

ATHEMA : MODELE MACROECONOMIQUE POUR LA PROSPECTIVE LIBRE

par Philippe COURREGE

laboratoire mixte CNRS-AFME "modèles d'économie physique et prospective".

octobre 1985

ATHEMA : MODELE MACROECONOMIQUE POUR LA PROSPECTIVE LIBRE

par Philippe COURREGE (1)

Le mot "ATHEMA" peut être entendu de deux manières : d'une part comme sigle il signifie "Approche Technologique et Heuristique En Macroéconomie Appliquée", avec une allusion à la déesse de l'industrie ; d'autre part comme début du mot "a-thématique" il rappelle la visée du modèle qui est l'étude d'alternatives multiples, ce pour quoi est mis le qualificatif "libre".

RESUME

On présente l'appareil formel et certains schémas d'utilisation prospective d'une classe de modèles macroéconomiques incluant une représentation de la base physique suffisamment intrinsèque pour permettre l'étude exploratoire quantitative (que l'on appellera prospective libre) de fonctionnements économiques différents de l'actuel, en particulier pour permettre d'explorer la cohérence globale d'éventuelles transformations profondes de l'appareil productif ou des comportements collectifs.

A cette fin, le modèle comporte et conjugue, d'une part une représentation du système productif en termes de techniques, du type de celle des modèles d'allocation de ressources, d'autre part une représentation de l'organisation économique multisectorielle permettant la prise en compte des échanges, des comportements sectoriels, de l'appareil monétaire et financier. La structure, générique au delà des contraintes fondamentales, peut être largement sous-déterminée par rapport aux comportements, de manière à permettre l'étude d'alternatives multiples par des analyses multicritères. Les études peuvent être, de façon complémentaire, statiques ou de cheminements.

(1) UER de mathématiques et informatique, Université de Paris VII ;
laboratoire mixte CNRS-AFME "modèles d'économie physique et prospective".

AVANT PROPOS

Le texte qui suit constitue une présentation du modèle formel sous-jacent à l'instrument de prospective macroéconomique en cours de développement dans le laboratoire mixte CNRS-AFME "modèles d'économie physique et prospective".

Ce texte reprend en grande partie, mais en l'actualisant, le contenu du fascicule "modèles macroéconomiques pour la prospective libre" (référence [32]) qui a résulté, avant la création du laboratoire, du travail de l'équipe technique de base du PIRSEM entre 1976 et 1982.

Lors de ce travail de refonte, l'auteur a bénéficié, au delà de ses liens avec J.DEFLANDRE et P.MATARASSO, de la collaboration développée depuis 1982 avec R.BARA et J.P.TABET autour de l'informatisation du modèle.

En plus des remerciements qu'il adresse de nouveau aux personnes qui étaient intervenues à des titres divers pour faciliter le travail antérieur ([32], page 19), l'auteur souligne l'importance de l'aide apportée par l'AFME pour l'opération actuelle, en particulier à travers le concours de R.BARA et J.P.TABET. Cette aide est venu compléter celle du CNRS, via le PIRSEM et l'intérêt porté à cette recherche par son directeur, M.CLAVERIE.

L'auteur remercie aussi I.GACHIE pour ses observations. Il remercie enfin la société ALCATEL-THOMSON qui a beaucoup facilité le travail informatique et bureautique par les arrangements qu'elle a permis pour la fourniture des matériels.

Paris, octobre 1985.

SOMMAIRE

- § 1 - Introduction (p. 4)
 - a) Motivations
 - b) Vue d'ensemble : structure
 - c) Vue d'ensemble : utilisation
 - d) Propos méthodologique
 - § 2 - Nomenclatures (p. 11)
 - a) Nomenclatures de base
 - b) Nomenclatures dérivées
 - c) Descriptif
 - § 3 - Variables de base (p. 14)
 - a) Variables physiques
 - b) Variables monétaires et financières
 - § 4 - Variables dérivées (p. 17)
 - a) Soldes physiques : définitions
 - b) Coefficients techniques
 - c) Soldes physiques : interprétations
 - d) Variables comptables
 - § 5 - Contraintes fondamentales (p. 22)
 - a) Equilibres physiques
 - b) Evolutions des parcs et des stocks
 - c) Comptabilité
 - § 6 - Contraintes supplémentaires (p. 26)
 - a) Contraintes circonstanciées
 - b) Contraintes spéciales
 - § 7 - Récapitulation (p. 30)
 - a) Structure de base
 - b) Réalisations de base
 - c) Structure spéciale ; réalisations
 - d) Déterminations
 - § 8 - Modalités de construction (p. 36)
 - a) Protocole opératoire
 - b) Délimitation
 - c) Agrégation
 - d) Modalités techniques
 - e) Modalités sectorielles
 - § 9 - Schémas d'utilisation (p. 43)
 - a) Analyses multicritère
 - b) Critères
 - c) Variation de réalisations
 - d) Poids de l'organisation
 - e) Statut des prix
 - § 10 - Un exemple statique (p. 49)
 - a) Elements de base
 - b) Réalisation de base
 - c) Cas des prix exogènes
 - d) Calcul de prix
 - e) Modèle de Von Neumann-Sraffa
 - f) Ensembles de production
 - § 11 - Cas de la production simple (p. 56)
 - a) Hypothèses
 - b) Système réduit
 - c) Résolution
 - d) Discussion
 - e) Tableaux de Leontief
 - § 12 - Etudes de transition (p. 63)
 - a) Réalisations locales
 - b) Etat initial ; calage
 - c) Etudes finales
 - d) Transitions
 - e) Prospective et planification
- Bibliographie (p. 70)

§ 1 - INTRODUCTION

a) Motivation. La mondialisation progressive de l'économie, concomitante du développement massif des transports et des communications, se traduit par la destruction rapide des équilibres antérieurs, locaux, régionaux, nationaux, tant dans les pays industrialisés que dans les pays en voie de développement. Une opinion largement dominante laisse entendre que cette évolution est inéluctable et que le seul futur possible est un "nouvel ordre économique" entérinant, via la division internationale du travail, la dépendance croissante des collectivités territoriales vis-à-vis de leur commerce extérieur et des aléas de la conjoncture mondiale.

Face à cette situation qui réclame, soit pour s'y adapter, soit pour y résister, des transformations profondes de l'appareil productif et du système économique, il n'existe pas d'instrument opérationnel de prospective macro-économique pouvant servir de support quantitatif à l'étude de situations de rupture par rapport aux équilibres antérieurs et à un débat approfondi sur les alternatives.

En effet, au niveau macroéconomique des collectivités territoriales, principalement de la nation, l'essentiel des travaux de prospective relève actuellement de la prévision ("ce que risque d'être l'avenir historiquement") et plus précisément de la prévision par extrapolation tendancielle du passé récent au moyen des modèles macroéconomiques empiriques.

Ces modèles sont des instruments très rigides de par leur mode d'estimation économétrique, sans représentation élaborée de la base physique du processus économique. Ils ne permettent donc pas d'étudier la cohérence d'éventuelles restructurations profondes : en fait, ils donnent plutôt lieu à une utilisation normative dans laquelle leur rigidité structurelle sert de caution "scientifique" à ce "nouvel ordre économique" au travers de son inéluctabilité.

De plus, la réduction de la prospective macroéconomique à la prévision, et l'utilisation normative qui en est faite, sont à rapprocher de l'absence de planification à long terme au niveau macroéconomique, intersectoriel. Le plan est pratiquement réduit en France, malgré la réforme récente, à un ensemble de procédures de concertation entre l'Etat et les acteurs de la vie économique, autour de projections à moyen terme ayant un caractère de prévisions plus que d'objectifs : cette planification indicative a pu permettre (au temps de la croissance) de coordonner un mouvement existant, mais est inadaptée, par son caractère prévisionnel, à la mise en oeuvre de transformations profondes.

Cette carence de la prospective au niveau macroéconomique est d'autant plus lourde de conséquences qu'elle contraste avec la puissance des méthodes de programmation quantitative mises en oeuvre dans la planification sectorielle du développement industriel et commercial pratiquée de façon autoritaire, par les grands acteurs pour leurs implantations locales dans l'espace économique laissé libre par la faiblesse de la planification macroéconomique, espace où ne peut de ce fait s'exercer une concertation équilibrée.

Ainsi, la prospective contemporaine, l'exploration du futur, est dominée et fortement orientée par les pressions concomitantes, de la prévision normative au niveau macroéconomique et de la planification technologique pratiquée par les grands acteurs au niveau sectoriel. Le but premier de ce travail est de présenter un instrument de prospective macroéconomique susceptible de pondérer ces pressions en permettant l'étude exploratoire quantitative d'alternatives multiples aux diverses échelles territoriales (de la commune à l'ensemble multinational) : plutôt que "ce que risque d'être l'avenir, historiquement", il s'agit d'explorer librement "ce que pourrait être l'avenir, techniquement et fonctionnellement". On appellera "prospective libre" ce type d'exploration.

