire, il n'existe pas d'équilibre sans transferts. Cependant, il existe un équilibre, avec transferts, dès que la condition de s-viabilité est satisfaite, i.e, d'après (8.144), dès que $n \leq \mathrm{Min}\ \{ w^i_i \mid i \in I \}$, ce qui peut avoir lieu sans que tous les w^i_i ($i \in I$) ne soient égaux.

(F) Dans la situation générale d'échange pur de l'alinéa 8.11.B, il est naturel de se demander (alinéa 3.5.B) si l'existence d'un équilibre peut être en défaut pour un jeu de données vérifiant toutes les conditions énoncées, en particulier la loi de Walras globale pour les fonctions de demande excédentaires (σ^i, f^i) ($i \in I$) et la condition de s-viabilité, sauf celle de bornitude inf. (2.15) pour ces fonctions. On conjecture qu'il en est ainsi, en particulier pour des fonctions (σ, f) de la forme définie par les relations (8.154) et (8.155) ci-après, lesquelles sont de ce type conformément à la condition (8.155c) :

(8.154) (a) $\sigma(p) = 0$,

(b) $$f(p,s) = s\left[\frac{2}{p.\underline{\underline{v}}}\,\underline{\underline{v}} - \frac{1}{p.\underline{v}}\,\underline{v}\right] \quad (p \in R^H_{+*},\ s \in R_+),$$

où les vecteurs $\underline{v}$ et $\underline{\underline{v}}$ sont donnés tels que, (8.155) (a) $\underline{v} \in R^H_{++}$, (b) $\underline{\underline{v}} \in R^H_{++}$,

(c) il existe $p \in R^H_{+*}$ tel que $\frac{2}{p.\underline{\underline{v}}}\underline{\underline{v}} - \frac{1}{p.\underline{v}}\underline{v} \notin R^H_+$.

A défaut d'un jeu de données sans équilibre, en voici un, dont les fonctions de demande excédentaires sont de cette forme, pour lequel l'ensemble des équilibres n'est pas borné, contrairement à la conclusion de la proposition 3.1.

Supposant que Card(I) = 2, avec $I = \{k,l\}$, on définit les fonctions (σ^i,f^i) et les protocoles de taxation t^i $(i\in I)$ par,

$$(8.156)\quad (a)\ \sigma^k(p) = \sigma^l(p) = 0, \qquad (b)\ f^k(p,s) = s[\frac{2}{p.\underline{\underline{v}}}\underline{\underline{v}} - \frac{1}{p.\underline{v}}\underline{v}],$$

$$(c)\ f^l(p,s) = s[\frac{2}{p.\underline{v}}\underline{v} - \frac{1}{p.\underline{\underline{v}}}\underline{\underline{v}}],$$

$$(d)\ t^k(p,x) = q^k, \quad t^l(p,x) = q^l \qquad (p \in R^H_{+*},\ s \in R+,\ x \in R^H),$$

où les vecteurs $\underline{v}$ et $\underline{\underline{v}}$ sont donnés vérifiant les conditions (8.155a,b), ainsi que les vecteur q^k et q^l de S_H. Cela étant, on vérifie qu'il suffit que $\underline{v}$, $\underline{\underline{v}}$, q^k, et q^l soient tels que,

$$(8.157)\quad (a)\ \frac{2}{q^k.\underline{\underline{v}}} = \frac{1}{q^l.\underline{\underline{v}}}, \qquad (b)\ \frac{2}{q^l.\underline{v}} = \frac{1}{q^k.\underline{v}},$$

pour que ce jeu de données admette le couple (p, **b**) comme équilibre pour tout $p \in S_H$ et tout $\mathbf{b} = (b^i, i\in I) \in R^I_+$ tel que $b^k = b^l$. De plus, ces conditions sont satisfaites si on prend, Card(H) = 2, avec $H = \{a,b\}$, et,

$$(8.158)\quad (a)\ \underline{\underline{v}}_a = \underline{v}_b = 2, \qquad (b)\ \underline{\underline{v}}_b = \underline{v}_a = 1,$$

$$(c)\ q^k_a = q^l_b = 1, \qquad (d)\ q^k_b = q^l_a = 0.$$

§ 8.12 - S-VIABILITE ET T-VIABLITE

(A) On donne ici trois exemples à propos des conditions de s-viabilité et de t-viabilité : le premier (alinéas 8.12.B,C) montre que, sans taxation, la condition de s-viabilité n'est pas nécessaire pour l'existence de l'équilibre, le second (alinéa 3.5.D) qu'elle peut ne pas suffire en cas de taxation du producteur (alinéa 3.5.D), le troisième (alinéa 8.12.E) que, dans ce cas, la condition de t-viabilité n'est pas nécessaire.

(B) Le premier exemple concerne un jeu données correspondant à une économie d'échange (alinéa 8.11.B) avec un seul consommateur noté i, la nomenclature des biens H étant seulement telle que Card(H) ≥ 2. L'unique fonction de demande excédentaires (σ^i,f^i), multivoque, est de type indexé (alinéas 6.3.D et 6.4.C), avec des fonctions de demande $\Phi(\mu,.,.)$ de la forme (8.110), l'ensemble d'indices $K = \{k,l\}$ ayant deux éléments :

$$(8.159)\quad (a)\ \sigma^i(p) = \mathrm{Min}(p.v^k,\ p.v^l) - p.w \qquad (p \in R^H_{+*}),$$

$$(b)\ f^i(p,s) = \{\ (s + p.w)[\frac{\mu_k}{p.v^k}v^k - \frac{\mu_l}{p.v^l}v^l] - w \mid \mu \in S_K\ \}$$

$$(p \in R^H_{+*},\ s \geq \sigma(p)),$$

où les vecteurs w, v^k, v^l de R^H sont donnés tels que, (8.160) (a) $v^k \in \mathbf{R}^H_{++}$, (b) $v^l \in \mathbf{R}^H_{++}$, (c) $v^k \neq v^l$,

(d) $w = (1/2)(v^k + v^l)$, (e) $w.(v^k - v^l) = 0$,

Cela étant, désignant par q l'unique vecteur de S_H colinéaire à w, on a, d'après les conditions (8.160d,e),

(8.161) $q.v^k = q.v^l = q.w.$ Donc, d'une part, d'après (8.159a),

(8.162) $\sigma^i(q) = 0,$ d'autre part, d'après (8.159b) pour s = 0,

(8.163) $f^i(q,0) = \{ \mu_k v^k + \mu_l v^l - w \mid \mu \in S_K \}.$

Ainsi, le socle $\underline{X}(\sigma^i,f^i)$ [relation (2.8)] est tel que,

(8.164) $\underline{X}(\sigma^i,f^i) \supset \{ \mu_k v^k + \mu_l v^l - w \mid \mu \in S_K \}.$

En particulier, en faisant $\mu_k = 1$ et $\mu_l = 0$ au au second membre,

(8.165) $v^k - w \in \underline{X}(\sigma^i,f^i)$,

ce qui montre que la condition de s-viabilité (8.140) n'est pas satisfaite, puisque les conditions (8.160c,d,e) excluent que $v^k - w$ soit ≤ 0. Par ailleurs, en faisant $\mu_k = \mu_l$ au second membre de (8.163), on obtient que $0 \in f^i(q,0)$, ce qui, compte tenu de (8.162), montre que le couple (q,0) est un équilibre. On souligne le lien entre la propriété ainsi obtenue - existence d'un équilibre sans s-viabilité - et le fait que le socle $\underline{X}(\sigma^i,f^i)$ n'est pas un singleton : par exemple, les conditions (8.123) entraînent que la condition de s-viabilité est nécessaire à l'existence d'un équilibre.

(C) On obtient un autre jeu de données ayant cette propriété, avec une nomenclature des biens à deux éléments, H = {a,b}, en prenant la fonction de demande excédentaire (σ^i,f^i) associée au système à finalité (X,u) (alinéa 6.6.B) pour lequel l'ensemble de consommation $X \subset \mathbf{R}^H$ est la boule euclidienne de centre q et de rayon 1, avec $q_a = q_b = 1/2$, et la fonction d'utilité u est définie par, $u(x) = q.x$ $(x \in X)$. Le socle $\underline{X}(\sigma^i,f^i)$ est alors l'arc de cercle défini par,

(8.166) $\underline{X}(\sigma^i,f^i) = \{ x \in \mathbf{R}^H \mid \|x\| = 1 \text{ et } q.x \leq 0 \},$

lequel n'est pas contenu dans l'orthant $-\mathbf{R}^H_+$, alors que le couple (q,0) est un équilibre.

(D) Le second exemple concerne deux jeux de données. Le premier, **d°**, est de la classe **Dsbx**, i.e. avec un seul producteur privé, noté j, et sans production de l'Etat (alinéa 8.5.E), et comporte un seul consommateur, noté i. Le second, d, est identique au premier, sauf en ce qu'il comporte une taxation du producteur privé, via un protocole de taxation u^j. Cela étant, la propriété visée consiste en ce que le jeu **d°** vérifie la condition de s-viabilité, donc possède un équilibre, tandis que le jeu **d** n'en possède pas, ce qui exclut, en vertu du théorème 3.4, qu'il vérifie la condition de t-viabilité.

Pour construire ces jeux, on remarque que la propriété précédente est conséquence des conditions suivantes, où d^i est défini par (8.64a) en tant que composant de la fonction de demande (σ^i,f^i) du jeu **d°** [relation (8.52)],

(8.167) (a) $\underline{X}(\sigma^i,f^i) = \{d^i\}$, (b) $X(\sigma^i,f^i) \subset \{d^i\} + \mathbf{R}^H_+$.

(c) $\{d^i\} = X(\sigma^i,f^i) \cap (Y^j - \mathbf{R}^H_+)$,

(d) pour tout $p \in S_H$, $(\{d^i\} + \mathbf{R}^H_+) \cap Am(Y^j,u^j,p) = \emptyset$, les deux premières étant générales pour les fonctions de demande excédentaire des jeux de la classe Dsb [relation (8.52)]. Il suffit donc de spécifier d° et u^j de façon à ce que les conditions (8.167c,d) soient satisfaites. Pour cela, supposant de nouveau que la nomenclature des biens à deux éléments, $H = \{a,b\}$, on peut définir les vecteurs v^i et w^i par,

(8.168) (a) $v_a^i = v_b^i = 1$, (b) $w_a^i = 2$, $w_b^i = 0$, ce qui fait que,

(8.169) $d_a^i = -1$, $d_b^i = 1$, puis l'ensemble Y^j par,

(8.170) $Y^j = \{ y \in R^H \mid -1 \leq y_a \leq 0 \text{ et } 0 \leq y_b \leq -y_a \}$,

la nomenclature d'opérations O étant ici identifiée à la nomenclature H et la matrice A à l'identité de R^H (alinéa 8.5.B), enfin le protocole u^j par,

(8.171) (a) $u^j(p,y) = -\alpha y_a \quad (p \in R^H_{+*})$, avec (b) $\alpha > 1$ donné.

Les conditions (8.167c) et (8.167d) sont alors satisfaites. La première, en vertu de la forme (8.64b) de la fonction de demande ξ^i. La seconde, puisque le profit $\pi^j = p.y - u^j(p,y) = (p_a + \alpha)y_a + p_b y_b$ est majoré par $(p_b - p_a - \alpha)|y_a|$, par définition de Y^j, ce qui fait que, en vertu de la condition (8.171b), il atteint son maximum pour $y_a = 0$, i.e au point $y = 0$, lequel n'appartient pas à $\{d^i\} + R^H_+$, d'après (8.169).

On note que la condition $\alpha > 1$ est essentielle à la démarche précédente. On peut l'affaiblir en définissant l'ensemble Y^j, au lieu de (8.170), par,

(8.172) $Y^j = \{ y \in R^H \mid (y_a + 1)^2 + y_b^2 \leq 1,\ y_a \geq -1,\ y_b \geq 0 \}$,

qui fournit aussi les condition (8.167c,d), de façon moins immédiate, mais sous la seule condition $\alpha > 0$. Ainsi, la propriété visée est obtenue, pour cette variante, avec des protocoles u^j dont la valeur maximum, sur $S_H \times Y^j$ est arbitrairement petite.

(E) Le troisième exemple concerne un jeu de données de la même forme que le jeu d du second exemple (alinéa 8.12.D), en particulier avec le même appareil nominatif et les définitions (8.168), (8.169) et (8.171a) de d^i et u^j, mais où la définition (8.170) de Y^j est remplacée par,

(8.173) $Y^j = \{ y \in R^H \mid -2 \leq y_a \leq -1 \text{ et } y_b = 1 \}$,

tandis, dans celle (8.171a) de u^j, la condition $\alpha > 1$ est remplacée par $\alpha < 0$. Dès lors, on a, $\pi^j = (-p_a - \alpha)|y_a| + pb$. Ainsi, si $p \in S_H$ est tel que $p_a < -\alpha$ (ce qui est possible puisque $\alpha < 0$), $y \in Am(Y^j,u^j,p)$ entraîne $y_a = -2$, donc $p.y < p.d^i$, ce qui fait que la condition de t-viabilité (3.15) n'est pas vérifiée. De plus, si $-1 < \alpha < 0$ et si $p \in S_H$ est tel que $p_a > -\alpha$, $y \in Am(Y^j,u^j,p)$ entraîne $y_a = -1$, donc $y = d^i$, ce qui fait que le multiplet (x^i, y^j, p, s^i, b^i), avec $x^i = y^j = d^i$, $s^i = p.y^j$, $b^i = u^j(p,y^j)$ est un équilibre.

§ 8.13 - <u>DIFFERENTES TAXATIONS</u>

(A) On donne ici un exemple montrant que la taxation du producteur introduite par les relations (8.27), dans le cadre du modèle de Scarf, peut ne pas être équivalente à celle associée à un protocole de taxation (alinéa 8.3.F).

(B) Dans ce sens, on rappelle d'abord que les contraintes (8.27), concernant un couple $(p,z) \in S^H \times R^H_+$, sont équivalente, en vertu de la condition nécessaire et suffisante de Kuhn et Tucker sous sa forme linéaire (B.26), à la contrainte d'optimisation,

(8.174) $\quad z \in \text{Argmax} \{ p.A^T z' \mid z' \in R^L_+ \}$,

où A^T désigne la matrice $((1 - t_{h,l})a_{h,l},\ h \in H, l \in L)$ définie à partir de la matrice de taxation $T = (t_{h,l},\ h \in H, l \in L) \in R^{H \times L}$ et de la matrice technologique A. Dès lors, désignant par $\underline{M}(p,A,T)$ et $\underline{\underline{M}}(p,A,u)$ les sous-ensembles de R^L_+ constitués par les Argmax aux seconds membres de (8.174) et de (8.30) respectivement, on vise la propriété suivante d'un triplet (p, A, T) :

(8.175) pour tout protocole de taxation u défini sur $R^H_{+*} \times A(R^L_+)$,

(a) $\quad \underline{M}(p,A,T) \neq \underline{\underline{M}}(p,A,u)$.

Afin de montrer l'existence de triplets ayant cette propriété, on remarque qu'elle est conséquence de la condition (8.176) ci-après, elle indépendante du protocole u :

(8.176) il existe $\underline{z} \in R^L_+$ et $\underline{\underline{z}} \in R^L_+$ tels que,

(a) $A\underline{z} = A\underline{\underline{z}}$, (b) $\underline{z} \in \underline{M}(p,A,T)$, (c) $pA^T\underline{z} < pA^T\underline{\underline{z}}$.

En effet, soient $\underline{z}$ et $\underline{\underline{z}}$ vérifiant (8.176). Si on avait $\underline{M}(p,A,T) = \underline{\underline{M}}(p,A,u)$, on aurait successivement : $\underline{z} \in \underline{\underline{M}}(p,A,u)$, en vertu de (8.176b) ; puis, $\underline{\underline{z}} \in \underline{\underline{M}}(p,A,u)$, en vertu de (8.176a) et de ce que la condition sur z' dans l'Argmax définissant $\underline{\underline{M}}(p,A,u)$ [relation (8.30)] ne dépend que de Az' ; enfin $\underline{\underline{z}} \in \underline{M}(p,A,T)$. Ce qui contredirait (8.176b,c).

(C) Celat étant, avec des nomenclatures H et L à trois éléments, $H = \{a,b,c\}$ et $L = \{m,n,o\}$, on obtient un quintuplet (p, A, T, $\underline{z}$, $\underline{\underline{z}}$) vérifiant les conditions (8.176a,b,c) en le définissant par,

(8.177) $\quad p_a = p_b = 1/5,\quad p_c = 3/5,$

(8.178) $\quad a_{a,m} = -2,\quad a_{a,n} = -1,\quad a_{a,o} = -3,$

$a_{b,m} = -1,\quad a_{b,n} = -2,\quad a_{b,o} = -3,$

$a_{c,m} = 1,\quad a_{c,n} = 1,\quad a_{c,o} = 2$ [8x],

(8.179) $\quad t_{h,l} = -1$ si $(h,l) = (a,m)$ ou $(h,l) = (a,n)$,

$t_{h,l} = 0$ sinon $(h \in H, l \in L)$,

(8.180) $\quad \underline{z} = e^c,\quad \underline{\underline{z}} = e^a + e^b,$

où $(e^h,\ h \in H)$ désigne la base canonique de l'espace R^H.

ANNEXE A - RESULTATS SUR LES CORRESPONDANCES

On présente dans cette annexe les définitons et résultats utilisés dans le texte en ce qui concerne les correspondances [Aa].

§ A.1 - CORRESPONDANCES

(A) Soient X et Y des ensembles. Une **correspondance** Γ de X **dans** Y - ou **définie** sur X et **à valeurs** dans Y - est une application de X dans l'ensemble 2^Y des parties de Y (y compris la partie vide $\emptyset$). Ainsi, la correspondance Γ associe, à chaque élément x de X, un sous-ensemble $\Gamma(x)$ de Y [Ab].

Si Γ est une correspondance de X dans Y, on définit l'**image** $\Gamma(A)$ et l'**image réciproque** $\Gamma^{-1}(B)$ d'un ensemble par,

(A.1) $\quad \Gamma(A) = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x),$ pour chaque $A \in 2^X$,

(A.2) $\quad \Gamma^{-1}(B) = \{ x \mid x \in X \text{ et } \Gamma(x) \subset B \},$ pour chaque $B \in 2^Y$.

Si E est un sous-ensemble de X, la **restriction** de la correspondance Γ à E est la correspondance Γ_E de E dans Y définie par, $\Gamma_E(x) = \Gamma(x)$ pour tout $x \in E$.

(B) La correspondance Γ de X dans Y est dite **à valeurs non vides** si,

(A.3) $\quad$ pour tout $x \in X$, $\Gamma(x) \neq \emptyset$.

(C) La correspondance Γ de X dans Y est dite **univoque** si,

(A.4) $\quad$ pour tout $x \in X$, $\Gamma(x)$ est un singleton,

en appelant **singleton** tout ensemble réduit à un élément. Ainsi, la donnée d'une correspondance univoque Γ de X dans Y est équivalente à celle de l'application f de X dans Y **associée** à Γ par,

(A.5) $\quad$ pourt tout $x \in X$, $\Gamma(x) = \{f(x)\}$.

On n'identifiera pas une correspondance univoque et l'application associée.

§ A.2 - CORRESPONDANCES HEMI-CONTINUES

(A) Soient X et Y des espaces topologiques. Une correspondance Γ de X dans Y est dite **hémi-continue supérieurement (h.c.s)** si,

(A.6a) $\quad$ pour tout ouvert O de Y, $\Gamma^{-1}(O)$ est un ouvert de X, et,

(A.6b) $\quad$ pour tout $x \in X$, $\Gamma(x)$ est un sous-ensemble compact de Y.

(B) Une correspondance Γ de X dans Y est dite **continue** si elle est h.c.s et **hémi-continue inférieurement (h.c.i)** en ce sens que,

(A.7) $\quad$ pour tout ouvert O de Y, $\{ x \mid x \in X \text{ et } \Gamma(x) \cap O \neq \emptyset \}$ est un ouvert de X,

(C) Lorsque les espaces X et Y sont **métrisables** - ce qui est le cas des sous-espaces (topologiques) des espaces euclidiens en cause dans ce texte - les définitions précédentes de l'hémi-continuité et de la continuité sont équivalentes aux **définitions séquentielles**, plus usuelles en économie mathématique [Ac].

(D) Les définitions précédentes (alinéas A.2.A et A.2.B) généralisent celle des applications continues, en ce sens que [Ad],

(A.8) **[cas univoque]** si une correspondance est univoque, elle est h.c.s (resp. continue) si et seulement si l'application associée est continue,

(A.9) **[image h.c.s d'un compact]** si la correspondance Γ est h.c.s, $\Gamma(A)$ est un sous-ensemble compact de Y, pour tout sous-ensemble compact A de X.

§ A.3 - GRAPHE D'UNE CORRESPONDANCE

(A) Le **graphe** de la correspondance Γ de X dans Y est le sous-ensemble $Gr(\Gamma)$ du produit cartésien $X \times Y$ défini par,

(A.10) $\quad Gr(\Gamma) \; = \; \{ \; (x,y) \mid x \in X, \; y \in Y \text{ et } y \in \Gamma(x) \; \}.$

Inversement, si C est un sous-ensemble de $X \times Y$, il existe une unique correspondance Γ de X dans Y telle que $Gr(\Gamma) = C$, laquelle est donnée par,

(A.11) $\quad$ pour tout $x \in X$, $\; \Gamma(x) \; = \; \{ \; y \mid y \in Y \text{ et } (x,y) \in C \; \}.$

Ainsi, la donnée d'une correspondance Γ est équivalente à celle de son graphe $Gr(\Gamma)$, via les relations (A.10) et (A.11). Cependant, on n'identifie pas une correspondance et son graphe.

(B) Soient X et Y des espaces topologiques. Une correspondance Γ de X dans Y est dite **de graphe fermé** si son graphe $Gr(\Gamma)$ est fermé dans l'espace produit $X \times Y$. Cela étant [Ae] :

(A.12) **[propriété du graphe fermé]** pour que la correspondance Γ soit de graphe fermé, il suffit qu'elle soit h.c.s ;

(A.13) **[critère du graphe fermé]** si l'espace Y est compact, pour que la correspondance Γ à valeurs dans Y soit h.c.s, il faut et il suffit qu'elle soit de graphe fermé.

§ A.4 - THEOREME DU MAXIMUM

(A) Soient X un espace topologique, P(x) un prédicat sur X et u une fonction numérique sur X. On définit l'ensemble, $\operatorname{Argmax} \{ \; u(x) \mid x \in X \text{ et } P(x) \; \}$ par,

(A.14a) $$\operatorname{Argmax} \{ \; u(x) \mid x \in X \text{ et } P(x) \; \} = \{ \; x \mid x \in X \,,\; P(x) \text{ et } u(x) = u^* \; \}, \text{ avec,}$$

(A.14b) $$u^* \; = \; \operatorname{Sup} \{ \; u(x) \mid x \in X \text{ et } P(x) \; \},$$

en désignant par Sup E la borne sup., dans $[-\infty,+\infty]$, du sous-ensemble E de **R**. De plus, on pose,

(A.15a) $$\operatorname{Max} \{ \; u(x) \mid x \in X \text{ et } P(x) \; \} = \operatorname{Sup} \{ \; u(x) \mid x \in X \text{ et } P(x) \; \}, \text{ lorsque,}$$

(A.15b) $\quad \operatorname{Argmax} \{ \; u(x) \mid x \in X \text{ et } P(x) \; \}$ est non vide.

En particulier, le Théorème de Weierstrass [Af] s'énonce alors :

(A.16) **[Théorème de Weierstrass]** si l'espace X est compact et si la fonction u est continue, l'ensemble $\operatorname{Argmax} \{ \; u(x) \mid x \in X \; \}$ est non vide.

(B) Soient X et Y des espaces topologiques, u une fonction numérique sur l'espace produit $X \times Y$, Γ une correspondance de X dans Y. Cela étant [Ag] :

(A.17) **[Théorème du maximum]** si, d'une part la fonction u est continue, d'autre part la correspondance Γ est continue et à valeurs non vides, on définit une fonction numérique continue M sur X et une correspondance h.c.s μ de X dans Y à valeurs non vides en posant,

(A.18a) $M(x) = \text{Max} \{ u(x,y) \mid y \in \Gamma(x) \} \quad (x \in X),$

(A.18b) $\mu(x) = \text{Argmax} \{ u(x,y) \mid y \in \Gamma(x) \} \quad (x \in X).$

La notation Max au second membre de (A.18a) est justifiée, d'après la convention (A.15), le théorème de Weierstrass (A.16) appliqué à la fonction partielle $u(x,.)$, continue comme u, et la condition de définition (A.6b) de l'hémi-continuité supérieure.

§ A.5 - LEMME DE RECOLLEMENT

(A) Soient X et Y des espaces topologiques, Φ et Γ des correspondances de X dans Y, G un sous-ensemble de X. On désigne par Σ la correspondance de X dans Y définie par :

(A.19a) $\Sigma(x) = \Gamma(x)$, si $x \in G$, (A.19b) $\Sigma(x) = \Phi(x)$, si $x \in X \setminus G$.

Cela étant [Ah] :

(A.20) **[lemme de recollement]** la correspondance Σ est h.c.s lorsque, (a) la correspondance Φ est h.c.s de X dans Y, (b) G est un ouvert de X et la restriction à G de la correspondance Γ est h.c.s, (c) $\Gamma(x) \subset \Phi(x)$ pour tout $x \in X$.

(B) DEMONSTRATION. On va montrer que Σ vérifie la condition (A.6a) s'il en est ainsi de Φ et de Γ. Désignant par O un ouvert de Y, pour montrer que $\Sigma^{-1}(O)$ est ouvert, il suffit de montrer que [Ai],

(A.21) $x \in \Sigma^{-1}(O)$ entraine $x \in \text{int}(\Sigma^{-1}(O))$. Soit donc $x \in \Sigma^{-1}(O)$.

Par définition (A.19) de Σ, on a, en posant $F = X \setminus G$,

(A.21) $\Sigma^{-1}(O) = (\Phi^{-1}(O) \cap F) \cup (\Gamma^{-1}(O) \cap G)$. Donc,

(A.22) $x \in \Phi^{-1}(O) \cap F$ ou $x \in \Gamma^{-1}(O) \cap G$.

Or, d'abord $x \in \Gamma^{-1}(O) \cap G$ entraîne $x \in \text{int}(\Sigma^{-1}(O))$, car $\Gamma^{-1}(O) \cap G$ est ouvert [d'après la condition (A.20b) et la condition de définition (A.6a) pour la restriction de Γ à G] et contenu dans $\Sigma^{-1}(O)$ [d'après (A.21)]. Ensuite, si x appartient à $\Phi^{-1}(O)$, d'après la condition (A.20a) et la condition de définition (A.6a) pour Φ, il existe un voisinage B de x contenu dans $\Phi^{-1}(O)$. Cela étant, puisque $B \subset (B \cap F) \cup (B \cap G)$, on a $B \subset (\Phi^{-1}(O) \cap F) \cup (\Phi^{-1}(O) \cap G)$. Mais, d'après la condition (A.20c), on a $\Phi^{-1}(O) \subset \Gamma^{-1}(O)$. D'où, d'après (A.21), $B \subset \Sigma^{-1}(O)$, donc $x \in \text{int}(\Sigma^{-1}(O))$. Ce qui achève d'établir le lemme, vu que Σ vérifie la condition (A.6b) s'il en est ainsi de Φ et de Γ.

§ A.6 - THEOREMES DE KAKUTANI ET DE BROUWER

(A) Une correspondance Γ d'un ensemble X dans un ensemble Y est dite **à valeurs convexes** si,

(A.23) (a) Y est un sous-ensemble d'un espace vectoriel sur **R** et
(b) pour tout $x \in X$, l'ensemble $\Gamma(x)$ est convexe.

(B) Un **point fixe** d'une correspondance Γ d'un ensemble X dans lui-même est un élément x de X tel que,

(A.24) $x \in \Gamma(x)$. Cela étant [Aj] :

(A.25) [**Théorème de Kakutani**] si X est un sous-ensemble convexe compact non vide d'un espace euclidien et si Γ est une correspondance de X dans X, h.c.s et à valeurs convexes non vides, alors Γ admet un point fixe.

(C) Un **point fixe** d'une application f d'un ensemble X dans lui-même est un élément x de X tel que,

(A.26) $f(x) = x$. Cela étant :

(A.27) [**Théorème de Brouwer**] si X est un sous-ensemble convexe compact non vide d'un espace euclidien et si f est une application continue de X dans X, alors f admet un point fixe.

Ce théorème résulte du théorème de Kakutani en prenant pour Γ la correspondance univoque associée à l'application f (alinéa A.1.C) [Ak].

§ A.7 - THEOREME DE PROJECTION

(A) L'opérateur de projection (alinéa A.7.B) est introduit par l'énoncé (A.28) ci-après [Al], où on désigne par x.y le produit scalaire et par $\|x\|$ la norme canoniques d'un espace euclidien.

(A.28) [**Théorème de projection**] Soit Z un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace euclidien E. Alors :

(a) pour tout $x \in E$, il existe un élément $x°$ de E et un seul tel que,

(A.28.1) $x° \in Z$ et $\|x - x°\| = \operatorname{Inf} \{ \|x - y\| \mid y \in Y \}$;

(b) pour tout $x \in E$, $x° \in E$ vérifie (A.28.1) si et seulement si,

(A.28.2) $x° \in Z$ et $(x - x°).(z - x°) \leq 0$ pour tout $z \in Z$;

(c) pour tous $x \in E$ et $y \in E$,

(A.28.3) $\|x° - y°\|^2 \leq (x° - y°).(x - y)$, en particulier [Am],

(A.28.4) $\|x° - y°\| \leq \|x - y\|$.

(B) Pour chaque $x \in E$, l'élément $x°$ de Z défini par la propriété (A.28a) ci-dessus est appelé **projection** de x sur Z, tandis que l'application $x \longrightarrow x°$ de E sur Z est appelée **opérateur de projection** de E sur Z. Cette application est continue, en vertu de la propriété (A.28c).

ANNEXE B - **OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES**

On présente dans cette annexe les définitions et résultats utilisés dans le texte en ce qui concerne le théorème de Kuhn et Tucker (§ B.4) et la programmation linéaire (§ B.5). Au préalable, on rappelle les notions requises concernant la différentiabilité (§ B.1) et les systèmes de contraintes en cause (§ B.2 et B.3). Comme application, on explicite le système de contraintes exprimant l'équilibre général (§ B.6).

Les notations concernant les espaces euclidiens sont celles introduites à l'alinéa 2.1.B : un tel espace de dimension n est considéré sous la forme $\mathbf{R}^Q$, où Q est un ensemble fini (d'indices) de n éléments, et on désigne respectivement par x.y et $\|x\|$ le produit scalaire et la norme canoniques dans cet espace.

§ B.1 - FONCTIONS DIFFERENTIABLES ET GRADIENTS

(A) Soient G un ouvert non vide de l'espace euclidien $\mathbf{R}^Q$ et f une fonction numérique (i.e. à valeurs dans R) définie sur G. On dit que f est **différentiable** en un point x de G s'il existe un vecteur $b \in \mathbf{R}^Q$ tel que,

(B.1) $$\lim_{u \to 0} \ [f(x+u) - f(x) - b.u] \ / \ \|x\| \ = \ 0.$$

Le vecteur b, qui est déterminé de façon unique par la relation (B.1), est appelé le **gradient** de f au point x et noté $\nabla f(x)$. La fonction f admet alors, en x, des dérivées partielles $\partial_h f(x)$ $(q \in Q)$ qui constituent les composantes, notées $\nabla_h f(x)$ $(q \in Q)$, du vecteur gradient $\nabla f(x)$.

La fonction f est dite **continûment différentiable** sur G si elle est différentiable en tout point de G et si l'**application gradient** ∇f, $x \longrightarrow \nabla f(x)$, est continue de G dans $\mathbf{R}^Q$. Pour que la fonction f soit continûment différentiable, il faut et il suffit que'elle admette, en tout point x de G, des dérivées partielles $\partial_h f(x)$ $(q \in Q)$ qui soient fonctions continues de x sur G ([Ba]).

(B) Une fonction numérique f sur G est dite **affine** si elle est de la forme,

(B.2) $\quad f(x) \ = \ b.x \ - \ d \quad (x \in G)$, où $b \in \mathbf{R}^Q$ et $d \in \mathbf{R}$ sont donnés.

Elle est alors continûment différentiable et le vecteur b, qui est déterminé de façon unique par f et par la relation (B.2), est le gradient de f en tout point de G. Inversement, pour que f soit une fonction affine sur G, il suffit que f soit différentiable sur G et que son gradient soit constant. Ainsi, les fonctions affines sont les fonctions différentiables de gradient constant.

Une fonction numérique f sur G est dite **localement affine** en $x \in G$ si elle coïncide, sur un voisinage ouvert V de x, avec une fonction affine, i.e. si elle est différentiable sur V et si son application gradient est constante sur V.

§ B.2 - SYSTEMES DE CONTRAINTES

(A) Les problèmes de programmation ([Bb]) auxquels on s'intéresse ici concernent l'étude de sous-ensembles U d'un espace euclidien $\mathbf{R}^Q$ de la forme,

(B.4) $$U \ = \ \{ \ x \mid x \in G \ \text{ et } \ g^k(x) \le 0 \ \text{ pour tout } k \in K \ \},$$

où, Q et K sont des ensembles <u>finis</u> non vides, G un ouvert non vide de R^Q et, pour chaque $k \epsilon K$, g^k une fonction numérique (à valeurs dans R) définie sur G. Un tel multiplet de <u>données</u>,

(B.5) $\quad S = (Q, K, G, (g^k, k \epsilon K))$,

est appelé **système standard de contraintes**, tandis que l'ensemble U défini par la relation (B.4) est appelé le **domaine** du (associé au) système S. Pour être explicite, cet ensemble est noté **U**(S) ou **U**(Q, K, G, $(g^k, k \epsilon K)$). De plus, l'espace R^Q, l'ouvert G et les fonctions g^k ($k \epsilon K$) sont appelé respectivement, l'espace **ambiant**, l'ouvert de **définition** et les **fonctions délimitantes** du système S ([Bc]).

(B) Un système de contraintes, joint à la définition (B.4) du domaine associé, constitue l'expression formelle, la formulation, générale d'un **modèle** de dimension finie ([Bd]), les ensembles Q et K représentant alors respectivement les **nomenclatures** de variables et de contraintes (scalaires) du modèle (alinéa 2.1.A). Ainsi, pour $q \epsilon Q$, la projection $x \longrightarrow x_q$ de R^Q sur R représente, constitue, la **variable** associé au poste q de Q, tandis que, pour $k \epsilon K$, la relation "$g^k(x) \leq 0$", représente, exprime, la **contrainte**, sous forme **standard** d'inégalité, associée au poste k de K ([Bc]).

On note que la définition (B.4) du domaine, qui ne comporte que des contraintes sous forme d'<u>inégalité</u>, ne restreint pas, à priori, la généralité, puisque toute contrainte avec <u>égalité</u>, $g(x) = 0$, est équivalente à la conjonction des contraintes avec inégalité, $g(x) \leq 0$ et $-g(x) \leq 0$ ([Be]).