Cet instrument peut être utilisé pour une réflexion spéculative sur l'avenir, indépendamment de toute visée planificatrice. Il peut aussi jouer un rôle important dans un processus de planification non dirigiste bien qu'ayant pour but de promouvoir les transformations requises : la démarche exploratoire envisagée peut intervenir comme préalable, puis comme moyen d'adaptation continue, dans un tel processus, voulu concerté et souple à court terme mais volontariste à long terme, c'est à dire porteur d'un projet préalablement explicité.

L'instrument visé comprend les trois aspects complémentaires suivants qu'on a cherché à intégrer dans un même ensemble opérationnel :

- un formalisme mathématique (un "modèle" formel) permettant la représentation formelle (la "mise en équations") de la réalité économique à explorer, puis la maîtrise des déterminations ;

- un protocole opératoire concernant, d'une part la constitution des jeux de données préalables aux déterminations, d'autre part les schémas d'utilisation du modèle ;

- un logiciel permettant la gestion des données, les calculs correspondant aux déterminations, l'analyse et l'impression des résultats.

Le présent texte concerne les deux premiers aspects. D'autres documents en préparation concernent, d'une part le logiciel, d'autre part des applications numériques illustrant les possibilités de l'instrument. On commence ci-après (alinéas 1.b et 1.c) par une vue d'ensemble du modèle.

b) Vue d'ensemble : structure. En fonction de la liberté exploratoire requise, liberté d'explorer des systèmes productifs, et plus généralement des fonctionnements économiques, très différents de l'actuel ou du passé, les deux caractéristiques suivantes sont essentielles : d'une part une représentation intrinsèque de la base physique du processus économique, représentation basée sur l'analyse compréhensive des techniques plutôt que sur l'estimation économétrique ; d'autre part la possibilité d'une sous-détermination des systèmes de contraintes par rapport aux comportements des acteurs économiques.

Ces caractéristiques sont à la base (et font la force) des modèles de programmation quantitative utilisés dans la planification sectorielle ([79], [87], [94], [45]) : il s'agit de les intégrer dans un cadre global, macroéconomique.

Le type de structure proposé pour cela comporte deux étages : d'une part une structure de base, structure standardisée qui concerne essentiellement l'expression des équilibres fondamentaux et des conditions circonstancielles, tant physiques que monétaires et financiers ; d'autre part une structure spéciale, venant au dessus de la structure de base pour la compléter par des éléments organisationnels et comportementaux. Ainsi, la structure de base est très fortement sous-déterminée du point de vue des comportements, tandis que l'ensemble formé de la structure de base et de la structure spéciale peut l'être beaucoup moins, voire être catégorique (i.e. donner lieu à déterminations avec unicité) comme dans les modèles d'équilibre général.

Ces structures ne font aucun appel à un formalisme probabiliste : les contingences sont traitées en termes de sous-détermination et de variabilité, non en termes d'incertitude sur les données.

La structure de base comporte :

- une représentation du système productif en termes de techniques au moyen d'une fonction de production à facteurs complémentaires (du type de celles du modèle de Von Neuman ou des modèles d'allocation de ressources), la matrice standard de coefficients techniques de fonctionnement étant complétée par des

matrices de coefficients de maintenance et de transformation des équipements permettant de prendre en compte les investissements dans les mêmes termes physiques ; ces matrices sont encadrées par les deux nomenclatures techniques de biens et d'activités ;

- une représentation de l'organisation économique intégrant, d'une part le cadre multisectoriel des échanges avec une nomenclature de secteurs conçus comme sous-systèmes productifs et pôles d'échanges donnant lieu à une comptabilité, d'autre part l'appareil monétaire et financier avec une nomenclature d'opérations selon la méthode des comptes écrans.

Le formalisme de cette structure de base est complètement standardisé du point de vue des types de composants (variables, contraintes, données), mais complètement ouvert du point de vue du descriptif fondamental (système des nomenclatures qui indexent les éléments de la structure), lequel est générique, i.e. peut donner lieu à des spécifications très diverses sans que le formalisme ait à être modifié. Distinguant structure statique (monopériode) et structure évolutive (multipériode), les composants se présentent comme suit :

- les variables de base sont, pour chaque période, les niveaux physiques [des activités, des parcs d'équipements, des stocks, des transformations en cours (constructions, démantèlements, reconversions), des échanges entre secteurs], les prix (différenciés selon les échanges), les montants des opérations monétaires ou financières des secteurs, les encours correspondants ;

- les contraintes fondamentales expriment, la conservation des biens dans leurs circulations (productions, consommations, échanges), la compatibilité du fonctionnement avec les équipements disponibles, l'évolution de ces derniers (due aux transformations en cours) et des stocks, les équilibres comptables et financiers des secteurs ; toutes ces contraintes sont linéaires (à seuil pour les effets d'échelle) sauf les équilibres comptables des secteurs qui sont bilinéaires en ce sens qu'ils font intervenir naturellement les produits des prix par les niveaux des échanges ;

- les contraintes circonstancielles expriment des circonstances (ou des comportements) en imposant à certaines variables d'être exogènes (fixées) et à d'autres d'être bornées ; par exemple, les prix relatifs aux échanges extérieurs sont en général exogènes, les limitations de la demande extérieure sont exprimées par des bornes supérieures des exportations, etc ;

- les données de base sont les coefficients techniques (données modulaires figurant dans les contraintes fondamentales) et les données circonstancielles (valeurs des variables exogènes et des bornes de variables) ; chaque multiplet de valeurs de toutes ces données constitue un jeu de données de base.

La conjugaison de cet ensemble formellement rigide, entièrement spécifié, et du caractère générique du descriptif sous-jacent va jouer un rôle essentiel dans les applications en ce sens que ce même formalisme de base (donc le même logiciel) est utilisable pour l'étude de collectivités territoriales très diverses : ce cadre permet, via la définition de descriptifs adaptés aux divers ensembles à représenter, une approche systématique des problèmes difficiles que pose (en particulier en ce qui concerne l'agrégation) la constitution des jeux de données (second aspect de l'instrument ; alinéa 1.a).

La démarche est, de ce point de vue, analogue à celle du modèle de Leontief ([90], [91], [19], [11]) ou du modèle de Von Neuman-Sraffa ([108], [116], [114], [1]), mais il y a ici quatre nomenclatures de base (biens, activités, secteurs, opérations) au lieu d'une seule pour le premier et de deux pour le second. Le formalisme de la structure de base réalise une synthèse entre, d'une part celui du modèle de Von Neuman-Sraffa qui ne distingue pas activités et

secteurs, d'autre part ceux des modèles microéconomiques de l'équilibre général ([37], [100]) ou des modèles macroéconomiques empiriques ([3], [28], [51]) qui ignorent les activités.

On souligne que l'analyse détaillée de la base physique en termes techniques permet d'éviter les non-linéarités "empiriques" (comme celles des fonctions de production) sur lesquelles reposent ces derniers.

Chaque application spécifique doit commencer par la mise en place de la structure de base ; cependant, cette dernière ne permet pas en général de représenter toutes les particularités voulues (spécialement celles concernant des comportements) par le seul choix des données circonstanciées. Ces particularités doivent être prises en compte par des contraintes spéciales, contraintes qui lient certaines des variables de base à des données spéciales et dont la formulation peut réclamer l'introduction de variables spéciales. Ces éléments constituent la structure spéciale déjà mentionnée.

Les contraintes spéciales concernent plutôt des comportements ou des réglementations ; par exemple : taux de croissance imposé pour une activité dans un secteur, définition des intérêts en fonction des encours de dettes ou des impôts en fonction de leur assiette, répartition de l'épargne entre placements financiers et investissements, etc. Mais elles peuvent aussi compléter les contraintes de base relativement à un mécanisme spécifique ; par exemple : traitement du progrès technique par des contraintes à seuil, rapports fixes entre les niveaux de certaines variables de base pour pallier une faiblesse des nomenclatures, etc.