(C) Lorsque l'ouvert de définition G d'un système de contraintes est identique à l'espace ambiant R^Q, la donnée du système S est équivalente à celle, outre des nomenclatures Q et K, des contraintes, i.e. des fonctions délimitantes g^k ($k \epsilon K$). Bien que ce cas soit fréquent, on ne peut pas s'y limiter, car il peut ne pas être possible de prolonger un système de contraintes défini sur un ouvert de G différent de l'espace ambiant en un système défini sur ce dernier, cela tout en conservant les propriétés de régularité (différentiabilité, convexité, etc.) voulues pour les fonctions délimitantes ([Bf]).

(D) Plus précisément, le rôle de l'ouvert de définition G est de prendre en compte des contraintes se présentant sous forme d'inégalités strictes, en plus des contraintes, sous forme d'inégalités larges, associées explicitement aux fonctions g^k ($k \epsilon K$). Cette prise en compte d'inégalités strictes peut avoir, soit une justification pratique, liée à la signification des variables du modèle, soit la justification formelle déja évoquée (alinéa B.2.C), qui tient à ce que les fonctions délimitantes requises par les impératifs de la modélisation peuvent ne pas être prolongeables à l'espace ambiant, ces deux types de justification pouvant au demeurant se conjuguer.

§ B.3 - <u>CONDITIONS DE QUALIFICATION</u>

On introduit ici les diverses conditions qui interviennent dans le théorème de Kuhn et Tucker (§ B.4).

(A) Soit X est un sous-ensemble non vide de R^Q. Pour chaque $x \in X$, on désigne par $\mathbf{T}_X(x)$ le cône engendré, dans R^Q, par 0 et par l'ensemble des valeurs d'adhérence au point x de l'application $y \longrightarrow (y - x)/\|y - x\|$ de $X - \{x\}$ dans R^Q ([Bg]). En particulier, si X est convexe, $\mathbf{T}_X(x)$ coïncide avec le cône convexe fermé engendré par l'ensemble $X - \{x\}$.

(B) Soient S un système de contraintes [de la forme (B.5)], U son domaine et x un point de G. On définit le sous ensemble K(x) de K par,

(B.6) $K(x) = \{ k \epsilon K \mid g^k(x) = 0 \}$.

On dit que le système S est **régulier** en x si,

(B.7) pour tout $k \epsilon K(x)$, la fonction g^k est différentiable en x.

S'il en est ainsi, définissant le cône $C_S(x)$ par,

(B.8) $C_S(x) = \{ w \epsilon R^Q \mid$ pour tout $k \epsilon K(x)$, $\nabla g^k(x).w \leq 0 \}$, on a,

(B.9) pour chaque $x \epsilon U$, (a) $T_U(x) \subset C_S(x)$ (Bh).

On dit enfin que le système S est **qualifié** en x si,

(B.10) (a) $x \epsilon U$, (b) S est régulier en x, (c) $T_U(x) = C_S(x)$ (Bi).

Ainsi, essentiellement, au-delà de la condition de régularité (B.10b), le système est qualifié, en $x \epsilon U$, si c'est l'égalité qui est vérifiée au lieu de la seule inclusion (B.9a), toujours vraie.

(C) La condition générale de qualification (B.14c) est peu maniable. Voici, des conditions qui l'entraînent, si x vérifie (B.10a,b) :

(B.11) il existe $w \epsilon R^Q$ tel que, pour tout $k \epsilon K(x)$, (a) $\nabla g^k(x).w \leq 0$ et, soit (b) g^k est localement affine en x, soit (c) $\nabla g^k(x).w < 0$;

(B.12) pour tout $k \epsilon K(x)$, la fonction g^k est localement affine en x ;

(B.13) pour tout $k \epsilon K$, la fonction g^k est affine ;

(B.14) [**condition de Slater**] l'ouvert G est convexe et il existe $x° \epsilon U$ tel que, pour tout $k \epsilon K$, (a) $g^k(x°) \leq 0$ et, soit (b) la fonction g^k est affine, soit (c) la fonction g^k est convexe et $g^k(x°) < 0$.

La condition (B.11) (Bi) est la plus générale, en ce sens que, si x vérifie (B.10a,b), elle est entraînée par les trois autres (Bj). On note que cette condition est locale, en x, i.e. ne concerne, comme la condition de qualification (B.10c), que les restrictions des fonctions g^k ($k \epsilon K$) à un voisinage de x, tandis que les conditions (B.13) et (B.14) sont globales, en particulier indépendantes du point x. On note aussi que la condition de Slater entraine que le domaine U est convexe.

§ B.4 - THEOREME DE KUHN ET TUCKER

(A) Supposant donnés, dans tout ce §, un couple (S,f), appelé **programme standard (d'optimisation)**, où S est un système standard de contraintes [de la forme (B.5)] et f une fonction numérique définie sur l'ouvert de définition G de S, appelée **fonction objectif**, on s'intéresse au **problème de programmation** (d'**optimisation**) (Bl) consistant à,

(B.15) trouver x tel que (a) $x \epsilon U(S)$ et $f(x) = \mathrm{Max} \{ f(x') \mid x' \epsilon U(S) \}$.

De manière plus formelle (alinéa A.4.A), le problème réside dans l'étude du sous-ensemble Um(S,f) de U(S) défini par,

(B.16) $Um(S,f) = \mathrm{Argmax} \{ f(x) \mid x \epsilon U(S) \}$.

(B) Cela étant, on dit que le programme (S,f) est **régulier** en un point x de l'ouvert G si,

(B.17) (a) S est régulier en x et (b) f est différentiable en x.

S'il en est ainsi, les **relations de Kuhn et Tucker** en x, relatives au programme (S,f), s'écrivent sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes (B.18) et (B.19) ci-après :

(B.18) il existe un multiplet (μ_k, $k \in K(x)$) de nombres réels tels que,

(a) $\nabla f(x) = \sum_{k \in K(x)} \mu_k \nabla g^k(x)$, (b) pour tout $k \in K(x)$, $\mu_k \geq 0$.

(B.19) il existe un multiplet (μ_k, $k \in K$) de nombres réels tels que,

(a) $\nabla f(x) = \sum_{k \in K} \mu_k \nabla g^k(x)$, (b) pour tout $k \in K$, $\mu_k \geq 0$,

(c') pour tout $k \in K$, $\mu_k g^k(x) = 0$ ou (c") $\sum_{k \in K} \mu_k g^k(x) = 0$.

Les coefficients μ_k ($k \in K$) introduits par ces relations sont appelés **multiplicateurs**, en x, relatifs au programme (S,f) ([Bm]). On note que, sous (B.19b), les relations (B.19c') et (B.19c") sont équivalentes. Elles sont appelées **relations de complémentarité**.

(C) La **condition nécessaire de Kuhn et Tucker** s'énonce alors ([Bn]) :

(B.20) si $x \in G$ est tel que, d'une part (a) S est qualifié en x et
(b) f est différentiable en x, d'autre part (c) $x \in Um(S,f)$,
alors, les relations de Kuhn et Tucker en x (B.18) sont vérifiées.

(D) Lorsque le programme (S,f) est **convexe**, i.e. lorsque, d'une part le système S vérifie la <u>condition de Slater</u> (B.14), d'autre part f est <u>concave</u> sur U(S), la **condition nécessaire et suffisante de Kuhn et Tucker** s'énonce ([Bo]) :

(B.21) si $x \in U(S)$ est tel que le programme (S,f) est régulier en x, alors,
pour que, $x \in Um(S,f)$, il faut et il suffit que,
les relations de Kuhn et Tucker en x (B.18) soient vérifiées.

(D) Pour un système S comportant des contraintes avec égalité, traitées comme conjonction de contraintes avec inégalité (alinéa B.2.B), l'énoncé de la condition nécessaire (B.20) est valable sans restriction, mais les multiplicateurs des contraintes écrites directement comme égalité ne sont plus alors astreints à être ≥ 0, puisqu'ils sont seulement différence de deux multiplicateurs ≥ 0. Plus précisément, si k et l sont des éléments de K tels que $g^l = - g^k$, la somme partielle $\mu_k \nabla g^k(x) + \mu_l \nabla g^l(x)$ au second membre de (B.19a), avec $\mu_k \geq 0$ et $\mu_l \geq 0$, peut être remplacée par le seul terme $\hat{\mu}_k \nabla g^k(x)$, où le coefficient $\hat{\mu}_k = \mu_k - \mu_l$ est de signe quelconque.

Par contre, pour un tel système, l'énoncé de la condition nécessaire et suffisante (B.21) réclame pratiquement que les fonctions délimitantes correspondant aux contraintes écrites directement comme égalité soient <u>affines</u>, puisque, d'une part la condition de Slater (B.14) stipule que les fonctions délimitantes g^k ($k \in K$) sont, soit affines, soit convexes, d'autre part les fonction g et -g ne sont simultanément convexes que si ells sont affine.

§ B.5 - CONTRAINTES LINEAIRES

(A) Un **système de contraintes linéaires** (ou **affines**) est un système standard de contraintes S [de la forme (B.5)] tel que toutes les fonctions délimitantes g^k $(k\in K)$ sont affines. Ainsi, par définition (B.4) du domaine, pour qu'un sous-ensemble X d'un espace euclidien $\mathbf{R}^Q$ soit le domaine d'un système de contraintes linéaires d'espace ambiant $\mathbf{R}^Q$, il faut et il suffit qu'il soit l'intersection d'une famille finie de demi espaces fermés. Un tel ensemble est dit ici de **type polyédral** (Bp).

(B) Lorsque S est un système de contraintes linéaires, les fonctions délimitantes, affines, g^k $(k\in K)$ sont de la forme (alinéa B.1.B),

(B.22) $\quad g^k(x) = b^k.x - d^k \quad (x \in G,\ k\in K),$

où les multiplets $(b^k,\ k\in K) \in \mathbf{R}^{Q\times K}$ et $(d^k,\ k\in K) \in \mathbf{R}^K$ sont donnés. Prenant, par exemple $G = \mathbf{R}^Q$, la condition de Slater (B.14) est satisfaite et la condition nécessaire et suffisante (B.21) est valable dès que la fonction objectif f est concave, les relations de Kuhn et Tucker en x (B.19a,b,c") s'écrivant alors,

(B.23) $\quad$ (a) $\nabla f(x) = \sum_{k\in K} \mu_k b^k$, $\quad$ (b) $(\mu_k,\ k\in K) \in \mathbf{R}_+^K$, $\quad$ (c) $\sum_{k\in K} \mu_k (b^k.x - d^k) = 0.$

(C) Si, de plus, la fonction objectif f est linéaire, i.e, de la forme,

(B.24) $\quad f(x) = c.x \quad (x \in \mathbf{R}^Q)$, où $c \in \mathbf{R}^Q$ est donné,

le couple (S,f) constitue un **programme linéaire** (Bq) et la relation, (B.23) se réduit à,

(B.25) $\quad$ (a) $c = \sum_{k\in K} \mu_k b^k$, $\quad$ (b) $(\mu_k,\ k\in K) \in \mathbf{R}_+^K$, $\quad$ (c) $\sum_{k\in K} \mu_k (b^k.x - d^k) = 0.$

Ce programme est convexe (alinéa B.4.D) et la condition nécessaire et suffisante (B.21) donne, dans ce cas :

(B.26) $\quad$ pour que $x \in \text{Argmax}\ \{\ c.x' \mid x' \in \mathbf{R}^Q$ et $b^k.x' \le d^k$ pour tout $k\in K\ \}$, il faut et il suffit que, d'une part $b^k.x \le d^k$ pour tout $k\in K$, d'autre part il existe un multiplet $(\mu_k,\ k\in K) \in \mathbf{R}_+^K$ tel que la relation (B.25) soit satisfaite.

(D) En particulier, l'énoncé (B.26) entraîne le théorème de dualité en programmation linéaire (Br), ainsi qu'on le voit facilement en l'appliquant au système de contraintes comportant, en plus des contraintes $b^k.x \le d^k$ $(k\in K)$, les contraintes de positivité de x, $-x_q \le 0$ $(q\in Q)$.

Cet énoncé entraîne aussi le **lemme de Farkas** (Bs) : étant donnés des ensembles finis non vides Q et K, un multiplet $(a^k,\ k\in K)$ d'éléments de $\mathbf{R}^Q$ et un élément c de $\mathbf{R}^Q$,

(B.27) $\quad$ les relations (a) et (b) ci-après sont équivalentes,

(a) pour tout $x \in \mathbf{R}^Q$, $\quad a^k.x \ge 0$ pour tout $k\in K$ $\quad$ entraîne $\quad c.x \ge 0$,

(b) il existe un multiplet $(\mu_k,\ k\in K) \in \mathbf{R}_+^K$ tel que, $\quad c = \sum_{k\in K} \mu_k a^k$.

En effet, la condition (B.26) pour x = 0 se réduit à l'équivalence entre les relations (B.27a) et (B.27b) si on prend $b^k = -a^k$ et $d^k = 0$ $(k\in K)$ (Bt).

§ B.6 - DETERMINATION D'UN EQUILIBRE OPTIMAL

(A) On s'intéresse ici, relativement aux modèles en cause dans ce texte, à la détermination d'équilibres par les méthodes d'analyse numériques de la programmation non linéaire, plus précisément, à la détermination d'équilibres possédant certaines propriétés d'optimalité, par exemple vérifiant une contrainte de serrage limite (alinéa 5.1.B) ou correspondant à une politique optimale (alinéa 5.3.B) (Bu).

Supposant fixé un jeu de données (d°, t, u) [de la forme (3.1)], d'appareil nominatif (H, I, J, J^e), on désigne par V l'espace ambiant des équilibres du modèle correspondant, i.e. l'espace euclidien constitué des multiplets **v** = (**x**, **y**, y^e, p, **b**) de la forme (3.2) [relation (4.13)] (Bv). On désigne de plus par Φ la fonction numérique (**x**, **y**, y^e, p, **b**) —> Φ(**x**, **y**, y^e, p, **b**), qu'il s'agit, par exemple, de maximiser sur l'ensemble Ed(d°, t, u) des équilibres (alinéa 3.1.E).

(B) Le recours à la programmation passe par l'introduction d'un <u>système standard</u> de contraintes, S [de la forme (B.5)], et d'une application, d'une projection, Δ, de l'espace ambiant W = $\mathbf{R}^Q$ de S <u>sur</u> l'espace V, cela de telle sorte que Δ applique le domaine U(S) <u>sur</u> l'ensemble Ed(d°, t, u) des équilibres, ce qui ramène le problème d'optimisation initial à celui relatif au programme standard (S,f), avec f = $\Phi \circ \Delta$ (alinéa B.4.A).

La construction de ce système, qui explicite la réduction à la forme standard (alinéa B.2.B) des contraintes d'équilibre (3.3) à (3.7), va réclamer des traitement différents selon les contraintes : d'une part (1) les contraintes (3.3a), (3.3c), (3.5b), (3.6) et (3.7) sont déja de cette forme et sont donc à conserver telles quelles ; d'autre part (2) la réduction des contraintes (3.3b) et (3.5a) va résulter directement de conditions convenables sur les données f^i ($i \in I$) et Y^e ; enfin (3) celle des contraintes (3.4) va reposer, également via des conditions convenables, sur le théorème de Kuhn et Tucker. On énonce d'abord (alinéa B.6.C) les (des) conditions permettant la construction, puis on définit les termes W et Δ (alinéa B.6.D), enfin on explicite le système de contraintes standard obtenu (alinéas B.6.E) (Bw).

(C) Les conditions (B.28) à (B.32) ci-après sur le jeu de données (d°, t, **u**) en cause vont permettre de mettre en oeuvre la démarche visée :

(B.28) pour tout $i \in I$, la correspondance f^i est univoque, associée à une application $\underline{f}^i$ de $\mathbf{R}^H_{+*}$ dans $\mathbf{R}^H$;

(B.29) les ensembles de production Y^j ($j \in J$) et Y^e sont engendrés par une analyse d'activité (alinéa 7.1.A) basée sur une même nomenclature d'opérations O et des données technologiques (A, Z^j) ($j \in J$) et (A, Z^e) ;

(B.30) pour tout $j \in J$, l'ensemble Z^j est convexe et coïncide avec le domaine $U(S^j)$ d'un système standard de contraites $S^j = (O, K^j, \mathbf{R}^O, (g^{j,k}, k \in K^j))$, régulier en tout point de Z^j et vérifiant la <u>condition de Slater</u> (B.14) ;

(B.31) l'ensemble Z^e coïncide avec le domaine $U(S^e)$ d'un système standard de contraites $S^e = (O, K^e, \mathbf{R}^O, (g^{e,k}, k \in K^e))$;

(B.32) pour tout $j \in J$, le protocole de taxation u^j, d'une part vérifie la condition de convexité (2.43), d'autre part est la restriction à $\mathbf{R}^H_{+*} \times Y^j$ d'une fonction numérique (aussi notée u^j) sur $\mathbf{R}^H_{+*} \times \mathbf{R}^H$, différentiable par rapport à son second second argument en tout point de $\mathbf{R}^H_{+*} \times Y^j$.