Une réalisation du modèle est constituée d'une structure (structure de base plus structure spéciale) et d'un jeu de données (jeu de données de base plus jeu de données spéciales). Chaque réalisation exprime ainsi formellement l'ensemble des hypothèses, tant qualitatives (via les nomenclatures) que quantitatives (via le jeu données) qui régissent un exercice : hypothèses concernant le patrimoine et les ressources, les techniques, l'organisation des échanges, les comportements et stratégies de gestion, l'environnement économique extérieur.

c) Vue d'ensemble : utilisation. Supposant donnée une structure (fin de l'alinéa 1.b), on appelle d'abord régime relatif à une période tout multiplet de valeurs des variables relatives à cette période, puis (si la structure est évolutive) cheminement la suite des régimes relatifs aux périodes successives ; on appelle ensuite extension d'une réalisation l'ensemble des chemine-ments (resp. des régimes dans le cas statique) compatibles avec le jeu de données correspondant i.e. vérifiant toutes les contraintes de la structure qui correspondent à ce jeu (contraintes de base plus contraintes spéciales).

Ainsi, à chaque réalisation du modèle correspond une extension. Une réalisation est dite sous-déterminée si l'extension correspondante comporte plus d'un élément et catégorique si l'extension comporte un seul élément.

La logique de la démarche étant de considérer principalement des réalisations sous-déterminées et même très sous-déterminées, le premier problème à résoudre pour l'utilisation du modèle est celui de la détermination d'éléments de l'extension, i.e. de chemine-ments (ou de régimes) compatibles.

Dans ce sens, la détermination d'éléments optimaux pour des critères variés (un critère étant une fonction numérique des variables ; voir ci-dessous) joue un rôle essentiel. Le type de structure en cause, dont les non-linéarités sont précisément localisées (alinéa 1.b), permet de s'appuyer pour ces déterminations par optimisation sur les méthodes standard de la programmation linéaire.

Cela va de soi pour les réalisations linéaires, i.e. dans lesquelles toutes les contraintes sont linéaires (éventuellement à seuil). Il en est ainsi lors-

que, d'une part soit les prix soit les niveaux physiques sont exogènes, d'autre part toutes les contraintes spéciales sont linéaires, cette dernière condition pouvant ne pas être trop limitative grâce à la souplesse du descriptif.

En particulier, les réalisations de base (i.e. sans structure spéciale) sont linéaires lorsque les prix sont exogènes ; cependant, ces réalisations sont très sous-déterminées, particulièrement en ce qui concerne l'organisation économique, ce qui rend en général nécessaire une structure spéciale.

Par contre, les réalisations (même de base) dans lesquelles les prix et les niveaux physiques sont endogènes ne sont plus linéaires, en particulier à cause des contraintes d'équilibre comptable des secteurs (alinéa 1.b). Les déterminations peuvent alors être abordées par un processus itératif consistant à calculer alternativement, d'une part des niveaux physiques à prix exogènes, d'autre part des prix à niveaux physiques exogènes.

On souligne que chacune de ces étapes complémentaires peut être significative en vertu de ce que, conformément à l'esprit de l'analyse multicritère (voir ci-dessous), on cherche à balayer l'extension de la réalisation (i.e. l'éventail des possibles) plutôt qu'à obtenir un optimum aveugle. En particulier, la seconde correspond à la recherche d'un système de prix adapté à un fonctionnement physique donné (y compris les niveaux des transformations en cours), ce qui est une façon d'aborder le problème du financement équilibré de ces transformations.

Dans l'utilisation prospective du modèle (correspondant à la structure en cause), on distingue les études de multiplicité et les études de variabilité.

Les études de multiplicité n'ont lieu d'être que pour les réalisations sous-déterminées : elles concernent l'ensemble "extension" en lui-même, son étendue, sa structure, pour certains jeux de données jugés significatifs.

Pour ces études, un instrument essentiel est l'analyse multicritère qui consiste à délimiter l'extension par ceux de ses éléments qui rendent optimum divers critères. On souligne l'importance de la diversité des critères dans cette démarche : par opposition à l'optimisation normative dans laquelle un seul critère modulé intervient (la "fonction d'utilité"), les critères visés sont plutôt des caractéristiques intrinsèques. Par exemple : utilisation minimum ou maximum de telle ressource ou de tel bien, niveau minimum de tel échange ou de tel transfert, marge commerciale maximum pour tel ensemble de secteurs, cela pour une période spécifiée ou globalement ; ou encore, durée minimum de telle transformation des équipements, etc.

Des régimes ou des cheminements peuvent aussi être obtenus par combinaisons diverses d'éléments optimaux, par exemple pour représenter des arbitrages.

Des cheminements peuvent enfin être déterminés par simulation dynamique, les régimes successifs résultant de choix instantanés faits par optimisation à chaque période ou par application d'une stratégie.

Les études de variabilité concernent la variation de l'extension, cela essentiellement via celle de certains de ses éléments typiques (cheminements ou régimes) préalablement dégagés par les études de multiplicité (par exemple les optimum de divers critères), variation en fonction du jeu de données, en fait de composantes spécifiques de ce dernier. A travers la variation de certaines des données circonstancielles ou spéciales, ces études incluent des possibilités d'analyse du poids de l'organisation économique sur le fonctionnement ou l'évolution du système productif.

Les schémas généraux précédents peuvent être appliqués dans des études évolutives ou dans des études statiques. On remarque à ce sujet que, dans le cadre formel proposé, une structure statique et une structure évolutive peuvent être associées en comportant un même jeu de coefficients techniques ainsi qu'un noyau commun de données circonstancielles, de contraintes spéciales et de

données spéciales. Les études (statiques ou évolutives) relatives à un tel couple de structures associées peuvent alors être complémentaires.

Voici une série type de telles études complémentaires qui pourraient intervenir comme support quantitatif de la concertation préalable à un processus de planification à long terme (alinéas 1.a et 12.e) :

- d'abord des études statiques de validation empirique destinées à fournir, par le calage sur un lot de données macroéconomiques observées, un régime représentant raisonnablement l'état actuel de l'ensemble économique en cause ;
- ensuite des études statiques de multiplicité et de variabilité destinées à explorer la diversité des régimes possibles (pratiquement à long terme, mais surtout ici sans terme spécifié), cela avec des jeux de données circonstancielles et spéciales, et des critères, très contrastés de façon à faire apparaître le champ des alternatives, en particulier en ce qui concerne l'utilisation de techniques nouvelles ;
- puis des études de variabilité (entre autres aux conditions extérieures) concernant les cheminements partant du régime actuel et arrivant (en un nombre de périodes éventuellement variable) à l'un ou l'autre des régimes précédemment explorés (ou le plus près possible), cela pour analyser les possibilités de transition entre l'actuel et ce long terme spécifié, choisi, ces études pouvant amener à reconsidérer le choix ;
- enfin, pour affiner les conditions de réalisation de certains des cheminements de transition retenus, des études (soit statiques, soit évolutives par simulation dynamique) de variabilité en fonction des paramètres de politique économique à court terme (prix, crédit, gestion sectorielle, etc).

Des séries analogues pourraient intervenir au cours du déroulement du processus de planification, cela pour adapter à l'évolution de la conjoncture la politique suivie à court terme et la définition du projet à long terme, ce dernier apparaissant ainsi comme intentionnel plutôt qu'impératif. On souligne que les indications à court terme que fournissent ces études ne sont pas à confondre avec les évaluations de détail du plan qui relèvent de l'activité des organes décentralisés de mise en oeuvre et non de la prospective globale.

d) Propos méthodologique. Le texte qui suit a pour but la présentation théorique, d'une part de l'appareil formel, du type de structure (alinéa 1.b), retenu pour la représentation de la réalité économique à explorer, d'autre part de divers schémas d'utilisation prospective (alinéa 1.c) de cet appareil formel. L'exposé procède du général au particulier en situant le propos au niveau des spécifications générales (paragraphe 2 à 7 et 9) avant d'envisager les modalités et exemples de spécifications particulières (paragraphe 8 et 10 à 12, [32a], [32b]). Cette approche est rendue possible par le fait que les divers composants génériques, d'ordre qualitatif, des structures (nomenclatures, types des contraintes circonstancielles et spéciales ; alinéa 1.b) sont formellement identifiés, donc peuvent être présentés de façon abstraite.

Dans ce sens, on introduit d'abord les divers composants (génériques et invariants) d'une structure de façon progressive dans les paragraphes 2 à 6 : nomenclatures (§2), variables de base (§3), variables dérivées et coefficients techniques (§4), contraintes fondamentales (§5), contraintes circonstancielles et contraintes spéciales (§6). Après quoi, on récapitule l'ensemble en dégageant les concepts de réalisation et de détermination (§7) ; puis on complète cette présentation générale du type de structure par des indications sur les méthodes de construction (problèmes d'agrégation) et les modalités de constitution des spécifications particulières (§8). On présente ensuite des schémas généraux d'utilisations prospectives (§9). Enfin, ces indications générales sont illustrées, dans les paragraphes 10 à 12, par la présentation de diverses

situations particulières, cela toujours à un niveau formel, mais avec des composants génériques déjà partiellement spécifiés.