On note que la nomenclature d'opérations O et la matrice technologique A sont supposées communes aux divers producteurs $j\in J^{\#}$ (alinéa 7.1.C) et que les ouverts de définition des divers systèmes S^j ($j\in J^{\#}$) sont tous supposés coïncider avec l'espace ambiant $\mathbf{R}^O$, lui aussi commun ([Bx]). De plus, on suppose, ce qui ne restreint pas la généralité, que,

(B.33a) les ensembles K^j ($j\in J$) sont deux à deux disjointes, et on pose,

(B.33b) $$K^\circ = \bigcup_{j\in J} K^j.$$

(D) L'espace ambiant W du système S (alinéa B.6.B) est alors défini par,

(B.34) (a) $W = \mathbf{R}^{H\times I} \times W^\circ \times \mathbf{R}^O \times \mathbf{R}^H \times \mathbf{R}^I$, avec (b) $W^\circ = \mathbf{R}^{O\times J} \times \mathbf{R}^{K^\circ}$,

tandis que la projection Δ, de W sur V, opère facteur par facteur, conformément à la relation,

(B.35) pour tout $(\mathbf{x}, w^\circ, z^e, p, \mathbf{b}) \in W$,

(a) $\Delta(\mathbf{x}, w^\circ, z^e, p, \mathbf{b}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, Az^e, p, \mathbf{b})$, avec,

(b) $\mathbf{y} = (Az^j, j\in J)$, si (c) $w^\circ = ((z^j, j\in J), (\mu_k, k\in K)) \in W^\circ$ ([By]).

(E) Cela étant, le système de contraintes standard S (alinéa B.6.B) peut être explicité comme suit : (RED) sous les conditions (B.28) à (B.32), pour qu'un multiplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^e, p, \mathbf{b})$, élément de V, vérifie les contraintes d'équilibre (3.3) à (3.7), il faut et il suffit qu'il soit la projection sur V par Δ d'un élément $(\mathbf{x}, w^\circ, z^e, p, \mathbf{b})$ de W, avec w° de la forme (B.35c), vérifiant les contraintes - scalaires et sous forme standard ([Bz]) - (B.36) à (B.40) ci-après,

(B.36) pour tout $i\in I$, (a) $s^i \geq \sigma^i(t^i(p,x^i))$,

(b) pour tout $h\in H$, $x_h^i = \underline{f}_h^i(p,s^i)$, avec,

(c) $$s^i = \sum_{j\in J} o^{ij}[p.Az^j - u^j(p,Az^j)] + b^i,$$

(B.37) (a) pour tout $j\in J$, pour tout $k\in K^j$, $g^{j,k}(z^j) \leq 0$ ([BA]),

(b) pour tous $j\in J$ et $o\in O$, $$\sum_{h\in H} [p_h - \underline{\nabla}_h u^j(p,Az^j)]a_{h,o} = \sum_{k\in K^j} \mu_k \nabla_o g^{j,k}(z^j),$$

(c) pour tout $k\in K$, $\mu_k \geq 0$, (d) $$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K^j} \mu_k g^{j,k}(z^j) = 0,$$

(B.38) (a) pour tout $k\in K^e$, $g^{e,k}(z^e) \leq 0$ ([BA]),

(b) $$\sum_{i\in I} b^i = \sum_{h\in H}\sum_{o\in O} p_h a_{h,o} z_o^e + \sum_{i\in I} \underline{t}^i(p,x^i) + \sum_{j\in J} u^j(p,Az^j),$$

(B.39) (a) pour tout $h\in H$, $p_h \geq 0$, (b) $$\sum_{h\in H} p_h = 1,$$

(B.40) pour tout $h\in H$, $$\sum_{i\in I} x_h^i = \sum_{j\in J}\sum_{o\in O} a_{h,o} z_o^j + \sum_{o\in O} a_{h,o} z_o^e.$$

Dans les relations ci-dessus, d'une part, pour chaque $j\in J$, Az^j désigne, de façon standard, l'image de $z^j \in \mathbf{R}^O$ par l'application linéaire, de $\mathbf{R}^O$ dans $\mathbf{R}^H$, de matrice $A = (a_{h,o}, h\in H, o\in O)$ (alinéa 7.1.A), i.e. l'élément $(\Sigma_{o\in O}\, a_{h,o} z_o^j, h\in H)$ de $\mathbf{R}^H$, d'autre part $\underline{\nabla}_h u^j(p,Az^j)$ désigne la composante d'indice h du gradient, au point Az^j de R^H, de la fonction partielle $y \longrightarrow u^j(p,y)$ (alinéa B.1.A), gradient qui existe d'après la condition (B.32).

Les contraintes (B.36a), (B.36c), (B.38b), (B.39), (B.40) ne font que reproduire ou expliciter scalairement les contraintes (3.3a), (3.3c), (3.5b), (3.6), (3.7) respectivement [point (1) de l'alinéa B.6.B]. Les contraintes (B.36b) explicitent les contraintes (3.3b), compte tenu de la condition d'univocité (B.28), et les contraintes (B.38a) relèvent les contraintes (3.5a), compte tenu de la condition (B.31). Enfin, les contraintes (B.37) relèvent les contraintes (3.4), sous forme des relations de Kuhn et Tucker (B.19), d'après la condition nécessaire et suffisante (B.21), laquelle est valable en vertu des conditions (B.29), (B.30) et (B.32), vu que, en particulier, pour chaque $j \in J$, la fonction $z \longrightarrow p.Az - u^j(p,Az)$ est différentiable en tout point z de Z^j, d'après (B.32), et a pour gradient l'image de $p - \underline{\underline{\nabla}}u^j(p,Az)$ par la matrice transposée de A (BA).

On note que la propriété (RED) donne seulement une explicitation standard du système des contraintes d'équilibre, sans préjuger des conditions requises par l'existence d'un équilibre, lesquelles relèvent du théorème 3.4 (BB).

(F) Un cas important où la réduction (RED) s'applique est celui où, dans le cadre des conditions (B.28) à (B.32), d'une part les ensembles Z^j $(j \in J^\#)$ sont de type polyédral (alinéa B.5.A), d'autre part les protocoles de taxation u^j sont de la forme (2.45), i.e.,

(B.41) $\quad$ pour tout $j \in J$, $\quad u^j(p,y) \;=\; \tau^j(p).y \quad (p \in R^H_{+*}$ et $y \in R^H)$,

où, pour chaque $j \in J$, τ^j est une fonction numérique sur R^H_{+*} donnée, homogène de degré un (BC). Les contraintes (B.37) sont alors de la forme,

(B.42) $\quad$ (a) pour tous $j \in J$ et $k \in K^j$, $\quad b^{j,k}.z^j \;\le\; d^{j,k}$,

(b) pour tous $j \in J$ et $o \in O$, $\quad \sum_{h \in H} [p_h - \tau^j_h(p)]a_{h,o} \;=\; \sum_{k \in K^j} \mu_k b^{j,k}_o$,

(c) pour tout $k \in K$, $\quad \mu_k \ge 0$, $\qquad$ (d) $\quad \sum_{j \in J} \sum_{k \in K^j} \mu_k (b^{j,k}.z^j - d^{j,k}) \;=\; 0$,

où, pour chaque $j \in J$, $b^{j,k} \in R^O$ et $d^{j,k} \in R$ $(k \in Kj)$ sont les données affines définissant l'ensemble de type polyédral Z^j (BD). Ce cas inclut, en particulier, celui des modèles de la classe **Ds**(A,f) utilisés pour faire le lien avec le modèle de Scarf (§ 8.2) : si J n'a qu'un seul élément j et si Y^j est de la forme (8.20a), les contraintes (8.42) se réduisent aux contraintes (8.7), en faisant $O = L = K^j$, $b^{j,k} = -1$ et $d^{j,k} = 0$ $(k \in L)$.

(G) La condition (B.28) sur les fonctions de demande excédentaire (σ^i,f^i) $(i \in I)$ peut être affaiblie, tout en conservant la propriété de réduction (RED), sous les trois formes suivantes : pour chaque $i \in I$, soit (1) pour tous $p \in R^H_{+*}$ et $s \in R$, l'ensemble $f^i(p,s)$ est défini par un système standard de contraintes $S^i(p,s)$, soit (2) la fonction de demande excédentaire (σ^i,f^i) est de type indexé (§ 6.3), soit (3) cette fonction est associée à un système à finalité (X^i,u^i) (§ 6.6), cela avec possibilité de panachage, selon $i \in I$, des trois formes. La première ne pose pas de problème formel, en particulier ne réclame pas de modification du facteur en cause de l'espace W, mais semble peu réaliste. Par contre les deux autres sont formellement plus délicates, en particulier réclament une telle modification pour introduire le paramètre d'indexation ou les multiplicateurs de Kuhn et Tucker.

NOTES

1a [1.1.A] Debreu (1984), chap. 5 et pp. 131-33, Malinvaud (1978), chap. 5, Arrow & Hahn (1991), chap. 5.

1b [1.1.B] Scarf (1972), pp. 98-103 ; Scarf (1984), pp. 1007-13 ; Scarf (1987), pp. 557-58. Ce modèle est présenté au § 8.1 de façon formellement indépendante du reste du texte.

1c [1.1.B, 1.2.E] Par ex., Shoven & Whalley (1973, 1984, 1992), Borges (1986), Piggott & Whalley (1991).

1d [1.1.B] Cette démonstration, selon les indications données par Scarf (1987), p. 558, figure à l'alinéa 8.4.A.

1e [1.1.B] Shoven & Whalley (1973), (1984).

1f [1.1.B] Formalisation que les auteurs n'ont pu trouver, par ailleurs, dans la littérature sur le sujet [par ex., Diamond & Mirrlees (1971), Guesnerie & Laffont (1978), Guesnerie (1980), Mirrlees (1986)].

1g [1.1.C] Dans la présentation du modèle standard par Debreu (1984), c'est la condition "il existe $x°_i$ dans X_i tel que $x°_i << e_i$" (p. 134) qui joue le rôle de condition de survie du consommateur i. Mais, stipuler ainsi que le consommateur dispose, en dotation, de <u>tous</u> les biens nécessaires à sa survie est une condition trop forte, eu égard à l'<u>impératif de réalisme</u> qui motive ce texte (alinéa 1.2.F). Dès lors, l'un des points de départ du travail a été d'affaiblir les conditions locales, individuelles, de survie des consommateurs, en transferrant une partie de l'exigence à des conditions de viabilité globales faisant aussi intervenir le potentiel des producteurs [par ex. la condition de s-viabilité (3.14) qui est la plus typique ; voir aussi l'alinéa 1.2.E], la partie restant au consommateur étant alors représentée par la contrainte d'équilibre (2.11a) [ou (3.3a)] avec l'interprétation (2.10) du seuil $\sigma(p)$. Cette démarche de globalisation de la condition de survie est à rapprocher de celle qui conduit Bonnisseau & Cornet (1988) à leur condition (SA) (p. 124).

1h [1.1.C] Ignorée dans le modèle de Scarf à cause de la loi de Walras usuelle, la condition de survie du consommateur ne semble pas beaucoup préoccuper Shoven & Whalley (1992), puiqu'on y trouve, p. 18, l'hypothèse inverse $0 \in X^m$ (où X^m est l'ensemble de consommation) signifiant la possibilité d'une consommation nulle (sic), hypothèse qui est à rapprocher de l'orientation dominante vers la statique comparative des travaux d'EGC ([1y]).

1i [1.1.C] Définition formelle au § 2.2.

1j [1.1.D] Condition (2.17), ainsi qu'alinéa 2.3.B. La mise au point de cette variante de la loi de Walras a été particulièrement laborieuse.

1k [1.1.D] L'étude de cette question fait l'objet du chapitre 6.

1l [1.1.E] La différence entre ces conditions globales de viabilité et celle de Debreu ([1g]) est à rapprocher de la seconde orientation des modèles en cause qui fait que l'équiibre est entendu ici avec des transferts (alinéa 1.1.F), ce qui n'est pas le cas du modèle standard. Par ailleurs, le choix du terme "viabilité" n'est pas neutre, car la problématique de ces conditions (alinéa 1.1.E) n'est pas sans relation avec celle de la théorie de la viabilité [Aubin (1983, 1991)], même si cette dernière concerne des modèles évolutifs, alors que les modèles étudiés ici sont statiques (alinéa 1.2.G).

1m [1.1.F] Le chapitre 5 présente certaines formulations du comportement de l'Etat, à titre d'illustration des possibilités du modèle.

1n [1.1.F] Protocoles de taxation, des consommateurs ou des producteurs, qui généralisent les protocoles usuels de taxation "ad valorem". Définitions formelles aux § 2.5 et 2.6.

1o [1.1.G] On souligne qu'il s'agit de prendre en compte l'influence des échanges extérieurs sur l'équilibre dans un modèle représentant un ensemble limité, essentiellement de type national, et non d'étudier les mécanismes du commerce international ([7m]). Bien que la prise en compte de ces échanges soit importante, en fonction des motivations appliquées (alinéa 1.2.A,B) et de l'impératif de réalisme correspondant (alinéa 1.2.F), leur traitement n'est pas un objet principal de ce travail. En fait, on peut même dire que le traitement proposé permet cette prise en compte, sans modifier le cadre général du modèle, par la seule introduction de producteurs spécifiques, les producteurs d'import-export. C'est en fonction de cette orientation que ce traitement n'est présenté, au chapitre 7, que comme un procédé de construction des ensembles de production correspondants (§ 7.3 et 7.4).

1p [1.2.A] On souligne la distinction faite ici entre les termes <u>modèle</u> et <u>instrument</u> : en bref, le premier concerne la base conceptuelle (le traitement mathématique, y compris les démarches opératoires) du second qui concerne, avec une orientation pratique, opérationnelle, la mise en oeuvre numérique, y compris les bases de données voulues, l'outil informatique et l'ergonomie. On souligne aussi la distinctions entre un modèle, au sens précédent, qui concerne une situation spécifique et la théorie (ici économique) qui est plus générale. Dans ce texte (en particulier au § 1.1 ci-dessus), le terme modèle est généralement employé au sens précédent qu'il a en économie mathématique. Cependant, il arrive (par ex., aux alinéas 1.2.D,E) qu'il désigne plutôt, comme il est d'usage, l'ensemble constitué par le modèle, au sens précédent, et l'instrument correspondant.

1q [1.2.B] Heuristique : qui favorise l'invention.

1r [1.2.B] Dépendance croissante vis-à-vis d'un extérieur insaisissable, détérioration des mécanismes antérieurs d'économie mixte et des équilibres locaux, exclusion, chômage, pollutions locales et planétaires, etc.

1s [1.2.D] Courrège & al. (1982), (1985a,b), (1987a,b), (1993), Cnrs-Pirsem (1987), Chéneau-Loquay & Matarasso (1986).

1t [1.2.E] Même les analyses critiques, par les spécialistes des modèles macroéconomiques empiriques, restent à l'intérieur de la problématique de la prévision [Deleau & Malgrange (1974), chap. 1, Lucas (1976), Malgrange (1989, 1992)]. Par contre, l'intérêt des instruments de prospective à horizon long et des système d'information correspondants est un élément central de la réflexion menée par Claude Gruson sur le thème "Ethique et gouvernabilité" [Gruson (1977), Ladrière & Gruson (1992), chap. IX].

1u [1.2.E] Par ex., modèle FIFI [Aglietta & al. (1973)], modèle METRIC [Insee (1977)], modèle DMS et ses dérivés [Fouquet & al. (1978), Brillet (1981), Mouttet & al. (1983)].

1v [1.2.E] A l'exception cependant du modèle FIFI, modèle statique, qui visait "encore", au cours de années 70, des projection normatives en vue de la préparation du plan. Ce n'est qu'à partir de son remplacement par le modèle DMS, modèle de simulation dynamique, que la prévision par extrapollation tendancielle du passé récent est devenue dominante, les tentatives de projections au moyen de Mini-DMS-Energie n'ayant pas été concluantes, échec au demeurant "prévisible" à cause de l'absence de représentation intrinsèque de la base physique dans ce modèle (alinéa 1.2.D).

1w [1.2.E] Les travaux sur le modèle ATHEMA des années 80 ont cherché à dépasser les limitations de ce mode de représentation purement économétrique. Voir par ex., les § 1 à 5 et 8 de Courrège (1985a), le fascicule (1) de Courrège & al. (1987a), ainsi que Courrège & Siméon (1993).

1x [1.2.E] Par ex., Courbis (1975a), chap. 4, Lafargue (1980), Deleau & al. (1981), Laffargue & al. (1992). L'une des motivations de la prochaine étape du travail d'élaboration de l'instrument de prospective heuristique (alinéa 1.2.G) est d'arriver à transformer en modèles de prospective heuristique, en particulier par couplage de leurs superstructures avec une représentation intrinsèque de la base physique (alinéa 1.2.D), les remarquables condensés formels de la science économique que sont ces maquettes, malheureusement limitées, dans leur état actuel, à des exercices d'extrapollation tendancielle.

1y [1.2.E] On dit ici "ne semble pas" car les auteurs ne peuvent évidemment prétendre connaitre tous les travaux d'EGC effectués depuis 20 ans. Cependant, il est significatif que, dans le livre récent de Shoven et Whalley (1992), il est davantage question de taux d'élasticité que d'analyse d'activité ou de transformation technique du système productif, tandis que les études envisagées, essentiellement de statique comparative, concernent principalement l'effet de taxations sur l'équilibre calculé, par comparaison avec l'équilibre de calage. Par ailleurs, le chapitre du livre sur la théorie de l'équilibre général (chapitre 2) ne peut pas être considéré comme possédant la seconde caractéristique requise pour les modèles de prospective heuristiques (alinéa 1.2.D), en particulier à cause, d'une part des hypothèses peu réalistes qu'il comporte ([1h]), d'autre part du manque de netteté mathématique, au moins par rapport au standard de l'économie mathématique. Enfin, les "grands modèles" dits d'EGC, comme le modèle ORANI [par ex., Dixon & al. (1991)], ressemblent fort aux modèles macroéconomiques empiriques ([1u]).

1z [1.2.F] Si tant est que l'actuel constitue une référence acceptable de viabilité (sic).

1A [1.2.F] Au demeurant, indépendamment de toute visée appliquée, c'est cette représentation qui est utilisée dans Debreu (1970). Par ailleurs, l'estimation économétrique s'accorde plus naturellement avec la première caractéristique (alinéa 1.2.D) pour les fonctions de demande que pour l'appareil productif, car, pour les premières, il s'agit d'évaluer des comportements et pas seulement un potentiel technique comme pour le second.

1B [1.2.F] Ou (d'un) maximum d'une fonction d'utilité collective de Negishi, somme pondérée des fonctions d'utilité individuelles [Negishi (1960)] (alinéa 5.4.C).

1C [1.2.F] Par ex., interprétations (2.9), (2.10), (2.20), (2.27), (2.38), (3.10) à (3.12), (5.7), (6.21), (6.22), (6.34), (6.35).

1D [1.2.F] Ici au sens restreint ([1p]).

1E [1.2.F] Cet aspect de l'impératif intervient, par ex., aux alinéas 2.3.B, 2.4.B, 3.3.B, 6.2.A, 6.6.B, 6.8.B.

1F [1.2.F] Il est frappant (sic) - et regréttable, au moins du point de vue des motivations en cause ici (alinéas 1.2.A,B) - que, aujoud'hui à la fin du XXème siècle, la plupart des travaux (académiques) d'économie mathématique sur l'équilibre général continuent à concerner des modèles d'économie fermée, sans prise en compte des échanges extérieurs, alors que, par ailleurs, un commerce international débridé conditionne, domine, les économie nationales ([7m]) ([1r]).

1G [1.2.G] Voir les schémas opératoires de Courrège (1985a), § 12, ainsi que, pour des illustrations, Courrège (1985b), Exposé no 4, et Courrège & al. (1987b), Fascicule III, chap. IV.

2a [2.1.A] Par ex., Malinvaud (1978), § 2.2, p.3, ou Debreu (1984), § 2.5, p. 35. Dans Arrow & Hahn (1991), la notion de bien est spécialement immanente, via l'identification d'un bien et de son numéro (par ex. p. 17), sans mention de la nomenclature correspondante, alors qu'un ensemble des types de travail est identifié (p. 75).

2b [2.1.A] En macroéconomie appliquée, la condidération des postes eux mêmes - et pas seulement de leurs numéros - est essentielle à l'entendement (sic).

2c [2.1.A] Par ex., si on est amené à considérer une sous-nomenclature d'une nomenclature ou, mieux, une nomenclature qui est un sous-ensemble du produit cartésien IxJ de deux nomenclatures I et J. Comme exemples de la netteté formelle que permet cette convention, voir les alinéas 3.3.A [relations (3.14) à (3.16)], 4.3.A [relations (4.12) à (4.13)], 7.2.C [relation (7.10)].

2d [2.1.C] Par ex., Malinvaud (1978), Chap. 1, ou Debreu (1984), Chap. 2. Le raccourci d'épistémologie d'un modèle statique présenté ici (alinéas 2.1.A,C-E) est complété par les interprétations qui jalonnent le texte [voir la note ([1+]) et le point de l'alinéa 1.2.F qui l'appelle]. Il serait à développer sur de nombreux aspects, en particulier en ce qui concerne le traitement du temps dans un modèle statique. Plus généralement, la théorie économique manque d'une réflexion épistémologique, d'épistémologie des modèles, au-delà de celle relative aux modèles macroéconomiques empiriques [par ex., Deleau & Malgrange (1974), (1978), Chap. 1 et 2, Malgrange (1989), (1992)].

2e [2.1.D] Voir Courrège (1985a), alinéas 2.a et 8.d, pp. 11 et 40, ainsi que, pour des illustrations, Courrège & al. (1987a), Fascicule (I), § I.3, I.4 et II.1, et Cnrs-Pirsem (1987). On souligne que, eu égard au caractère statique des modèles envisagés (alinéa 2.1.C), les biens, i.e. les postes de la nomenclature de biens, ne sont pas, à priori, supposés datés, puisqu'il n'y a qu'une seule période (date). Cette option "strictement statique" est prise ici en vertu des motivations appliquées de ces modèles (alinéas 1.2.A-C), car les interprétations intertemporelles du formalisme [Malinvaud (1978), Chap. 10, Debreu (1984), Chap. 7] ne permettent pas la prise en compte des transformations profondes visées, cela aussi bien en ce qui concerne l'endogénéisation des transformations du système productif - pour laquelle la représentation de ce dernier par des ensembles de production ne suffit plus - qu'en ce qui concerne la prise en compte de la monnaie. Les phénomènes intertemporels seront traités, en tant que tels, dans un développement ultérieur de ce travail (alinéa 1.2.G).

2f [2.1.D] Malinvaud (1978), alinéa (a), p. 3, Balasko (1988), § I.2, pp. 6-10. Dans une problématique macroéconomique, i.e. avec une nomenclature de biens nécessairement agrégée, cette mesure pose des problèmes considérables tenant à l'inhomogénéité des agrégats que représentent les biens. Voir par ex., Fisher (1969), Courrège & al. (1980), en particulier annexe F, Courrège & al. (1982), chap. 6, Courrège (1985a), alinéas 2.a, 8.c, 8.d, pp. 11, 38, 40, ainsi que, pour une illustration, Courrège & al. (1987a), Fascicule I, alinéas I.3a,b,c, pp. 6-9 du chap. I et § II.1.

2g [2.1.E] Le qualificatif "nominale" est mis ici pour souligner que la monnaie n'est pas considérée comme un bien, qui serait alors qualifié de "numéraire" et dont le prix serait égal à 1 [Malinvaud (1978), p. 4, Balasko (1988), p. 11], la normalisation du vecteur des prix courants passant plutôt par la relation (2.3), ce qui n'empèche pas de comptabiliser les transferts par rapport à la même monnaie (alinéas 2.5.A, 2.6.A, 3.2.F). Le qualificatif "statique", qui fait écho au caractère statique de la représentation des circulations réelles (alinéa 2.1.C), signifie que la fonction d'instrument de réserve (de stockage intertemporel) de valeur, de la monnaie, n'est pas considérée, i.e. que seules le sont ses fonctions d'unité de compte (de mesure des valeurs) et de moyen d'échange [Bernard & Colli (1976), p. 263]. De plus, cette monnaie est supposée stictement limitée à l'ensemble économique considéré et sans rapport nominal avec d'éventuelles monnaies extérieures (alinéa 7.3.A). Ces deux dernières restrictions reviennent à supposer une totale neutralité de la monnaie [par ex. Lacoue-Labarthe, (1980), p. 45, ou Grandmont (1982), p. 38], donc, pratiquement, à en ignorer le rôle dans le cadre statique des modèles en cause (alinéa 1.2.G).

2h [2.2.A] Voir le § A.1 à propos des définitions relatives aux correspondances.

2i [2.2.B] Voir les alinéas 6.3.B et 6.6.C à propos du lien entre fonctions de demande excédentaire à survie et dotations.

2j [2.3.B] La fonction de demande excédentaire à survie définie par (6.12) et (6.9) vérifie la condition de bornitude inf. (2.15) d'après (6.11), mais pas la condition de bornitude (2.14), puisqu'elle vérifie la loi de Walras globale (2.16).

2k [2.3.B] Alinéas 3.5.B, 4.2.A, 4.9.A.

2l [2.6.A] La notation Argmax est définie à l'alinéa A.4.A.

2m [2.6.C] Ce caractère différentiable intervient pour le traitement des contraintes de maximisation du profit (2.40) par les méthodes de la programmation convexe (alinéas 7.1.D et § B.6). Au demeurant, on peut aussi rendre différentiable un protocole de la forme (2.44) en introduisant des approximations différentiables des fonctions $y \longrightarrow y^+$ et $y \longrightarrow y^-$.

3a [3.1.B] Ainsi, du point de vue nominatif, la généralisation, par rapport au modèle de Scarf (alinéa 1.1.B et § 8.1), consiste en l'éventualité de plusieurs producteurs privés et en l'adjonction de l'Etat comme producteur (alinéa 8.3.F).

3b [3.1.B,C] Avec les notations concernant les multiplets introduites à l'alinéa 2.1.B. On ne confondra pas, par ex., la lettre **y** (gras), qui désigne un multiplet [par ex., dans la relation (3.2b)], avec la lettre y (normal), qui désigne un élément courant de $\mathbf{R}^H$ [par ex., dans la relation (3.4)].

3c [3.1.B] Cette décomposition d'un jeu de données intervient au § 5.3.

3d [3.1.C] Vu leurs interdépendances, ces contraintes sont à considérer, du point de vue formel, dans leur ensemble, indépendamment de l'ordre de présentation. Par exemple, la contrainte (3.6) est indispensable pour que les contraintes (3.3) aient un sens. La numérotation des contraintes correspond à l'ordre : consommateurs, producteurs privés, Etat, équilibre global.

3e [3.3.A] La notation Am(Y,u,p) est définie à l'alinéa 2.6.A [relation (2.40b)].

3f [3.3.B] Par ex., Debreu (1984) pp. 82 et 133.

3g [3.3.B] Bonnisseau et Cornet (1988), p. 123, Cornet (1988), p. 109.

3h [3.3.B] Voir, par ex., à ce sujet l'ensemble Y^e défini par la relation (3.32) (alinéa 3.6.E).

3i [3.3.C] Par ex., Debreu (1984) pp. 85 et 132.

3j [3.3.C] Principe parfois aussi appelé "loi de Walras" par les macroéconomistes [par ex., Muet (1992), p. 16].

3k [3.5.A] Voir la fin de l'alinéa 6.8.A à propos du lien entre cette loi et la condition usuelle de non satiation locale.

3l [3.5.B] La condition de bornitude (2.14) joue par ailleurs un rôle important dans la démonstration du thèorème 3.4 (alinéas 4.2.A et 4.9.A).

3m [3.5.C] La condition de t-viabilité (3.15) intervient, à l'alinéa 4.6.C, dans la seconde étape de la démonstration (alinéas 4.2.A et 4.5.B).

3n [3.5.D] Voir les alinéas 1.1.C, 1.1.E et 3.6.G, en particulier les notes qu'ils appellent ([1g]), ([1h]), ([1l]), ([3r]), ([3s]). Toutefois, la condition de s-viabilité peut aussi être trop forte (alinéa 8.12.B), même si elle est parfois nécessaire (alinéas 8.6.B et 8.12.B).

3o [3.5.D] Debreu (1984), 134 ; Shoven & Whalley (1992), p. 17.

3p [3.6.F] Cette différence a déja été envisagée dans l'introduction, aux alinéas 1.1.E,F et dans la note ([1l]). On y revient au chapitre 8, dans le cas des économies d'échange (alinéas 8.11.D,E).

3q [3.6.F] Eu égard à l'inégalité (de libre disposition) ≤ qui figure dans la contrainte d'équilibre physique (3.25), cette définition équivaut à celle d'un équilibre "à excédents gratuits" de Debreu (1984), p. 133.

3r [3.6.G] Voir la note ([1g]) et l'alinéa 1.1.E qui l'appelle. Ces conditions [p. 134 de Debreu (1984)] s'inscrivent encore dans la problématique du modèle d'échange, sans prendre réellement en compte l'interdépendance, du point de vue physique de la viabilité, entre producteurs et consommateurs, ce que fait par contre la condition de s-viabilité.

3s [3.6.G] Cet affaiblissement de la définition de l'équilibre, via l'intervention de l'Etat et les perspectives de développements qu'il offre (chap. 5), ne supprime évidemment pas l'intérêt qu'auraient d'éventuelles conditions assurant l'existence d'un équilibre sans transfert [au sens de (3.33)] tout en étant compatibles avec l'impératif de réalisme. Toutefois, il est à craindre que de telles conditions n'existent pas, en ce sens que le type de condition de Debreu (1984) - conditions très individuelles pour les consommateurs ([1g]) - est le seul susceptible d'assurer un équilibre sans transfert.

4a [4.5.A] La condition de continuité (2.12) sur les fonctions (σ^i, f^i) $(i \in I)$ ne joue aucun rôle ici, dans le Lemme 4.5 (alinéa 4.5.B), et la condition de bornitude inf. (2.15) est inutile lorsque la nomenclature I n'a qu'un seul élément [voir les relations (4.25)].

4b [4.5.A] Le terme p.e au second membre ne joue un rôle que pour la démonstration de la propriété (B) du lemme 4.5 (alinéa 4.8.B).

4c [4.11.A, 6.3.E] Il peut paraître insolite que l'énoncé - et même la problématique - du résultat visé, en l'occurrence le Scolie 6.3, figure dans un chapitre postérieur à celui de sa démonstration. Cet ordre est dû au propos d'organisation du texte visant à rendre le plus rapidement possible intelligible le résultat principal, que constitue le théorème 3.4, propos qui a conduit à réduire les préliminaires, en l'occurence le chapitre 2, et donc à reporter au Chapitre 6 la définition des fonctions de demande excédentaires de type indexé donnant lieu au Scolie 6.3.

4d [4.11.D, 4.12.C] D'après la convention de désignation des éléments de $R^{H \times I}$ (fin de l'alinéa 2.1.B), le second membre de la relation (4.65.1a) désigne le singleton, de l'espace $R^{H \times I}$, dont l'unique élément $z = (z^i, i \in I)$ a, pour chaque $i \in I$, comme composante z^i l'élément $\Phi^i(\mu^i, p, p.\omega^i(\mu^i, p) + s^i) - \omega^i(\mu, p)$ de R^H.

4e [4.12.E] C'est en vue de cet argument que la clause (4.66b) est introduite dans la définition de $\underline{\underline{G}}(x, y, y^e, p, b, \mu)$.

5a [introd. Chap. 5] Voir l'alinéa 5.4.A à propos de ce caractère préliminaire.

5b [5.1.A] Ainsi V_* est un sous-ensemble de l'espace euclidien V introduit au Chapitre 4 [relation (4.13)]. Les variables s^i $(i \in I)$ sont omises pour alléger le formalisme, car elles dépendent des autres variables via les contraintes d'équilibre (3.3c). On pourrait aussi les inclure.

5c [5.1.A] Les indicateurs usuels sont en fait définis naturellement sur l'ensemble V_* tout entier.

5d [5.2.A] [Condition (BL), p. 124, de Bonnisseau & Cornet (1988)]. En effet, $|p.y^e| \leq \alpha$ entraine $p.y^e \geq - \alpha$.

5e [5.2.C] A défaut de telles comparaisons, on verra au chapitre 8 comment des équilibres stricts, en fait des équilibres sans transfert (alinéa 3.6.F), interviennent dans le lien entre le modèle de Scarf et les modèles de la classe en cause dans ce texte (alinéas 8.2.D,E et 8.4.F).

5f [5.3.A] Les liens de ces formulations avec la théorie mathématique de l'économie publique sont envisagés au § 5.4.

5g [5.4.B] Negishi (1960).

5h [5.4.B] Par ex., Guesnerie (1980).

5i [5.4.C,D] Voir à ce sujet le point (2) de l'alinéa 1.2.F.

5j [5.4.E] Par ex., Diamond & Mirrlees (1971) et Mirrlees (1986).

5k [5.4.E] Par ex., dans la ligne de Baumol & Oates (1975) ou de Henry (1974).

5l [5.4.F] Par ex., Guesnerie & Laffont (1978), Cornet (1988), Bonnisseau & Cornet (1988).

5m [5.4.F] Par ex., Benassy (1990).

5n [5.4.F] Par ex., Grandmont (1989). Cependant, le lien avec les modèle keynesiens concernera surtout la suite du présent travail (alinéas 1.2.G et 5.4.G).

5o [5.4.F] Par ex., Milleron (1972) et Henry (1982). Dans un modèle macroéconomique, les consommations de biens publics peuvent être traités "au forfait", i.e. prises en compte par des consommations de biens d'usage d'équipements collectifs (par ex. un émetteur de télévision pour 10.000 km^2 de territoire). Voir le point (1) de l'alinéa 7.2.D.

6a [6.1.B] C'est en général à propos des fonctions d'utilité correspondantes que sont présentées les fonctions de demande de type CES ou Cobb-Douglas [par ex., Shoven & Whalley (1984), p. 1009, (1992), pp. 95-97, Varian (1992), pp. 111-12]. La fonctions de demande excédentaire est aussi parfois envisagée directement [par ex., Kehoe (1985), p. 122].

6b [6.1.B] Voir Courrège (1995), pp. 1198-1201 et 1235-50.

6c [6.3.B] Plusieurs exemples étudiés au chapitre 8 sont basés sur des fonctions de demande excédentaire de ce type (alinéas 8.5.E, § 8.6 à 8.8, alinéas 8.12.D,E).

6d [6.4.B] Voir Courrège (1995), pp. 1166 sq, 1203 sq, 1251 sq, 1259 sq.

6e [6.4.C] On revient sur les fonctions de demande de ce type à l'alinéa 8.8.E et elles interviennent dans l'exemple de l'alinéa 8.12.B.

6f [6.6.C] Par ex., Debreu (1984), pp. 54, 59, 131, 134, Malinvaud (1978), pp. 11, 14, 15, 20.

6g [6.7.B] Lemme 3, p. 135, de Debreu (1984).

6h [6.8.B] Par ex., Debreu (1984), pp. 133-39, où la condition de non satiété sur les $\hat{X}_i$ (bas de p. 133) et la condition de convexité "si x et x' sont deux points de X_i, ..." (haut de p. 134) garantissent la non satiété locale sur les $\hat{X}_i$, donc la loi de Walras en situation (p. 139).

6i [6.8.B] Par ex., Rockafellar (1970), section 18, p. 162.

6j [6.8.B] Le procédé de construction de l'analyse d'activité (§ 7.1 et 7.2) peut aussi fournir des ensembles de consommation.

6k [6.8.D] Par ex., Sonnenschein (1972, 1973), Debreu (1974), Hildenbrand & Kirman (1976), pp. 170-73, Balasko (1986).

6l [6.8.D] Lemme 4, p. 151, de Debreu (1984), à la suite de Debreu (1970), p. 388.