Par ailleurs, l'étude numérique de spécifications particulières ([32a], [32b]) est évidemment un complément indispensable à l'exposé théorique.

On souligne que le niveau des spécifications générales auquel on se situe ne signifie pas séparation du formalisme et de sa signification : bien au contraire on s'attache à expliciter, en termes de la problématique économique et de la prospective envisagées, l'interprétation de chacun des être formels considérés. Ainsi dégagées et fixées au niveau général où elles sont structurellement simples, ces interprétations peuvent ensuite servir de guides, de moyens de contrôle et de communication, dans les applications où les significations sont masquées par la complexité combinatoire de la situation économique à prendre en compte et les problèmes posés par le traitement numérique. Il y a là une justification importante à la démarche adoptée ([32], chap. 2).

En fait, le cadre formel introduit n'a pas seulement pour but de permettre une maîtrise méthodologique des traitements numériques : il devrait aussi permettre une homogénéité des développements théoriques réclamés par la compréhension de ces derniers.

Dans ce sens, on a cherché à faire en sorte que le formalisme soit à la fois assez explicite pour que les simulations numériques soient réalistes et assez générique pour que l'approche mathématique soit possible.

Une telle articulation manque dans l'état actuel de la discipline économique, en ce sens que, d'une part les modèles de l'économie mathématique ([100], [37], [108], [116], [114], [1]) sont trop schématiques pour pouvoir donner lieu à des simulations numériques réalistes, d'autre part les modèles macroéconomiques à finalité numérique ([3], [18], [51], [102]) sont trop complexes et touffus dans leurs spécifications particulières noyées sous le formalisme des codes de calcul pour pouvoir être étudiés du point de vue mathématique autrement que sur des maquettes ([28], [3], [112], [67], [42], [15]) : l'ambition est ici de remplacer l'étude de maquettes par celle de certaines spécification générales.

Le modèle de Léontief ([90], [91], [19], [11]) constitue une exception à la dichotomie précédente et un cas où la démarche unitaire ci-dessus a été largement exploitée à travers le formalisme du modèle à production simple ([100], §5.5, [1], chap. I et II, [106], [95]) : il s'agit de faire de même mais avec quatre nomenclatures de base au lieu d'une (alinéa 1.b).

Au delà du caractère général et formel de l'exposé qui réclame une certaine familiarité avec la démarche de modélisation quantitative, son niveau mathématique ne dépasse pas, sauf exceptions isolées, celui de l'algèbre élémentaire.

Par ailleurs, du point de vue de la théorie économique, l'exposé est "naïf", en ce sens que, eu égard à la prospective libre qui est en cause (alinéa 1.a), il reste pratiquement à l'écart des grandes doctrines concernant le comportement des agents ou les stratégies de gestion (théorie du marché, des prix, doctrine de Keynes, monétarisme, méthodes de planification, etc) : le formalisme proposé permet leur formulation, donc leur étude en tant que spécifications particulières (certaines illustrations figurent aux paragraphes 10 à 12), mais le propos est en quelque sorte antérieur à ces théories dans la hiérarchie de mise en place des éléments fondamentaux de la représentation.

Dans ce sens, l'exposé vise à constituer un ensemble autonome, tant au point de vue des définitions formelles que des interprétations, et ne fait pratiquement appel qu'aux concepts élémentaires concernant l'approche descriptive des phénomènes économiques : méthodes d'analyse (réduction, agrégation, quantification), représentation de la base physique (ressources et produits, processus techniques, production et consommation, équipements, etc) ou de l'appareil comptable, monétaire et financier (agents et échanges, prix, comptabilité, transferts, opérations financières, etc). En particulier, les références aux modèles économiques classiques ne sont pas indispensables au corps de l'exposé.

§ 2 - NOMENCLATURES

L'appareil nominatif du modèle est constitué de nomenclatures dont les postes vont indexer les variables et les contraintes fondamentales (paragraphe 3, 4, 5). Cet appareil comporte 15 nomenclatures, dont 5 nomenclatures de base et 10 nomenclatures dérivées, qui sont présentées ci-après.

a) Nomenclatures de base. L'infrastructure de l'appareil nominatif est constituée des 5 nomenclatures de base : nomenclature de biens notée I, d'activités J, de secteurs S, d'opérations L, de périodes T.

Les nomenclatures, I, J, S, L, sont des ensembles finis disjoints dont chacun des éléments (chaque "poste") représente (est le nom d') un type d'agrégat qui est pris en compte dans la réalisation en cause du modèle. On souligne que les ensembles I, J, S, L, ne sont pas naturellement (totalement) ordonnés et ne sont - systématiquement - pas identifiés à des segments de l'ensemble des entiers naturels : les éléments de ces ensembles sont des noms d'agrégats (par exemple, bien "sol agricole", activité "mécanique générale", secteur "industrie lourde", opération "emprunts longs", etc) qui ne sont pas confondus avec leurs éventuels numéros.

Chacune de ces nomenclatures correspond à une catégorie conceptuelle de l'analyse réductrice par laquelle est appréhendée le processus économique. Les trois premières concernant la base physique, la troisième et la quatrième l'appareil monétaire et financier :

- un bien $i \in I$ représente un agrégat de choses, matérielles ou immatérielles, qui circulent, qui sont produites, consommées, échangées (ressources, produits fabriqués, déchets, services, travaux) ;

- une activité $j \in J$ représente un agrégat de processus techniques, définis par l'usage spécifique d'installations et le savoir faire correspondant, qui assument la production ou la consommation des choses qui circulent ; cette nomenclature contient en outre un poste fictif, l'activité vide notée j_0 ;

- un secteur $s \in S$ représente un agrégat d'agents, entendus comme sous-systèmes associant divers processus techniques en unités agissantes, qui constituent les pôles d'échanges des choses qui circulent et qui donnent lieu à une comptabilité monétaire et financière ;

- une opération $l \in L$ représente un agrégat de transactions, monétaires ou financières, pouvant être effectuées par les agents (transferts courants, prêts et emprunts, transactions sur l'or ou les devises, etc), à l'exclusion des transactions commerciales ; les regroupements sont destinés à appréhender le fonctionnement monétaire et financier par la méthode des comptes écrans dans le cadre du système de comptabilité en parties doubles ([17], §I.3 ; [117], alinéa II.3.B).

Biens, activités et opérations sont quantifiés en tant qu'agrégat (alinéa 8.c) : à chaque bien $i \in I$ (resp. activité $j \in J$, opération $l \in L$) est associée la grandeur mesurable "quantité du bien i" (resp. "niveau de l'activité j", "volume de l'opération l") à laquelle correspond une "quantité unité du bien i" (resp. un "niveau unité de l'activité j", un "volume unité de l'opération l"). Le niveau unité d'une activité peut être appréhendé, soit "en compréhension" par la spécification d'une installation utilisable type (en fait d'une classe d'installations substituables), appelée "module" de l'activité, soit "en extension" par la spécification de ses "coefficients techniques" (de fonctionnement,

de maintenance, de transformations ; alinéa 4.b).

Par contre, les secteurs ne sont pas quantifiés : ils sont conçus, conformément à la définition précédente, comme des sous-systèmes associant diverses activités en proportions variables et donnant lieu à une comptabilité en tant que pôles d'échanges ; leurs profils sont cernés, d'abord qualitativement par la nomenclature d'échanges et les nomenclatures d'imputations monétaires et financières (alinéa 2.b), ensuite quantitativement par les diverses contraintes d'organisation (paragraphe 5 et 6). Ils peuvent avoir une interprétation géographique outre l'interprétation organisationnelle (alinéa 8.e).

La nomenclature de périodes T est un ensemble (fini) totalement ordonné qui sert à paramétrer le déroulement temporel du processus économique en cause : ce déroulement est analysé comme une succession de périodes élémentaires de même durée fixée, chaque période élémentaire correspondant à un élément de T . Il n'y a pas d'inconvénient à considérer cet ensemble comme un intervalle $[t_0, t_1]$ (avec $t_0 \leq t_1$) de l'ensemble des entiers naturels, ce que l'on fera dans la suite de cet exposé.