6m [6.9.D] Par ex., Hildenbrand (1983) et Grandmont (1992).

7a [7.1.A, 7.2.A] Conformément à la terminologie introduite à l'alinéa 2.1.A, une nomenclature est, formellement, un ensemble fini non vide.

7b [7.1.A] Au stade du schéma général présenté au § 7.1, l'appellation "analyse d'opérations" serait préférable à l'appellation plus usuelle "analyse d'activités", vu que le concept d'opération est plus général que celui d'activité (alinéa 7.2.A). On conserve l'appellation usuelle à cause de l'importance du lien entre opérations et activités (alinéa 7.2.A), étant entendu que le concept d'activité reste avec son extension usuelle, celle qu'il a depuis Von Neumann (1945-46) et la programmation linéaire [par ex. Koopmans (1951), p. 35, Dantzig (1963), p. 32, Simonnard (1972), p. 27]. De plus, à propos de cette dernière, on souligne que l'analyse d'activités intervient ici, comme dans Scarf [(1982), p. 1012, (1987), p. 557], dans le contexte de modèles d'équilibre général, pour définir des ensembles de production, et pas seulement dans celui des modèles linéaires, par ex., comme dans Koopmans (1951) ([8n]).

7c [7.1.B] La compréhension de ces interprétations, i.e. du concept d'opération, devrait être facilitée en menant leur étude parallèlement à celle du § 7.2 ([7b]). L'introduction de ce concept et le caractère abstrait du schéma général qui en découle semblent inévitables si on veut pouvoir englober dans un même schéma la multiplicité des situations envisageables autour du concept d'activité, multiplicité qu'illustre le § 7.2.

7d [7.1.B] La définition de la grandeur "niveau d'une opération" pose, en pratique, des problèmes considérables tenant à l'inhomogénéité des agrégats que sont les opérations, comme les biens (alinéas 2.1.C,D) et les activité (alinéa 7.2.A). Du point de vue théorique, voir à ce sujet Fisher (1969). Du point de vue pratique, une part importante de l'expérimentation numérique sur le modèle ATHEMA (alinéa 1.2.D) a concerné l'approche de ces problèmes, soit approche technologique [Cnrs-Pirsem (1987), Courrège & al. (1987a, I)], soit approche économétrique [Courrège (1985b), Courrège & Siméon (1992)].

7e [7.1.B] L'importance donnée, dans ce texte théorique sur des modèles ayant une visée macroéconomique (alinéa 1.2.A-C), à ce caractère intrinsèque de la représentation de la base physique, est une façon de réfuter la conception de la théorie économique selon laquelle l'imbrication du physique et du symbolique est inéluctable, même conceptuellement, au niveau macroéconomique. Cette thèse a été largement motivée puis nourrie par les difficultés pratiques que soulève ce caractère ([7d]), difficutés qui ont été rencontrées lors de la construction des modèles de prévision (alinéa 1.2.E) et rapidement tournées, depuis les travaux de Leontief (1958, 1966), par la généralisation des méthodes d'estimation basées sur la comptabilité nationale [voir, à ce sujet, l'introduction de Courrège & Siméon (1993)].

7f [7.1.D, 7.2.D] Voir l'alinéa B.5.A à propos des ensembles de type polyédral et le § B.4 (resp. B.5) à propos de la programmation convexe (resp. linéaire).

7g [7.2.A,B] Bien que le concept d'activité reste le même que dans la démarche usuelle de la programmation linéaire (7b), l'utilisation qu'on en fait ici, via l'analyse, la décomposition, des activités en opérations, diffère, en l'étendant, de cette démarche en ce sens que cette dernière, au moins dans ses applications élémentaires, n'associe à l'activité que l'opération de fonctionnement, voire identifie l'activité à cette opération. A propos de cette décomposition, voir Courrège (1985a), alinéas 2.b, p.12, 4.b, p.17, 8.d, p. 40, ainsi que Courrège & Siméon, Chap. 1, § 1.2 à 1.4).

7h [7.2.B] Voir l'alinéa 8.3.E en ce qui concerne l'option consistant à considérer que le modèle de Scarf comporte un seul producteur analysé en activités, plutôt qu'un producteur par activité. Cette option illustre la distinction entre le concept technique d'activité et le concept économique d'agent (producteur) (8n).

7i [7.2.D,E] Voir, Courrège (1985a), alinéa 8.d(3), p. 40, ainsi que Courrège & al. (1987a), Fascicule (I), alinéa I.3.b,d, pp. 6,8 du Chap. I.

7j [7.2.D] Voir, Courrège (1985a), alinéa 12.c, p. 65, Courrège & al. (1987a), Fascicule (III), Chap. III., Courrège (1985b), Exposé no 4, § 4, p. 11.

7k [7.2.D] Par ex. la ressource représentée par un bien d'usage de sol (7i).

7l [7.2.E] L'importance pratique de tels ensembles de production justifierait de reprendre dans leur cas la théorie de l'équilibre général en présence de non-convexités [par ex., Cornet (1988) et Bonnisseau & Cornet (1988)].

7m [7.3.A] Dans la littérature économique concernant le commerce international, le thème de l'influence des échanges extérieurs sur l'équilibre d'un ensemble limité a été pratiquement supplanté, depuis les années 70, par celui des mécanismes du commerce mondial [par ex., le premier thème est absent de l'ouvrage de référence Helpman & Krugman (1986)]. Le retour à ce thème, qui fait l'objet des § 7.3 à 7.8, s'inscrit dans la perspective des étude de transformations profondes qui motive les modèles envisagés (alinéa 1.2.A,B,D). En effet, ces études réclament un niveau de détail de la représentation qui ne peut être envisagé que pour un ensemble limité, essentiellement de type national, au moins dans l'état actuel de la science économique, tant en ce qui concerne les moyens documentaires que de calcul [voir à ce sujet Ladrière et Gruson, par ex. pp. 157-61]. Le caractère rudimentaire, du point de vue national, des modèles du commerce mondial est éloquent à ce sujet [par ex., Helpman & Krugman (1986), Chap. 1, pp. 12-13].

7n [7.3.A] Voir, par ex., les développements concernant les échanges extérieurs de Courbis (1975a), Chap. 2, pp. 63-112]. Il serait intéressant de confronter ces développements aux exigences de l'équilibre général en les intégrant à un modèle de la classe en cause ici convenablement spécifié pour cela, ce qui permettrait de situer cette confrontation au niveau du standard de rigueur mathématique de ce texte (alinéa 1.2.D). Le travail à faire pour cela, ou pour d'autres développements [par ex. du même ouvrage ou de Courbis (1975b)], est considérable. Il est illustré par ceux des § 7.4 à 7.8 qui s'appuient sur la représentation des échanges extérieurs proposée dans ce paragraphe.

7o [7.3.A, 7.5.A] On se réfère ici à la notion d'<u>économie concurrencée</u> introduite par Courbis à la fin des années 60, autour de la construction du modèle FIFI [voir, par ex. Courbis (1975a), pp. 5, 84, 154, 159, ainsi que Aglietta & al. (1973), pp. 21-22, 54-55]. Cette notion n'est pas confondue avec celle d'<u>économie dominée</u> [ibid. p. 64], en ce sens que seuls les prix à l'extérieurs sont ici supposés fixés, imposés par l'extérieur, les prix intérieurs (des biens échangés) pouvant par contre ne pas être calés sur les précédents (alinéa 7.4.C), alors qu'il le sont dans le cas d'une économie dominée [par ex., ibid. p. 84], cas qui fait l'objet des § 7.5 à 7.8.

7p [7.3.A] L'hétérogénéité du marché mondial fait que l'éventuelle multiplicité des marchés extérieurs qui figure dans l'hypothèse (7.18b) n'est pas déraisonnable. On ne cherche pas à justifier cette éventualité par une analyse de la situation actuelle, au milieu des années 90. Si elle ne convient pas (alinéa 7.3.E), elle peut être omise sans inconvénient formel. Par contre, l'hypothèse (7.18c), qui manifeste l'ignorance du rôle de la monnaie en ce qui concerne les échanges extérieurs (alinéa 1.2.G) ([2g]), est indispensable à la démarche proposée.

7q [7.3.C] Cette interprétation des bornes inf. $\underline{z}_h^{\downarrow}$ ($h \in H°$) permet de prendre en compte des préférences pour les produits importés, tout en évitant de distinguer, dans la nomenclature des biens, les biens représentant des produits importés et ceux représentant des produits locaux, ce qui est avantageux, du point de vue de la modélisation macroéconomique, pour plusieurs raisons : une telle distinction est nominativement peu satisfaisante lorsque les deux types de produits sont physiquement voisins, ce qui est souvent le cas à cause de la mondialisation des techniques ; elle alourdit le modèle en allongeant la nomenclature des biens ; surtout elle complique l'expression des comportements intérieurs de consommation en y introduisant des éléments relevant des échanges extérieurs (alinéa 7.3.D).

7r [7.3.D] A propos des fonctions d'importation ou d'exportation et des problèmes qu'elles posent aux constructeurs des modèles macroéconomiques empiriques, voir, par ex., Courbis (1975a), Chap. 2, § 3, pp. 81-90, Aglietta & al., pp. 54-56 et 73, Fouquet & al. (1978), Chap. 6, pp. 287-301.

7s [7.3.D] A propos de cette carctéristique, on remarque que le procédé de construction de l'ensemble de production Y°, via (7.25), peut être rattaché au cadre formel de l'analyse d'activité (§ 7.1), par exemple en définissant des opérations d'importation et d'exportation. On a préféré ici distinguer les deux cadres, car ce rattachement réclamerait que l'ensemble d'organisation interne Z en cause soit défini, via la contrainte (7.25b), en fonctions des prix extérieurs, ce qui constituerait un amalgame de physique et de symbolique peu conforme à la recherche de netteté épistémologique de ce texte (alinéas 1.2.F et 2.1.C).

7t [7.3.E] Ce traitement "intrinsèque" (alinéa 7.3.D) ne pourrait sans doute pas remplacer les traitements des échanges extérieurs de type économétrique utilisés dans les modèles de prévision (alinéa 1.2.E), traitements basés sur des fonctions d'importation ou d'exportation ([7r]), qui, représentant des comportements de façon empirique, doivent être précisément calés sur le passé.

7u [7.4.D] Une telle mesure, par exemple relative à une finalité collective du type "équilibre social", fournirait un élément utile pour dépassionner le débat concernant la responsabilité de la mondialisation - via l'ouverture douanière et le calage des prix intérieurs sur les prix mondiaux (§ 7.5 à 7.8) - dans les problèmes qui se posent au pays (alinéa 1.2.B).

7v [7.4.D] Le travail théorique concernant cette étude doit s'appuyer sur une expérimentation numérique. Dans ce sens, une maquette de l'économie française au niveau d'agrégation U (15 biens) de la comptabilité nationale est en cours d'élaboration à partir de la micromaquette du modèle ATHEMA [Courrège (1985b)].

7w [7.5.A,E] Cette répartition des conditions en deux groupes correspond d'abord à la logique de l'énoncé (théorème 7.6). Cette logique ne doit pas être masquée par la tentative faite pour rattacher, dans chacun des groupes, les interprétations des conditions correspondantes à un même thème, en l'occurrence "l'ouverture douanière" et "la propension aux importations", tentative qui ne s'accommode que difficilement de certaines conditions techniques [essentiellement les conditions (7.35), (7.43) et (7.44)]. Pour éviter ces lourdeurs, il suffit de sauter les alinéas 7.5.C et 7.5.E qui concernent ces interprétations.

7x [7.5.C,E, 7.8.A] C'est la logique de l'énoncé qui amène à mettre la condition (7.35) [resp. (7.43)] parmi les conditions d'ouverture douanière [resp. de propension aux importations]. Elle pourrait aussi être introduite en même temps que la condition (7.22) [resp. (7.20)] (7w).

7y [7.5.D, 7.8.A] La condition "$x^i \in X(\sigma^i, f^i)$ pour tout $i \in I$" peut être remplacée sans inconvénient par la condition plus faible,

$$x^i \in \bigcup_{p \in S_H} \bigcup_{s \geq \sigma^i(p)} f(p,s) \text{ pour tout } i \in I.$$

7z [7.5.E] On souligne que la condition (7.40) n'exclut pas la possibilité, pour les producteurs en cause, d'une production des biens échangeables avec l'extérieur (alinéa 7.8.F).

7A [7.7.A,D] La condition est aussi suffisante puisqu'il s'agit d'un programme linéaire (alinéa B.5.C).

7B [7.8.A] Formellement, il n'y a pas d'inconvénient, pour la démarche en cause, à ce que le jeu de départ d_* comporte déja un ou des producteurs d'import-export, mais ces producteurs sont alors ignorés. Cependant, du point de vue de l'interprétation, le marché extérieur adjoint doit pouvoir être supposé indépendant du ou des précédents [hypothèse (7.18b)].

7C [7.8.A,B] Lorsque Card(I) > 1, le caractère standard du jeu réclame que les fonctions de demande excédentaire correspondantes vérifient la condition de <u>bornitude inf</u>. (2.15). On suppose que cette condition est aussi vérifiée lorsque Card(I) = 1. Cette hypothèse est utilisée pour exploiter la propriété (7.76).

7D [7.8.B] On souligne le rôle simplificateur joué dans la proposition 7.8-1 par les conditions (7.72) et (7.74). Se passer de ces conditions compliquerait notablement le traitement et semble inutile vu son propos qui est seulement de montrer une existence.

7E [7.8.C] Conformément à la convention sur les sous-relations (voir les indications de lecture, après le sommaire), la condition (7.79) désigne la conjonction des conditions (7.79a), (7.79b) et (7.79c).

7F [7.8.F] Le propos du § 7.8 étant essentiellement formel, on ne s'étend pas sur l'interprétation des diverses conditions introduites, en laissant au lecteur le soin de s'assurer qu'elles ne sont pas trop irréalistes.

8a [8.1.D] Les notations, standard, pA et Az [relations (8.3) et (8.4)] sont explicitées dans les relations (8.7) et (8.8).

8b [8.1.D] Scarf (1972), p. 100, (1982), pp. 1012-13, (1987), pp. 557-58.

8c [8.1.E] Scarf (1972), p. 99, (1982), p. 1008, parfois avec quelque ambiguïté (1982), pp. 1008-9, (1987), pp. 557-58. Cette limitation s'applique aussi aux fonctions de demande des modèles envisagés dans la présent travail (par ex. alinéas 2.3.B et 6.1.A).

8d [8.1.F] Scarf (1987), p. 558.

8e [8.1.F] Scarf (1972), p. 100.

8f [8.2.A, 8.3.C] Par ex., Scarf (1972), p. 99, (1982), p. 1009, (1987), p. 557, Shoven & Whalley (1973, pp. 475-76. Toutefois, la problématique multi-consommateur est explicitée par Kehoe (1985), pp. 121-24, à l'occasion de la construction d'un exemple de modèle de Scarf donnant lieu à non unicité de l'équilibre.

8g [8.2.B] Le rôle de cette option est discuté à l'alinéa 8.3.E.

8h [8.2.C] La relation (8.22b) accompagne ici naturellement l'absence de transfert (8.22a), compte tenu de la nullité du profit (8.3b) (alinéa 8.3.B). L'existence de jeux de données de la classe $D_S(f,A)$ et de tels équilibres standards relatifs à ces jeux est établie au § 8.4 (alinéa 8.4.G).

8i [8.3.C] Cette absence de prise en compte de l'impératif de survie des consommateurs est à rapprocher de la particularité, difficile à interpréter et qu'élimine cette prise en compte, consistant en ce que les fonctions f et -f vérifient conjointement les conditions (8.9) et (8.10) requises par le théorème 8.1. Cet impératif est pris en compte dans la variante introduite au § 8.5.

8j [8.3.D] Pour que la matrice A vérifie la condition (8.16), il suffit, par ex., qu'il existe un bien $h \in H$ tel que $a_{h,l} < 0$ pour tout $l \in L$, auquel cas h représente un facteur de production indispensable.

8k [8.3.D] Scarf (1972), pp. 103 sq, (1982), pp. 1015, (1987), pp. 558 sq. Ce sont ces méthodes qui précoccupent Scarf, plus que la justification économique du modèle. Voir aussi à leur sujet Harker & Pang (1990), entre autres pp. 206-9, ainsi que le § B.6.

8l [8.3.E] Cependant, cette réserve tombe si la fonction f vérifie la loi de Walras (8.10), puiqu'alors la contrainte (8.7b) découle des autres contraintes (alinéa 8.1.D).

8m [8.3.E] Par ex., Scarf (1982), haut de p. 1013, (1987), p. 558, après la rel. 2.

8n [8.3.E] Cette distinction apparaît en particulier via les interprétations (2.20) et (7.7). Elle peut concourir à réduire les inconvénients de l'opposition entre les modèles de programmation linéaire et les modèles d'équilibre général, en particulier les difficultés d'interprétation des modèles visant à participer de ces deux types [voir par ex. à ce sujet Malinvaud (1978), pp. 119-24, ou Gale (1960), chap. 9] : que la représentation en termes d'analyse d'activité de producteurs d'un modèle d'équilibre général conduise à des problème de programmation linéaire (alinéa 7.1.D) ne doit pas conduire à (chercher à) considérer ce modèle comme "linéaire"...

8o [8.3.F] Cette introduction, par ex. dans Shoven & Whalley (1973), pp. 475-77, a été un des points de départ des travaux d'EGC (alinéa 1.1.B).

8p [8.3.F] A propos de cet argument, on note que, dans leur plus récent livre (1992), Shoven & Whalley reviennent à un procédé de taxation associé à un protocole de taxation (pp. 21-28).

8q [8.4.G] Avec toutes les réserves discutées au § 8.3.

8r [8.4.G] Rockafellar (1970), théorème 8.4, p. 64, ou, partiellement, Debreu (1984), pp. 25-7.

8s [8.5.D] Que la condition de s-viabilité (8.62) soit nécessaire résulte immédiatement des contraintes (8.59) et (8.60).

8t [8.7.C] Le cas où $\underline{w}_b < \underline{z}$ peut être aussi détaillé, mais au prix de complications supplémentaires. Il est omis, car le cas (8.88c), cas où $\underline{w}_a < \underline{z} \leq \underline{w}_b$, suffit pour montrer comment la borne inf. $\underline{z}$ fait apparaître un profit p.Az < 0 (alinéas 8.7.A,D).

8u [8.7.D] La vérification, laborieuse, de ces formules peut être faite avec un logiciel de calcul formel, comme Maple ou Mathematica.

8v [8.7.E] Ce petit modèle, qui échappe évidemment à l'impératif de réalisme (alinéa 1.2.F), a seulement une visée formelle, en l'occurrence l'explicitation complète d'un exemple illustrant l'influence des divers paramètres. Or, une telle explicitation semble hors de portée pour des modèles plus réalistes, au moins avec une force de travail limitée. En fait, plus généralement, la visée initiale du chapitre 8, que les § 8.5 à 8.13 sont loin d'atteindre, était de présenter un petit modèle, à la fois économiquement significatif et faisant apparaître, dans un cadre unifié, selon les valeurs des paramètres, les divers exemples et contre exemples annoncés.

8w [8.8.B] Cette recherche, de jeux de données pour lesquels l'ensemble E des équilibres est fini et non réduit à un élément est aussi évidemment liée à la théorie des économies régulières [par ex., Debreu (1970) et (1976), Dierker (1978), Balasko (1988)]. On n'envisage pas ici ce lien, sauf pour une allusion à propos des questions du § 8.9 (alinéa 8.9.E), cela à la fois par souci de simplicié et à cause des limites de cette théorie en présence de production [Kehoe (1984) et (1985), Balasko (1988), § VII.2].

8x [8.8.B, 8.13.C] L'usage de la lettre "a" pour désigner alternativement un coefficient technique et un bien ne doit pas prêter à confusion.

8y [8.8.C] Cette vérification peut être faite avec un logiciel de calcul formel, comme Maple ou Mathematica.

8z [8.8.C] A propos de cette démarche, voir Kehoe (1984), pp. 207-11, et Courrège (1995), pp. 1402-14. L'exemple présenté est une variante de celui de Kehoe (1985), pp. 121-24 et 129-30, variante permettant un traitement élémentaire, i.e. ne faisant pas appel à la théorie des économies régulières ([8w]), et fournissant des valeurs exactes pour les équilibres, mais dont certains prix d'équilibre sont nuls.

8A [8.8.D] Mas-Colell (1991), pp. 277-78, Courrège (1995), pp. 1384-89.

8B [8.8.D] Courrège (1995), pp. 1389-94. Il ne semble pas que ce résultat subsiste sans la condition $w \in \mathbf{R}^H_+$.

8C [8.8.D] Il ne semble pas que ce résultat subsiste, lorsque Card(K) > 1, si la condition $d^i \in -\mathbf{R}^H_+$ n'est pas satisfaite ([8B]), cette condition signifiant que la survie du consommateur est ignorée. La prise en compte de cette dernière est, dans ce cas, plus délicate que dans le cas de la classe **Dsbx**. En effet, d'une part le choix du vecteur v^i, pour la définition de la fonction de seuil σ^i par la relation (8.64a), en termes des vecteurs v^k ($k \in K$), ne va plus alors de soi, d'autre part une définition par une relation du type de (6.20a) ou de (6.33a) donne un socle non nécessairement singleton. L'étude complète de cette question est à faire.

8D [8.9.B] Les relations (8.111a,b) sont équivalentes à la contrainte de maximisation du profit $z \in \text{Argmax}\,\{ p.A^Tz' \mid z' \in R^L_+ \}$ et la relation (8.111c) à la contrainte de survie du consommateur (8.59), avec ici $s^i = p.A^Tz = 0$, d'après (8.111b). L'existence d'un tel équilibre résulte de l'argument indiqué à l'alinéa 8.4.C, lorsque $d \in - R^H_+$. S'il n'en est pas ainsi, sa démonstration réclamerait une adaptation de celle du théorème 3.4, cela pour prendre en compte, d'une part la non compacité de l'ensemble d'organisation interne $Z = R^L_+$, d'autre part la taxation du producteur non associée à un protocole de taxation (alinéas 8.3.F et § 8.13). A propos de cette dernière, on note la variante possible du modèle envisagé ici dans laquelle elle serait, au contraire, associée à un tel protocole, par exemple de la forme (2.45), avec une fonction τ constante.

8E [8.9.D] Courrège (1995), pp. 1299-1352.

8F [8.9.D] Courrège (1995), pp. 1344-46 et 1350-52.

8G [8.11.C] La loi de Walras usuelle (6.1) que vérifient les fonctions de demande ξ^i $(i \in I)$ [condition (8.53b)] entraîne, d'après la proposition 3.3, que la contrainte (8.142) est conséquence des contraintes (8.141).

8H [8.11.D] On omet ici la contraînte correspondant à (8.142) puiqu'elle est conséquence des contraintes (8.145) et (8.146) (^{8G}).

8I [8.11.D] Par ex., Malinvaud (1978), § 5.3, p. 112, ou Varian (1992), § 17.2, p. 316. L'existence d'un équilibre sans transferts peut être déduite de façon élémentaire du théorème de Brouwer, via la considération de la fonction de demande excédentaire globale f définie par $f(p) = \Sigma_{i \in I}\ [\xi^i(p,\ p.w^i) + w^i]$ $(p \in S_H)$ [par ex., Malinvaud (1978), § 5.8, p. 134, Scarf (1982), § 2, p. 1014, Varian (1992), § 17.5, p. 321]. Elle découle aussi directement du théorème de Debreu-Gale-Nikaïdo [Debreu (1984), théorème 7, p. 147] appliqué à cette fonction.

8J [8.11.D] Cette existence découle encore directement du théorème de Debreu-Gale-Nikaïdo (^{8I}), mais ici éventuellement avec une fonction de demande excédentaire globale multivoque.

Aa [introd. Annexes] Les annexes ne constituent pas des exposés complets sur les sujets concernés : on y vise l'accessibilité des résultats et la simplicité des énoncés plutôt la présentation des cheminements démonstratifs qui y conduisent, lesquels font seulement l'objet de références.

Ab [A.1.A] La terminologie employée ici relativement aux correspondances est, par ex., celle de Debreu (1984), p. 126, et celle d'Aubin (1994), p. 275. Elle conserve au terme application son sens usuel, fonctionnel univoque. Cette terminologie diffère à la fois de celle de Bourbaki (1954), p. 72, qui définit une correspondance <u>entre</u> X et Y plutôt qu'une correspondance de X <u>dans</u> Y, et de celle de Berge (1959), p.3, qui emploie le terme application, réservé par Bourbaki au cas univoque. Comme compromis, certains auteurs emploient les termes **application multivoque** ou **multi-application** (de X dans Y) plutôt que le terme correspondance [par ex., Zeidler (1993), p. 447].

Ac [A.2.C] Debreu (1984), pp. 126 et 129. Les définitions "par les ouverts" adoptées ici sont celles de Berge (1959), pp. 114 et 115, à la substitution près du préfixe hémi au préfixe semi. D'autres auteurs [par ex., Aubin (1994), p. 275, Florenzano (1981), p. 31] ne retiennent que la condition (A.6a), appelée alors semi-continuité supérieure [la condition (A.6b) peut ne pas être indispensable, comme dans le lemme (A.20) (Ah)], le préfixe hémi étant alors éventuellement réservé à des notions affaiblies [par ex., Cornet (1975), p. 481, et Aubin (1984), p. 119].

Ad [A.2.D] Berge (1959), théorème 3, p. 116, en ce qui concerne (A.9).

Ae [A.3.B] Berge (1959), Théorèmes 6 et 7, p. 117.

Af [A.4.A] Par ex., Choquet (1964), coroll. 11.17, p. 37, Dieudonné (1963), théorème 3.17.10, p. 59.

Ag [A.4.B] Berge (1959), p. 122 ; Debreu (1984), Lemme 1, p. 129.

Ah [A.5.A] Ce résultat est une généralisation du Lemme 2 du paragraphe 2 de Debreu (1962). Il reste valable si le caractère h.c.s est défini seulement par la condition (A.6a).

Ai [A.5.B] On désigne par int(Z) l'intérieur du sous-ensemble Z de l'espace topologique X.

Aj [A.6.B] Debreu (1984), théorème 1, p. 127, Florenzano (1981), p. 20, Kakutani (1941), corollaire 15.3, Border (1985), p. 72. Comme Debreu (1984), on limite ici l'énoncé au cas où X est de dimension finie qui est suffisant pour les applications visées. Mais le théorème s'étend à des cas plus généraux [par ex., Florenzano (1981), p. 22, Zeidler (1993), p. 452].

Ak [A.6.C] Debreu (1984), p. 30, Florenzano (1981), pp. 18 et 53, Border (1985), p. 29, Zeidler (1993), p. 52. En fait, inversement, on déduit le théorème de Kakutani de celui de Brouwer [par ex. Florenzano (1981), p. 20].

Al [A.7.A] Par ex., Ciarlet (1980), théorème 8.1-1, p. 169, Aubin (1984), théorème 2.3, p. 21, et prop. 2.7, p. 24, Aubin (1994), théorème 3.8.1, p. 109.

Am [A.7.A] D'après l'inégalité de Schwartz.

Ba [B.1.A] Par ex., Ciarlet (1980), p. 141, Dieudonné (1963), prop. 8.9.1, p. 164. Cette condition, de continue différentiabilité d'une fonction, n'intervient pas directement dans les résultats sur l'optimisation envisagés dans cette annexe. Elle est cependant mentionnée ici car elle fournit un critère important de différentiabilité tout court.

Bb [B.2.A] Dans un problème de programmation, ou d'optimisation, on distingue l'étude du système de contraintes (§ B.2 et B.3), de celle de l'optimisation proprement dite (§ B.4 et B.5).

Bc [B.2.A,B] Certains auteurs [par ex. Ciarlet (1980), p. 174] appellent "contraintes" les fonctions g^k elles mêmes et pas seulement les relations "$g^k(x) \leq 0$" correspondantes (alinéa B.2.B). On n'adopte pas ici cet abus de langage, car, même si formellement la relation "$g^k(x) \leq 0$" est canoniquement associée à la fonction g^k, il mêle termes et relations du modèle, vu que le vocable "contrainte" évoque, sémantiquement, une relation plutôt qu'un terme (objet) de la théorie. L'expression "fonction délimitante" introduite ici n'est pas usuelle. Elle est à rapprocher de l'expression, plus générale, "forme fonctionnelle" employée par les théoriciens de la modélisation macroéconomique [par ex. Deleau & Malgrange (1978), p. 21].

Bd [B.2.B] Les modèles de dimension finie ne constituant qu'une classe restreinte. Par exemple, sans parler des modèles faisant intervenir une représentation continue de l'espace temps, les modèles d'équilibre général étudiés dans ce texte ne sont pas, à priori, dans cette classe, en particulier à cause des contraintes (3.4) de maximisation du profit. Cependant ces modèles (de dimension finie) occupent naturellement une place centrale à cause des possibilités de traitement numérique du domaine auxquelles ils donnent lieu. Ainsi, la réduction à un modèle de cette classe est une opération importante. Le théorème de Kuhn et Tucker est un des instruments permettant cette réduction (§ B.6).

Be [B.2.B] Cette remarque participe de la visée simplificatrice de cette annexe, en ce sens qu'elle évite de distinguer, dans le traitement formel, les deux types de contraintes lorsque ce n'est pas indispensable [Moulin & al. (1979), p. 121, Rockafellar (1970), p. 273]. Surtout utile, dans le cas convexe, lorsque les fonctions délimitantes sont affines (alinéa B.4.D), elle ne signifie évidemment pas qu'il est possible de se passer, en programmation non linéaire, via le théorème de Kuhn et Tucker, de l'approche directe des systèmes de contraintes avec égalité [par ex. Ciarlet (1980), § 7.2 et bas de p. 216].

Bf [B.2.C] Par ex., supposant que Card(Q) = Card(K) = 1, la fonction g définie sur R par $g(x) = a - \exp(-x^2/2)$ $(x \in R)$, où $a \in R$ est donné, n'est pas convexe sur R, mais l'est sur l'intervale ouvert G =]-1,1[.

Bg [B.3.A] Cette définition intrinsèque, "par les filtres", du cône $T_X(x)$, est équivalente à celles plus usuelles, "par les suites", ce cône recevant des appellation diverses : cône tangent à X en x [Moulin & al. (1979), p. 55], cône des directions admissibles en x [Ciarlet (1980), p. 211]. L'ensemble des valeurs d'adhérence au point x d'une application g de $X - \{x\}$ dans R^Q est l'intersection des adhérences des images par g des traces sur $X - \{x\}$ des voisinages de x [Par ex., Bourbaki (1961), § 7.2 à 7.5, pp. 78-84].

Bh [B.3.B] Propriété (1) du théorème 9.2-2 de Ciarlet (1980), p. 214. Lorsque le domaine U est convexe, l'inclusion (B.9a) peut être établie directement comme suit : puisque $T_U(x)$ et $C_S(x)$ sont des cônes, il suffit de montrer que, pour tout $u \in U$ et tout $k \in K(x)$, $a = \nabla g^k(x).(u - x) \leq 0$, ce qui résulte de ce que a est la limite lorsque α tend vers zéro de $[g^k(x + \alpha(u - x) - g^k(x)]/\alpha$, quantité qui est est définie et ≤ 0 pour tout $\alpha \in [0,1]$, en vertu de la définition (B.4) de U, de sa convexité [qui fait que $x + \alpha(u - x) \in U$] et de ce que $g^k(x)$ est nul par définition (B.6) de K(x).

Bi [B.3.B,C] La définition (B.10) d'un système qualifié en x [Moulin & al. (1979), p. 121], est plus générale que la définition usuelle où la condition (B.11) est mise à la place de l'égalité, plus faible, (B.10c) [Ciarlet (1980), bas de p. 213]. Se reportant à Ciarlet (1980), on voit facilement que la démonstration des relations de Kuhn et Tucker (p. 215) ne dépend que de l'égalité $C(u) = C^*(u)$ [ici égalité (B.10c)], la condition de qualification usuelle [bas de p. 213), ici (B.11)] ne servant qu'à établir cette égalité [propriété (2) du théorème 9.2-2, p. 214].

Bj [B.3.C] Cela est clair en ce qui concerne les conditions (B.12) et (B.13). En ce qui concerne (B.14), prenant $w = x° - x$, avec $x \in U$, on a, pour tout $k \in K(x)$, $\nabla g^k(x).w \leq g^k(x°) - g^k(x)$, d'après l'inégalité de convexité différentiable valable pour la fonction g^k, en vertu de sa convexité et de la condition de régularité (B.7) (Bk) ; d'où la disjonction entre (B.11b) et (B.11c), d'après celle entre (B.14b) et (B.14c), puisque $g^k(x) = 0$ par définition (B.6) de K(x).

Bk [note (Bj)] Par ex., Rockafellar (1970), théorème 25.1, p. 242.

Bl [B.4.A] L'utilisation du terme "programme" pour désigner le multiplet des <u>données</u> d'un problème de programmation est empruntée à Rockafellar (1970), p. 273. Elle n'est pas générale. Par exemple, dans le cas de la programmation linéaire, Simonnard (1972) appelle ainsi un multiplet de variables vérifiant les contraintes (p. 12).

Bm [B.4.B] Ou, plus explicitement, multiplicateurs de Lagrange généralisés [Ciarlet (1980), p. 216]. Par contre la dénomination "multiplicateurs de Kuhn et Tucker" semble plutôt réservée aux multiplicateurs de la théorie lagrangienne [Par ex., Ciarlet (1980), § 9.3, pp. 219 sq, Moulin & al. (1979), p. 129].

Bn [B.4.C] Par ex., Ciarlet (1980), théorème 9.2-3, p. 216 (Bi).

Bo [B.4.D] Par ex., Ciarlet (1980), théorème 9.2-4, p. 218.

Bp [B.5.A] La dénomination "ensemble de type polyédral" est introduite ici au vu de la variété des dénominations concernant ces ensembles (sic) : ils sont appelés "ensembles polyédraux convexes" par Rockafellar (1970), p. 11, et "polyèdres" par Ciarlet (1980), p. 238, mais (à un détail près) "tronçons" par Simonnard (1972), p. 253, qui appelle "polyèdres convexes" les tronçons bornés, tandis que ces derniers sont appelés "polytopes" par Moulin & al. (1979), p. 12, eu égard au théorème de Weyl [Rockafellar (1970), théorème 19.1, p. 171, Simonnard (1972), théorème B.9, p. 255].

Bq [B.5.C] Par ex. Simonnard (1972), § 1.4 à 1.7, pp. 7 sq, ou Ciarlet (1980), § 10.1, pp. 232 sq (Bl).

Br [B.5.D] Par ex., Simonnard (1972), Théorème 5.2, p. 114, ou Ciarlet (1980), théorème 10.4-3, p. 255. A part cette remarque, la théorie de la dualité, en programmation linéaire ou non linéaire, est laissée à l'écart de cette annexe [par ex., Ciarlet (1980), § 9.3, pp. 219 sq, et § 10.4, pp. 252 sq, ou, dans la cas linéaire, Simonnard (1972), chap. 5, pp. 108 sq].

Bs [B.5.D] Par ex., Ciarlet (1980), théorème 9.1-1, p. 208.