On distingue le cas statique où $t_0 = t_1$ (une seule période élémentaire) et les cas évolutifs où $t_0 < t_1$ (plusieurs périodes élémentaires).

b) Nomenclatures dérivées. L'indexation des variables et des contraintes standard par les éléments des nomenclatures de base (§3 à 5) fait apparaître certains postes ou multiplets de postes comme privilégiés. Les nomenclatures dérivées sont les sous-ensembles, des nomenclatures de base ou de produits cartésiens de ces dernières, dont ces postes ou multiplets de postes sont les éléments : nomenclature des parcs J_p , des transformations H , des capacités de stockage K , des secteurs intérieurs S_n , des échanges E , des opérations financières L_f , des imputations de répartition en dépenses et en recettes G_d et G_r , des imputations financières en créances et en dettes F_p et F_m .

Les indications suivantes situent ces nomenclatures :

- J_p est un sous-ensemble de J ; une activité $j \in J$ est un parc (i.e. $j \in J_p$) si elle réclame des équipements spécifiques, lesquels sont alors repérés par j ; l'activité vide j_0 appartient à J_p ;

- H est un sous-ensemble de $J_p \times J_p$; la transformation du parc j' en le parc j'' étant représentée par le couple (j', j'') , H est l'ensemble des couples correspondant aux transformations considérées comme possibles pendant la durée d'une période élémentaire ; la construction ou le démantèlement du parc j sont représentés respectivement par les couples (j_0, j) et (j, j_0) ; le traitement des transformations s'étendant sur plusieurs périodes élémentaires réclame d'introduire dans la nomenclature de parcs J_p des postes représentant les stades intermédiaires de la transformation ; H est supposé ne contenir que des couples (j', j'') tels que $j'' \neq j'$;

- K est un sous-ensemble de $J \times J_p \times J$; chaque triplet (j', j, j'') , élément de K , représente une capacité de stockage d'un bien entre périodes élémentaires ; le parc j représente les équipements de stockage, tandis que les activités j' et j'' correspondent respectivement au stockage et au déstockage ; le bien concerné est indiqué par les coefficients techniques correspondants (alinéa 4.b) ; on désigne par J_q la projection de K sur J_p ;

- S_n est un sous-ensemble de S ; les éléments de S_n , i.e. les secteurs intérieurs, sont les secteurs qui, faisant partie du système considéré, sont analysés en termes de techniques comme sous systèmes ; les autres secteurs, dits extérieurs, sont seulement considérés comme des pôles d'échanges extérieurs ;

on désigne par S_x l'ensemble des secteurs extérieurs (i.e. le complémentaire de S_n dans S) ;

- E est un sous-ensemble de $I \times S \times S$; l'échange constitué par le transfert du bien i du secteur s' au secteur s'' étant représenté par le triplet (i, s', s'') , E est l'ensemble des triplets correspondant aux échanges considérés comme possibles ; E est supposé ne contenir que des triplets (i, s', s'') tels que, d'une part $s' \neq s''$, d'autre part $s' \in S_n$ ou $s'' \in S_n$ (i.e. les échanges entre secteurs extérieurs sont ignorés) ; on note que le mot "échange" est entendu ici comme "transfert d'un bien", sans idée de réciprocité ;

- L_f est un sous-ensemble de L ; les éléments de L_f , i.e. les opérations financières, sont les opérations pouvant être interprétées en termes de créations ou de mouvements de créances et de dettes, donc donnant lieu à reports d'une période élémentaire sur la suivante, i.e. à encours ; désignant par L_r le complémentaire de L_f dans L , les éléments de L_r sont supposés représenter les opérations de répartition ; les opérations sur biens et services sont analysées par ailleurs en termes physiques (alinéa 4.d et 5.c) ;

- G_d et G_r sont des sous-ensembles de $L_r \times S$; un couple (l, s) appartient à G_d (resp. à G_r) si l'opération (de répartition) l est considérée comme pouvant donner lieu à imputation en dépenses (resp. en recettes) pour le secteur s ; les ensembles G_d et G_r sont en général disjoints, mais peuvent ne pas l'être ;

- F_p et F_m sont des sous-ensembles de $L_f \times S$; un couple (l, s) appartient à F_p (resp. à F_m) si l'opération (financière) l est considérée comme pouvant donner lieu à imputation en dettes (resp. en créances) pour le secteur s ; les ensembles F_p et F_m sont en général disjoints, mais peuvent ne pas l'être.

Les limitations qu'expriment les nomenclatures dérivées jouent un rôle important dans la mise en oeuvre quantitative du modèle : elles permettent une économie considérable de spécifications numériques, donc de calculs, en introduisant dès le stade nominatif certaines contraintes d'organisation.

Par exemple, l'organisation des échanges entraîne en général, au moins si S_n n'est pas réduit à un élément, que les échanges possibles (i, s', s'') ne représentent, qu'une faible fraction du produit cartésien complet $I \times S \times S$: mieux vaut alors spécifier d'entrée la nomenclature des échanges E qui représente cette fraction que de devoir mettre à zéro toute les variables d'échanges correspondant aux triplets non retenus (alinéas 3.a et 6.a).

De même, un premier schéma d'organisation monétaire et financière peut être introduit par les nomenclatures d'imputations, G_d , G_r , F_p , F_m , ce qui évite de considérer des variables monétaires et financières sans signification.

c) Descriptif. On appelle descriptif fondamental tout multiplet constitué par un jeu de nomenclatures toutes non vides : d'abord les 5 nomenclatures de base, puis les 10 nomenclatures dérivées, dans l'ordre et avec les propriétés spécifiées ci-dessus,

(2.1) $Desf = (I, J, S, L, T; J_p, H, K, S_n, E, L_f, G_d, G_r, F_p, F_m)$.

Le descriptif fondamental rassemble l'appareil nominatif d'une réalisation du modèle (alinéas 7.b et 7.c) ; sa définition est le point de départ de toute application (alinéa 8.a).

Dans les paragraphes 3 à 7 ci-après, on suppose spécifié un descriptif fondamental en termes duquel sont indexées les variables et les contraintes introduites.

§ 3 - VARIABLES DE BASE

On présente successivement les variables physiques (alinéa 3.a), puis les variables monétaires et financières (alinéa 3.b).

a) Variables physiques. On distingue, pour chaque période élémentaire $t \in T$:

- d'une part les variables de fonctionnement qui comprennent,

- les niveaux des activités,

$$X_f(t, s, j) \quad (s \in S_n, j \in J),$$

- les niveaux des transformations en cours,

$$X_u(t, s, h) \quad (s \in S_n, h \in H),$$

- les niveaux des échanges,

$$X_z(t, e) \quad (e \in E),$$

- d'autre part les variables de capital fixe, i.e.

- les niveaux des parcs,

$$X_p(t, s, j) \quad (s \in S_n, j \in J_p).$$

Toutes ces variables sont assujetties à ne prendre que des valeurs ≥ 0 .

Le nombre $X_f(t, s, j)$ représente le niveau effectif de fonctionnement de l'activité j , dans le secteur s , pendant la période t , la mesure étant relative à la grandeur "niveau de l'activité j " (alinéa 2.a) ; lorsque j est un parc (i.e. $j \in J_p$) le niveau $X_p(t, s, j)$ est entendu comme le niveau maximum de fonctionnement qui correspondrait à celui de tous les équipements, de l'activité j dans le secteur s , disponibles en début de période, y compris ceux appelés à être en maintenance ou à être transformés pendant la période.

Si (j', j, j'') est une capacité de stockage, les nombres $X_f(t, s, j)$, $X_f(t, s, j')$, $X_f(t, s, j'')$ représentent, dans le secteur s , respectivement le niveau du stock au début de la période t , l'augmentation ou la diminution du stock pendant la période, par stockage ou déstockage, les niveaux unités des activités j' , j , et j'' étant définis par une même quantité du bien stocké ; le nombre $X_p(t, s, j)$ représente alors de façon standard le niveau maximum du stock pendant la période. On note que les variables $X_f(t, s, j)$ ($j \in J_q, s \in S_n$) figurent dans la liste ci-dessus en tant que variables de fonctionnement alors qu'elles représentent des niveaux de stocks interpériodes ; cette assimilation ne présente pas d'inconvénient formel.

Ce formalisme permet aussi, par élaboration convenable des nomenclatures de biens et d'activités, le traitement des stocks de ressources non renouvelables et celui des productions étalées sur plusieurs périodes élémentaires. Par contre, la gestion des stocks intrapériodes élémentaires (i.e. dont la durée de stockage est inférieure à celle d'une période élémentaire) est à prendre en compte dans le fonctionnement standard des activités.

Si $h = (j_0, j)$ [resp. $h = (j, j_0)$, $h = (j, j'')$] avec $j \neq j_0$ et $j'' \neq j_0$, le nombre $X_u(t, s, h)$ représente le nombre de modules du parc j mis en construction [resp. en démantèlement, en reconversion vers le parc j''] dans le secteur s au

début de la période t ; ce nombre sera aussi appelé le niveau de la transformation h , pendant la période t dans le secteur s .

Si $e = (i, s', s'')$ est un échange possible (i.e. si $e \in E$) $X_z(t, e)$ représente la quantité du bien i transférée du secteur s' au secteur s'' pendant la période t .

On souligne que le système productif n'est pris en compte, cela par les variables de types X_f, X_p, X_u , que pour les secteurs intérieurs (pour ces variables, l'indice s décrit S_n et non S dans les listes ci-dessus) : les secteurs extérieurs n'interviennent que comme pôles d'échanges avec les secteurs intérieurs, cela via les variables de type X_z .

b) Variables monétaires et financières. On distingue, pour chaque période élémentaire $t \in T$:

- d'une part les variables de fonctionnement, qui comprennent,

- les prix,

$$Pr(t, e) \quad (e \in E),$$

- les cours relatifs aux opérations financières,

$$Po(t, l) \quad (l \in L_f),$$

- les volumes d'opérations effectués comme dépenses et comme recettes,

$$Db(t, g) \quad (g \in G_d), \quad Rb(t, g) \quad (g \in G_r),$$

$$Dp(t, f), \quad Rp(t, f) \quad (f \in F_p),$$

$$Dm(t, f), \quad Rm(t, f) \quad (f \in F_m),$$

- d'autre part les variables de capital, i.e.

- les encours de créances et de dettes,

$$Wp(t, f) \quad (f \in F_p), \quad Wm(t, f) \quad (f \in F_m).$$

Toutes ces variables sont assujetties à ne prendre que des valeurs ≥ 0 .

Les échanges de biens entre secteurs intérieurs ou entre secteurs intérieurs et secteurs extérieurs, ainsi que les opérations monétaires et financières, sont valorisés par rapport à une même monnaie. On parle alors de valeur courante.

Les prix, en fait indices de prix vu le caractère d'agrégats des biens, sont les facteurs multiplicatifs faisant passer des quantités de biens transférées dans les échanges entre secteurs aux montants en valeur courante correspondants. Les prix sont supposés pouvoir dépendre des conditions de l'échange, c'est à dire des secteurs concernés : le nombre $Pr(t, e)$ représente, pour la période t , le prix relatif à l'échange $e \in E$, c'est à dire, si $e = (i, s', s'')$, le prix de vente du bien i par le secteur s' au secteur s'' ; le prix $Pr(t, e)$ est dit intérieur si $s' \in S_n$ et $s'' \in S_n$ (resp. extérieur si $s' \in S_x$ ou $s'' \in S_x$). Ainsi, un même bien peut donner lieu à des prix différents selon qu'il est importé, exporté ou échangé entre secteurs intérieurs.

Les cours relatifs aux opérations financières sont les facteurs multiplicatifs faisant passer de la mesure en volume de ces opérations à leur mesure en valeur courante (par rapport à la monnaie spécifiée), le nombre $P_0(t,l)$ représentant le cours relatif à l'opération l pendant la période t . La mesure en volume est conçue ici comme une mesure en unités physiques (or mesuré en poids, droits en nombre de titres, etc).

Les opérations de répartition sont seulement mesurées en valeur courante ce qui revient à prendre leurs cours implicitement égaux à un. Le cours vaut aussi généralement un pour les opérations représentant des prêts ou emprunts.

Si $g = (l,s)$ et $g \in G_d$ (resp. $g \in G_r$), le nombre $D_b(t,g)$ [resp. $R_b(t,g)$] représente le montant en valeur courante des dépenses [resp. des recettes], du secteur s , pendant la période t relativement à l'opération l . Cette interprétation est plus nette si, pour l'opération de répartition l en cause, l'ensemble des secteurs s débiteurs [i.e. tels que $(l,s) \in G_d$] et l'ensemble des secteurs s créditeurs [i.e. tels que $(l,s) \in G_r$] sont disjoints ; mais cette dernière condition n'est pas nécessaire.

Si $f = (l,s)$, avec $f \in F_p$ ou $f \in F_m$, les nombres $D_p(t,f)$ ou $D_m(t,f)$ (resp. $R_p(t,f)$ ou $R_m(t,f)$) représentent respectivement les montants (en volume) des dépenses par augmentation de créances ou par diminution de dettes (resp. des recettes par diminution de créances ou par augmentation de dettes) imputées au secteur s , pendant la période t , relativement à l'opération l ; tandis que les nombres $W_p(t,f)$ ou $W_m(t,f)$ représentent les montants des encours correspondants de créances ou de dettes pour le secteur s au début de la période t .

Ce formalisme correspond au cadre conceptuel du tableau des opérations financières de la comptabilité nationale ([17], §I.3 et chap. IV), mais, à la différence de ce dernier, en ne faisant apparaître que des quantités ≥ 0 : l'introduction des spécifications "p" et "m" (mises pour "plus" et "moins") permet d'éviter de représenter, par exemple, une recette par diminution de créances comme une dépense négative par augmentation de créances.

La terminologie générale (et passablement abstraite !) ci-dessus peut recevoir des interprétations diverses selon la nature de l'opération l .

Par exemple, si l représente un prêt, le nombre $D_p(t,f)$ [resp. $R_m(t,f)$, $D_m(t,f)$, $R_p(t,f)$] représente, relativement à cette opération, le montant prêté [resp. emprunté, remboursé, reçu en remboursement] par le secteur s , pendant la période t ; tandis que les nombres $W_p(t,f)$ et $W_m(t,f)$ représentent les montants respectivement dûs au secteur s (par les autres secteurs) et dûs par le secteur s (aux autres secteurs) au début de la période t . Cette interprétation est plus nette si, pour l'opération l en cause, l'ensemble des secteurs s prêteurs [i.e. tels que $(l,s) \in F_p$] et l'ensemble des secteurs s emprunteurs [i.e. tels que $(l,s) \in F_m$] sont disjoints ; mais cette dernière condition n'est pas nécessaire.

Les opérations sur la monnaie, sur les devises ou l'or peuvent aussi être représentées dans ce cadre formel, via une élaboration convenable des nomenclatures d'opérations et de secteurs ([17], §IV.2, [33], [71], [121]).

§ 4 - VARIABLES DERIVEES

On définit ci-après les variables dérivées en termes desquelles les contraintes de base (§5) s'expriment naturellement : d'abord les soldes physiques (alinéas 4.a et 4.c) qui introduisent les coefficients techniques (alinéa 3.b) : ensuite les variables comptables (alinéa 3.d).

a) Soldes physiques : définitions. Pour chaque période $t \in T$ et pour chaque secteur intérieur $s \in S_n$: on pose d'abord, pour chaque parc $j \in J_p$,

$$(4.1) \quad Y_p(t, s, j) = X_p(t, s, j) - \sum_{h \in H_j} X_u(t, s, h) \quad \text{et}$$

$$(4.2) \quad Y_p(t, s, j) = M_p(j)Y_p(t, s, j) + \sum_{h \in H_j} M_1(h)X_u(t, s, h) \\ + \sum_{h \in H_j} M_2(h)N_2(h)X_u(t, s, h),$$

où H_j [resp. H'_j] désigne le sous-ensemble de H formé des transformations issues de j [resp. aboutissant à j], c'est à dire de la forme (j, j') [resp. (j', j)] ; on pose ensuite, pour chaque bien $i \in I$,

$$(4.3) \quad Y_b(t, s, i) = \sum_{j \in J} C_f(i, j)X_f(t, s, j) + \sum_{j \in J_p} C_p(i, j)Y_p(t, s, j) \\ + \sum_{h \in H} C_u(i, h)X_u(t, s, h) + \sum_{e \in E_{i, \dots, s}} X_z(t, e) - \sum_{e \in E_{i, s, \dots}} X_z(t, e) \\ + \sum_{e \in E} C_z(s, i, e)X_z(t, e),$$

où $E_{i, \dots, s}$ [resp. $E_{i, s, \dots}$] désigne le sous-ensemble de E constitué des échanges du bien i dont s est le secteur d'arrivée [resp. de départ], c'est à dire des échanges de la forme (i, s', s) [resp. (i, s, s')].

Dans les relations précédentes, d'une part les quantités (les nombres ≥ 0) $X_f(t, s, j)$, $X_p(t, s, j)$, $X_u(t, s, h)$, $X_z(t, e)$ sont les valeurs des variables physiques de base (alinéa 3.a), d'autre part les quantités $M_p(j)$, $M_1(h)$, $M_2(h)$, $N_2(h)$, $C_f(i, j)$, $C_p(i, j)$, $C_u(i, h)$, $C_z(s, i, e)$, sont des données, les coefficients techniques, enfin les quantités $Y_p(t, s, j)$, $Y_p(t, s, j)$, $Y_b(t, s, i)$, sont les valeurs des variables dérivées qui sont définies par ces relations.