Bt [B.5.D] En fait, déduire ainsi la partie substancielle du lemme de Farkas, i.e. que (B.27a) implique (B.27b), de la condition nécessaire de Kuhn et Tucker (B.20), via sa variante (B.26), n'est qu'illustratif, vu que, inversement, la démonstration de cette condition repose de façon essentielle sur ce lemme [Ciarlet (1980), démonstration du théorème 9.2-3, p. 216].

Bu [B.6.A] Les méthodes usuelles de détermination d'un équilibre basées sur l'algorithme de Scarf [par ex. Scarf (1972), pp. 103 sq, (1982), pp. 1015 sq, (1987), pp. 558 sq] ou sur la recherche d'un point fixe [par ex. Harker & Pang (1990), prop. 2.3, p. 167 et prop. 7.11, p. 207] sont inadaptées aux modèles, comme ceux en cause ici, donnant lieu à une multiplicité d'équilibres (alinéa 5.1.A), et à la problématique correspondante consistant à décrire cette multiplicité, par exemple au moyen de critères globaux. En effet, au moins sous leur forme usuelle, ces méthodes ont un caractère aveugle, i.e. ne permettent pas de sélection parmi les divers équilibres. Par ailleurs, spécifiques du modèle de Scarf, elles seraient à adapter aux généralisations de ce dernier en cause ici. Les méthodes de la programmation non linéaire permettent par contre cette sélection via le critère d'optimisation, mais leur efficacité reste à démontrer, pour des application de grande taille, vu le caractère non convexe des programmes en cause.

L'expérimentation numérique envisagée dans ce sens ([7u]) s'appuyera, entre autres, sur les codes accessibles au travers du logiciel d'analyse numérique GAMS [Brooke & al. (1992)], en particulier sur les codes Minos et Conopt [chap. 9, p. 105, chap. 15, app. D, E].

Bv [B.6.A] Les variables s^i ($i \in I$) sont omises ici (comme au § 5.1) pour alléger le formalisme, car elles dépendent des autres variables via les contraintes d'équilibre (3.3c).

Bw [B.6.B] On souligne la netteté formelle que permet ici, dans l'explicitation des alinéas B.6.C,D,E ([Bz]), la considération de nomenclatures spécifiées plutôt qu'identifiées à des intervales de l'ensemble des entiers (alinéa 2.1.A).

Bx [B.6.C] Ces conditions ne sont pas formellement indispensables. Elle simplifient notablement le formalisme, tout en n'étant pas irréalistes : les premières sont mentionnées à l'alinéas 7.1.C, les secondes sont illustrées par le cas des contraintes affines (alinéa B.6.F).

By [B.6.D] les éléments de $R^{O \times J}$ sont identifiés aux multiplets (z^j, $j \in J$) d'éléments de R^O (alinéa 2.1.B).

Bz [B.6.E] Cette explicitation, laborieuse, en terme scalaires, est faite pour servir de référence formelle lors de l'écriture des programmes de calcul, par ex. sous GAMS ([Bu]).

BA [B.6.E] On souligne que, pour chaque $j \in J^{\#}$, les fonctions délimitantes $g^{j,k}$ ($k \in K^j$) doivent prendre en compte <u>toutes</u> les conditions définissant l'ensemble d'organisation interne Z^j, y compris son inclusion dans R_+^O qui a toujours lieu (alinéa 7.1.A).

BB [B.6.E] La définition de la fonction objectif f, par la relation $f = \Phi \circ \Delta$ (alinéa B.6.B), va de soi, une fois W et Δ définis (alinéa B.6.D). Reste alors à s'accommoder du caractère non convexe du programme standard (S,f) ainsi obtenu ([Bu]).

BC [B.6.F] Par contre, des protocoles de taxation u^j ($j \in J$) de la forme, plus réaliste, (2.44) peuvent ne pas satisfaire la propriété de différentiabilité requise par la condition (B.32).

BD [B.6.F] On note que, pour chaque $j \in J^{\#}$, des contraintes affines de la forme (B.42) peuvent prendre en compte l'inclusion de l'ensemble Z^j dans R_+^O ([BA]).

REFERENCES

Aglietta M., Courbis R., Seibel C. (1973), Le modèle FIFI, Tome I, Présentation générale, C 22, INSEE, Paris.

Aliprantis C.D., brown D.J. (1988), Existence and optimality of competitive equilibria, Springer-Verlag, Berlin.

Arrow K.J., Hahn F.H. (1991), General Competitive analysis, sixth edition, North-Holland, Amsterdam.

Aubin J.P. (1983), La théorie de la viabilité, Le Courrier du CNRS, 50, 31-34.

Aubin J.P. (1984), L'analyse non linéaire et ses motivations économiques, Masson, Paris.

Aubin J.P. (1991), Viability theory, Birkhäuser, Springer-Verlag, Berlin.

Aubin J.P. (1994), Initiation à l'analyse appliquée, Masson, Paris.

Balasko Y. (1986), The Class of Aggregate Excess Demand Functions, in W. Hildenbrand, A. Mas-Colell, ed., Contribution to Mathematical Economics, in Honor of Gerard Debreu, Chap. 3, North-Holland, Amsterdam.

Balasko Y. (1988), Fondements de la Théorie de l'Equilibre Général, Economica, Paris

Baumol W.J., Oates W.E. (1975), The Theory of Environmental Policy ; externalities, public outlays and the quality of life, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Benassy J.-P. (1990), Non Walrasian Equilibria, Money, and Macroeconomics, in B.M. Friedman, F.H. Hahn, ed., Handbook of Monetary Economics, Vol. I, Chap. 4, North-Holland, Amsterdam.

Berge C. (1959), Espaces topologiques ; fonctions multivoques, Dunod, Paris.

Bernard Y., Colli J.-C (1976), Vocabulaire économique et financier, 3ème édition, Ed. du Seuil, Paris.

Bidard C. (1984), ed., La production jointe, nouveaux débats, Economica, Paris.

Bonnisseau J.M., Cornet B. (1988), Existence of equilibria when firms follow bounded losses pricing rules, Journal of Mathematical Economics, 17, 119-147.

Border C.K. (1985), Fixed points theorems with applications to economics and games theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Borges A.M. (1986), Les modèles appliqués d'équilibre général : une évaluation de leur utilité pour l'analyse des politiques économiques, Revue économique de l'OCDE, 7, 7-47.

Bourbaki N. (1954), Théorie des Ensembles, Chap. I et II, Actualités scientifiques et industrielles, 1212, Herman, Paris.

Bourbaki N. (1961), Topologie Générale, Chap. 1 et 2, Actualités scientifiques et industrielles, 1142, 3ème édition, Herman, Paris.

Brillet J-L. (1981), Mini-DMS, modèle macroéconomique de simulation, Archives et documents, 35, INSEE, Paris.

Brooke A., Kendrick D., Meeraus A. (1992), GAMS, a user's guide, release 2.25, boyd & fraser publ. comp., The Scientific Press Series, Danvers, Massachussets.

Chéneau-Loquay A., Matarasso P. (1986), Une modélisation quantitative de relations entre l'homme, la technologie et les ressources dans les zones rurales du tiers monde, l'espace géographique, numéro spécial "Système d'information géographique et systèmes experts".

Choquet G. (1964), Cours d'analyse ; Tome 2, topologie, Masson, Paris.

Cnrs-Pirsem (1987), Projet "Lozère 2010", Troisième Rapport de Recherche.

Cornet B. (1975), Paris avec handicap et théorèmes de surjectivité de correspondances, C.R.A.S, 281, 479-82.
Cornet B. (1988), General equilibrium theory and increasing returns, Journal of Mathematical Economics, 17, 103-18.
Courbis R. (1975a), Compétitivité et croissance en économie concurrencée, Tome 1, Bordas, Paris.
Courbis R. (1975b), Compétitivité et croissance en économie concurrencée, Tome 2, Bordas, Paris.
Courrège P., Deflandre J., Matarasso P. (1980), Présentation discutée d'une recherche d'économie physique, Rapport de recherche, CNRS-PIRDES.
Courrège P., Deflandre J., Matarasso P. (1982), Modèles macroéconomiques pour la prospective libre, Rapport de recherche, CNRS-PIRDES.
Courrège P. (1985a), ATHEMA, Modèle macroéconomique pour la prospective libre, Rapport de recherche, CNRS-PIRSEM.
Courrège P. (1985b), Une micromaquette illustrative du modèle ATHEMA, (I), Rapport de recherche, CNRS-PIRSEM.
Courrège P., Feyrit M., Laville J., Simeon C. (1987a), Application du modèle ATHEMA à un canton rural d'Aquitaine, (I) Présentation d'un jeu de données techniques, (III) Présentation de quelques résultats, Rapports de recherche, CNRS-PIRSEM et GAREP.
Courrège P. (1987b), Une micromaquette illustrative du modèle ATHEMA, (II) Etudes multisectorielles, Rapport de recherche, CNRS-PIRSEM.
Courrège P., Siméon C. (1993), Tableau de la base réelle de l'économie française, Rapport de recherche, CNRS-ISMEA.
Courrège P. (1995), Equilibre général calculable et modèle Athema, journal de travail manuscrit, Fascicules 6 et 7.
Dantzig G.B. (1963), Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, Princeton.
Debreu G. (1962), New Concepts and Thechniques for Equilibrium Analysis, International Economic Review, 3, 257-73. Reproduit dans Debreu (1983).
Debreu G. (1970), Economies with a finite set of equilibria, Econometrica, 38, 387-92. Reproduit dans Debreu (1983).
Debreu G. (1974), Excess demand functions, Journal of Mathematical Economics, 1, 15-23. Reproduit dans Debreu (1983).
Debreu G. (1976), Regular Differentiable Economies, The American Economic Review, 66, 280-87. Reproduit dans Debreu (1983).
Debreu G. (1983), Mathématical Economics, Economic Society Monographs, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
Debreu G. (1984), Théorie de la valeur, Dunod, Paris.
Deleau M., Malgrange P. (1974), Les modèles macroéconomiques empiriques ; analyse et optimisation, Rapport final de la convention CORDES-CEPREMAP 37/1974.
Deleau M., Malgrange P. (1978), L'analyse des modèles macroéconomiques quantitatifs, Economica, Paris
Deleau M., Malgrange P., Muet P.A. (1981), Une Maquette représentative des modèles macroéconomiques, Annales de l'INSEE, 42, 53-91.
Diamond P.A., Mirrlees J.A. (1971), Optimal Taxation and Public Production I: Production efficiency, The American Economic Review, 61.
Dierker R. (1982), Regular Economiest, in K.J. Arrow, M.D. Intriligator, ed., Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, Chap. 17, North-Holland, Amsterdam.

Dieudonné J. (1963), Fondements de l'analyse moderne, Gauthier-Villars, Paris.
Dixon P.B., Horridge M., Johnson D.T. (1991), ORANI projections for the Australian Economy for 1989 to 2020 with Special Referenc to the Land Freight Industry, in Applied General Equilibrium, J. Piggott, J. Whalley, ed., Physica-Verlag, Heidelberg.
Fisher W.D. (1969), Clustering and Aggregation in Economics, The John Hopkins Press, Baltimore.
Florenzano M. (1981), L'équilibre économique général transitif et intransitif, Monographie du séminaire d'économétrie, Editions du CNRS, Paris.
Fouquet D., Charpin J.M., Guillaume H., Muet P-A., Vallet D. (1978), DMS, Modèle dynamique multisectoriel, C 64-65, INSEE, Paris.
Gale D. (1960), The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, New York.
Grandmont J.-M. (1982), Money and value, Economic Society Monographs, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris.
Grandmont J.-M. (1989), Keynesian Issues and Economic Theory, The Scandinavian Journal of Economics, 91, 265-93.
Grandmont J.-M. (1992), Transformations of the Commodity Space, Behavioral Heterogeneity and the Aagregation Problem, Journal of Economic Theory, 57, 1-35.
Gruson C. (1977), Champ actuele d'une éthique politique, Rapport de recherche, Centre de Villemétrie, Paris.
Guesnerie R., Laffont J. (1978), Taxing price makers, Journal of Economic Theory, 19, 423-455.
Guesnerie R. (1980), Modèles de l'économie publique, Monographie du séminaire d'économétrie, Editions du CNRS, Paris.
Harker P.T., Pang J.S. (1990), Finite-dimensionnal variationnal inequalitiy and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications, Mathematical Programming, 48, 161-200.
Helpman E., Krugman P.R. (1986), Market Structure and Foreign Trade ; Increasing Returns, Imperfect Competition, and The international Economy, The MIT Press, Cambridge Massachussets.
Henry C. (1974), Investment Decisions under Uncertainty: the Irreversibility Effect, The American Economic Review, 64, 1006-1012.
Henry C. (1982), Cours d'économie II, économie publique, Ecole Polytechnique, Paris.
Hildenbrand W., Kirman A.P. (1976), Introduction to equilibrium analysis, North Holland, Amsterdam.
Hildenbrand W. (1983), On the Law of Demand, Econometrica, 51, 997-1019.
Insee (1977), METRIC ; Modèle économétrique trimestriel de la conjecture, Annales de l'Insee, 26-27.
Kakutani S. (1941), A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. journal 8, 457-59.
Kehoe T.J. (1984), Computing all of the equilibria of economies with two factors of production, Journal of Mathematical Economics, 13, 207-23.
Kehoe T.J. (1985), Multiplicity of equilibria and comparative statics, Quaterly Journal of economics, 100 (1).
Koopmans T.J. (1951), ed., Activity analysis of production and allocation, Yale Univ. Press, New Haven.
Lacoue-Labarthe D. (1980), Analyse monétaire, Dunod, Paris.
Ladrière P., Gruson C. (1992), Ethique et gouvernabilité, un projet pour l'Europe, Presses Universitaires de France.

Laffargue J-P. (1980), Les modèles macrodynamiques de politique économique : dialogue entre le théoricien et l'économètre, Annales de l'INSEE, 40, 33-64.

Laffargue J-P., Malgrange P., Pujol T. (1992), Une maquette trimestrielle de l'économie française avec anticipations rationnelles et concurrence monopolistique, L'Actualité économique, 68, 225-61.

Leontief W.W. (1958), La structure de l'économie Américaine, Génin, Paris.

Leontief W.W. (1966), Input-output Economics, Oxford Univ. Press, New York.

Lucas R. E. Jr. (1976), Econometric Policy Evaluation : a Critique, in K. Brunner, A. Meltzer, ed., The Phillips Curve and Labor Markets, supplément au Journal of Monetary Economics.

Mc Kenzie L.W. (1981), On the existence of general equilibrium for a competitive market, Econometrica 49, 819-841.

Malgrange P. (1989), Forces et faiblesses des modèles macro-économétriques, in Modélisations et décisions économiques, B. Cornet, ed., De Boeck-Université, Bruxelles, 71-92.

Malgrange P. (1992), Bulletin de santé des modèles macro-économétriques, Revue économique, 43, 565-76.

Malinvaud E. (1978), Leçons de microéconomie, 4ème édition, Bordas, Paris.

Mas-Colell A. (1991), On the uniqueness of equilibrium once again, in W.A. Barnett, B. Cornet & al., Equilibrium theory and applications, Cambridge Univ. press, Cambridge.

Mirrlees J.A. (1986), The theory of optimal taxation, in K.J. Arrow, M.D. Intriligator, ed., Handbook of Mathematical Economics, Vol. III, Chap. 24, North-Holland, Amsterdam.

Milleron J.-C. (1972), Theory of Value With Public Goods : a Survey, Journal of Economic Theory, 5, 419-77.

Moulin H., Fogelman-Soulié F. (1979), La convexité dans les mathématiques de la décision, Collection Méthodes, Hermann, Paris.

Mouttet F., Plateau C., Brillet J.L., Morand J.P. (1983), Mini-DMS-Energie, modèle des interactions économie-énergie, Archives et Documents, INSEE, Paris.

Muet P-A. (1992), Théories et modèles de la macroéconomie, Tome 1, L'équilibre de courte période, 4ème édition, Economica, Paris.

Negishi T. (1960), Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy, Metroeconomica, 12, 92-97.

Piggott J, Whalley J., ed. (1991), Applied General Equilibrium, Physica-Verlag, Heidelberg.

Rockafellar R.T. (1970), Convex Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton.

Scarf H.E. (1973), The Computation of Economic Equilibria, Yale Univ. Press, New Haven, London.

Scarf H.E. (1982), The computation of equilibrium prices : an exposition, in W.P. Arrow, M.D. Intriligator, ed., Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, Chap. 21, North-Holland, Amsterdam.

Scarf H.E. (1987), Computation of General equilibria, in The New Palgrave: A Dictionnary of Economics, J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, ed., Vol. I, The Macmillan Press Limited, New York, 556-62.

Shoven J.B., Whalley J. (1973), General Equilibrium with Taxes: A Computational Procedure and an Existence Proof, Review of Economic Studies, 60, 475-89.

Shoven J.B., Whalley J. (1984), Applied General Equilibrium Models of Taxation and International Trade : An Introduction and Survey, Journal of Economic Litterature, 22, 1007-51.

Shoven J.B., Whalley J. (1992), Applying General Equilibrium, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Simonnard M. (1972), Programmation linéaire, technique du calcul économique, Tome 1, 2ème édition, Dunod, Paris.

Sonnenschein H. (1972), Market excess demand functions, Econometrica, 40, 549-63.

Sonnenschein H. (1973), Do Walras'identity and continuity characterize the class of comunity excess demand functions, Journal of Economic Theory, 6, 345-54.

Varian H.R. (1992), Microeconomic analysis, 3ème edition, Norton & Company, London.

Von Neumann J. (1945-46), A Model of General Economic Equilibrium, Rev. of Economic Studies, 23.

Zeidler E. (1993), Non linear functionnal analysis and its applications ; (I) Fixed points Theorems, Springer-Verlag, Berlin.

INDEX