Les quantités $Y_p(t, s, j)$ et $Y_p(t, s, j)$ représentent respectivement, pour le parc j dans le secteur s , le nombre de modules en place au début de la période t hors travaux de transformation et le nombre total de modules effectivement utilisables (i.e. le niveau effectif de disponibilité) pendant la période t ; tandis que la quantité $Y_b(t, s, i)$ représente le solde physique des apports et des utilisations du bien i dans le secteur s pendant la période t . A priori, ces quantités peuvent être ≥ 0 ou ≤ 0 : les contraintes d'équilibre physique (alinéa 5.a) stipulent que les deux premières sont ≥ 0 et la troisième bornée inférieurement (et en général ≥ 0).

Ces définitions sont commentées dans l'alinéa 4.c après présentation des coefficients techniques.

b) Coefficients techniques. Ces coefficients sont les données unitaires, modulaires, qui définissent les processus techniques considérés comme disponibles, cela du point de vue de leurs caractéristiques unitaires et non pas du point de vue des niveaux effectifs, lesquels constituent les variables.

On distingue les coefficients techniques :

- de fonctionnement, $C_f(i,j)$ ($i \in I, j \in J$),
- de maintenance, $C_p(i,j)$ et $M_p(j)$ ($i \in I, j \in J_p$),
- de transformations, $C_u(i,h)$, $M_1(h)$, $M_2(h)$ et $N_2(h)$ ($i \in I, h \in H$),
- d'échanges, $C_z(s,i,e)$ ($s \in S_n, i \in I, e \in E$).

Les coefficients des types M_p, M_1, M_2, N_2 sont sans dimension : ceux des trois premiers types représentent des taux de disponibilité au cours de travaux et sont donc des nombres compris entre 0 et 1, tandis que ceux du quatrième représentent des nombres de modules après transformations.

Les coefficients de types C_f, C_p, C_u, C_z , représentent des quantités des divers biens, soit produites, soit consommées ; on fait à leur sujet la convention qu'une production est représentée par un nombre ≥ 0 et une consommation par un nombre ≤ 0 .

Le nombre $C_f(i,j)$ mesure la quantité du bien i produite (valeur ≥ 0) ou consommée (valeur ≤ 0), pendant une période élémentaire, lors du fonctionnement normal par l'activité j à son niveau unité (i.e. par le module de l'activité j). L'entretien courant, inhérent au fonctionnement normal, est pris en compte par ces coefficients, mais pas la maintenance hors fonctionnement qui est traitée à part comme suit.

Le nombre $C_p(i,j)$ mesure la quantité du bien i consommée (valeur ≤ 0) ou éventuellement produite (valeur ≥ 0), pendant une période élémentaire, pour la maintenance d'un module du parc j ; tandis que le nombre $M_p(j)$ est un taux de disponibilité indiquant quelle fraction (en moyenne temporelle) des équipements est disponible pour le fonctionnement malgré la maintenance. Par maintenance, on entend ici les travaux d'entretien d'un équipement (et du savoir faire correspondant) qui sont indispensables à son maintien en état de fonctionnement normal, cela (à la différence de l'entretien courant) même en l'absence de fonctionnement.

Si (j', j, j'') est une capacité de stockage du bien i , $C_f(i, j')$ [resp. $C_f(i, j'')$] représente la quantité du bien i consommée pour stockage [resp. produite par déstockage] pendant une période élémentaire par l'activité j' [resp. j''] à son niveau unité. Ces coefficients indiquent quel est le bien stocké ; ils doivent vérifier : $C_f(i, j') \leq 0$ et $C_f(i, j'') \leq -C_f(i, j')$, l'inégalité stricte traduisant des pertes. Les autres coefficients relatifs aux activités j', j et j'' ont leurs significations standard.

Si $h = (j_0, j)$ [resp. $h = (j, j_0)$, $h = (j, j'')$ avec $j \neq j_0$ et $j'' \neq j_0$], le nombre $C_u(i, h)$ mesure la quantité du bien i consommée (valeur ≤ 0) ou éventuellement produite (valeur ≥ 0), pendant une période élémentaire, pour la construction [resp. le démantèlement, la reconversion en $N_2(h)$ modules du parc j''] d'un module du parc j ; tandis que le nombre $M_1(h)$ [resp. $M_2(h)$] est un taux de disponibilité indiquant quelle fraction (en moyenne temporelle) des équipements du parc de départ [resp. d'arrivée] est disponible pour le fonctionnement malgré la transformation. Des valeurs de ces taux telles que $M_1(h) > 0$ et $M_2(h) = 1 - M_1(h)$ peuvent exprimer que la transformation h a une durée inférieure à celle de la période élémentaire. Par ailleurs, les définitions ci-dessus réclament que $N_2(h)$ soit mis à 1 si h représente une construction ou un démantèlement.

Si $e = (i', s', s'')$, le nombre $C_z(s, i, e)$ mesure la consommation (valeur ≤ 0) ou éventuellement la production (valeur ≥ 0) du bien i' qui est imputée au secteur s pour assurer le transfert d'une quantité unité du bien i' du secteur s' au secteur s'' . Cette imputation au secteur s signifie que la quantité en question intervient dans la contrainte de conservation du bien i dans le secteur s

(alinéa 5.a) ; on peut ainsi prendre en compte divers moyens de transport, via l'imputation à des secteurs localisés (alinéa 8.e).

Les éventualités de productions exprimées par des coefficients $C_p(i,j)$, $C_u(i,h)$, $C_z(s,i,e) > 0$ concernent essentiellement les cas où le bien i représente des déchets ou des rebuts ; tandis que les productions principales sont exprimées via des coefficients de fonctionnements $C_f(i,j) > 0$.

On note que les coefficients techniques ne dépendent pas des périodes élémentaires en cause (ce qui n'empêche pas de prendre en compte le progrès technique ; alinéa 6.b), mais que les coefficients de types C_f et C_p dépendent de la durée de la période élémentaire (i.e. sont des débits, en tant que grandeurs physiques). De plus, seuls les coefficients de type C_z dépendent des secteurs : les autres sont des caractéristiques "purement techniques".

c) Soldes physiques : interprétations. En ce qui concerne la relation (4.1), le premier terme au second membre, $X_p(t,s,j)$, représente le nombre de modules du parc j dans le secteur s qui sont en place au début de la période t (alinéa 3.a), tandis que, par définition de H_j^t , le second terme représente le nombre de modules du parc j dans le secteur s sur lesquels des travaux de reconversion ou de démantèlement sont entrepris au début de la période t ; d'où par différence l'interprétation de $Y_p(t,s,j)$.

Ainsi, vu l'interprétation de $M_p(j)$ comme taux de disponibilité hors maintenance, le premier terme au second membre de (4.2) représente le niveau utilisable hors maintenance et transformations. Mais, par définition de H_j^t , H_j^t et vu l'interprétation de $M_1(h)$ et de $M_2(h)$ comme taux de disponibilité pendant les transformations ainsi que celle de $N_2(h)$ comme coefficient de conversion entre modules de départ et modules d'arrivée dans la transformation h , le second (resp. le troisième) terme représente le niveau utilisable du parc j au cours des travaux de démantèlement ou reconversion à partir d'installations de ce parc (resp. au cours des travaux de construction ou reconversion conduisant à des installations de ce parc). D'où, par sommation des trois termes, l'interprétation de $Y_p(t,s,j)$.

En ce qui concerne (4.3), apports et utilisations dans le secteur s résultent d'abord des productions et consommations dues aux activités ayant lieu dans ce secteur, tant en ce qui concerne le fonctionnement (première somme au second membre) que la maintenance (deuxième somme) et les transformations (troisième somme), productions et consommations étant calculés au prorata des niveaux via les coefficients techniques correspondants, cela y compris pour les activités liées aux capacités de stockage. D'autres apports et utilisations résultent des échanges : apports dus aux transferts vers le secteur s (quatrième somme) et utilisations dues aux transferts du secteur s vers les autres secteurs (cinquième somme) ou aux consommations inhérentes aux divers transferts et affectées au secteur s au prorata des quantités transférées via les coefficients d'échanges (sixième somme). Bien sur, parmi tous les termes écrits au second membre de (4.3), la majorité sont nuls.

On note que le passage des quantités modulaires aux quantités effectives est fait, dans la définition (4.3), avec l'hypothèse de rendements constants qui correspond à la donnée des coefficients techniques : les effets d'échelle sont pris en compte par des contraintes à seuil qui complètent cette définition (alinéa 5.a).

On note aussi que, dans le second terme au second membre de (4.3), c'est $Y_p(t,s,j)$ qui figure et non $Y_p(t,s,j)$. Cela signifie que, lorsque $M_1(h)$ ou $M_2(h)$ ne sont pas nuls, les consommations (ou éventuellement les productions) dues à la maintenance du parc j (parc de départ ou d'arrivée de la transformation h en cause) sont prises en compte via les coefficients techniques de

transformation $Cu(i,h)$ qui interviennent dans le troisième terme. Par contre, les consommations ou les productions de fonctionnement sont prises en compte de façon standard par le premier terme.

d) Variables comptables. Pour chaque période $t \in T$: on pose d'abord, pour chaque couple (s', s'') de secteurs (intérieurs ou extérieurs),

$$(4.4) \quad Z(t, s', s'') = \sum_{e \in E_{s', s''}} Pr(t, e) Xz(t, e),$$

où $E_{s', s''}$ désigne le sous-ensemble de E constitué des échanges (d'un bien quelconque) du secteur s' vers le secteur s'' , c'est à dire des échanges de la forme (i, s', s'') pour i quelconque dans I ; on note que cette définition entraîne que $Z(t, s', s'') = 0$ si $E_{s', s''}$ est vide, en particulier d'après l'hypothèse faite sur E (alinéa 2.b),

$$(4.5) \quad Z(t, s', s'') = 0 \quad \text{si } s' = s'' \quad \text{ou} \quad \text{si } s' \in S_x \text{ et } s'' \in S_x ;$$

on pose ensuite,

$$(4.6) \quad Z_d(t, s) = \sum_{s' \in S} Z(t, s', s) \quad \text{et} \quad Z_r(t, s) = \sum_{s'' \in S} Z(t, s, s''),$$

pour chaque secteur $s \in S$, puis,

$$(4.7) \quad Z_n(t) = \sum_{s \in S_n} Z_r(t, s) - \sum_{s \in S_n} Z_d(t, s) ;$$

on pose enfin, pour chaque $l \in L$ et chaque $s \in S$,

$$(4.8) \quad \underline{D}(t, l, s) = D_b(t, g) \quad \text{et} \quad \underline{R}(t, l, s) = R_b(t, g) \quad \text{si } l \in L_r \text{ et } g = (l, s),$$

$$(4.9) \quad \underline{D}(t, l, s) = D_p(t, f) + D_m(t, f) \quad \text{si } l \in L_f \text{ et } f = (l, s),$$

$$(4.10) \quad \underline{R}(t, l, s) = R_p(t, f) + R_m(t, f) \quad \text{si } l \in L_f \text{ et } f = (l, s),$$

$$(4.11) \quad W_p(t, l, s) = W_p(t, f) \quad \text{et} \quad W_m(t, l, s) = W_m(t, f) \quad \text{si } l \in L_f \text{ et } f = (l, s),$$

$$(4.12) \quad D(t, l, s) = P_o(t, l) \underline{D}(t, l, s) \quad \text{et} \quad R(t, l, s) = P_o(t, l) \underline{R}(t, l, s).$$

Dans les relations (4.8) à (4.11), on convient naturellement que chaque terme $D_b(t, g)$, $R_b(t, g)$ [resp. $D_p(t, f)$, $D_m(t, f)$, $R_p(t, f)$, $R_m(t, f)$, $W_p(t, f)$, $W_m(t, f)$] est nul si l'indice g [resp. f] en cause n'appartient pas à la nomenclature d'imputations G_d , G_r [resp. F_p , F_m] correspondante ; par exemple, $D_b(t, g) = 0$ si $g \notin G_d$, $R_p(t, f) = 0$ si $f \notin F_p$, etc. Dans la relation (4.12), on convient que $P_o(t, l) = 1$ si $l \in L_r$.

Le nombre $Z(t, s', s'')$ représente le montant total en valeur courante des ventes du secteur s' au secteur s'' , ou aussi des achats du secteur s'' au secteur s' , pendant la période t . Il en résulte que, pour chaque secteur intérieur [resp. extérieur] s , $Z_d(t, s)$ et $Z_r(t, s)$ représentent respectivement le montant total en valeur courante des dépenses par achats et des recettes par ventes, pendant la période t , du secteur s à tous les autres secteurs, intérieurs ou extérieurs [resp. intérieurs seulement, puisque les échanges entre secteurs extérieurs sont ignorés (alinéa 2.b)]. En particulier, $Z_n(t)$ représente le solde des échanges extérieurs (de biens, i.e. la balance commerciale) pendant la période t pour l'ensemble considéré.

On note que, d'après (4.4) et (4.6), on a la relation de conservation,

$$(4.13) \quad \sum_{s \in S} Z_d(t, s) = \sum_{s \in S} Z_r(t, s) \quad \text{pour chaque } t \in T.$$

Le nombre $D(t,l,s)$ [resp. $R(t,l,s)$] représente le montant en valeur courante des dépenses [resp. des recettes] du secteur s pendant la période t , relativement à l'opération l . Si l est une opération financière, ce montant en valeur courante est égal au produit du cours $P_o(t,l)$ par le montant en volume $\underline{D}(t,l,s)$ [resp. $\underline{R}(t,l,s)$]. On note qu'un seul des deux termes au second membre de (4.9) [resp. (4.10)] est non nul dans le cas (général ; alinéa 2.b) où (l,s) n'appartient pas simultanément à F_p et à F_m .

On note aussi que les termes $Z_d(t,s)$ et $Z_r(t,s)$ fournissent l'analyse en termes physiques des opérations sur biens et services qui ne figurent pas dans la nomenclature d'opérations de répartition L_r (alinéa 2.b) ; ces termes pourraient s'écrire respectivement $D(t,l_o,s)$ et $R(t,l_o,s)$ pour un poste supplémentaire l_o de cette nomenclature.

§ 5 - CONTRAINTES FONDAMENTALES

On présente successivement, les contraintes d'équilibre physique instantané (alinéa 5.a), les équations d'évolution des parcs et des stocks (alinéa 5.b), les contraintes comptables (alinéa 5.c).

a) Equilibres physiques. Il faut d'abord exprimer la cohérence physique du système pendant chaque période élémentaire. Les contraintes correspondantes concernent :

- la conservation des biens,

$$(5.1) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, i \in I, \quad Y_b(t,s,i) + A'(t,s,i) - A''(t,s,i) \geq 0 \quad [\text{contr. } x_b(t,s,i)] ;$$

- la compatibilité entre fonctionnements et parcs,

$$(5.2) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, j \in J_p, \quad X_f(t,s,j) \leq Y_p(t,s,j) \quad [\text{contr. } x_k(t,s,j)] ;$$

- la compatibilité entre transformations et parcs,

$$(5.3) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, j \in J_p, \quad Y_p(t,s,j) \geq 0 \quad [\text{contr. } x_d(t,s,j)] ;$$

- la compatibilité entre déstockages et stocks,

$$(5.4) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, k = (j', j, j'') \in K, \quad X_f(t,s,j'') \leq X_f(t,s,j) \quad [\text{contr. } x_h(t,s,k)] ;$$

- les effets d'échelle dans le fonctionnement,

$$(5.5) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, j \in J, \quad X_f(t,s,j) \geq \underline{X}_f(j) \quad \text{ou} \quad X_f(t,s,j) = 0 \quad [\text{contr. } v_f(t,s,j)] ;$$

- les effets d'échelle dans les transformations,

$$(5.6) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, h \in H, \quad X_u(t,s,h) \geq \underline{X}_u(h) \quad \text{ou} \quad X_u(t,s,h) = 0 \quad [\text{contr. } v_u(t,s,h)] ;$$

Dans les relations précédentes, figurent : d'une part les valeurs des diverses variables physiques, variables de base [$X_f(t,s,j)$, ... ; alinéa 3.a] et variables dérivées [$Y_p(t,s,j)$, ... ; alinéa 4.a], d'autre part les quantités $A'(t,s,i)$ et $A''(t,s,i)$ qui sont des données circonstancielles, enfin les quantités $\underline{X}_f(j)$ et $\underline{X}_u(h)$ qui sont des données unitaires, des coefficients techniques.

Le nombre $A'(t,s,i)$ [resp. $A''(t,s,i)$] représente, s'il est >0 , une éventuelle dotation (par exemple comme ressource primaire) [resp. un éventuel prélèvement (consommation exogène ou perte)] en le bien i pour le secteur s pendant la période t .

Le nombre $\underline{X}_f(j)$ [resp. $\underline{X}_u(h)$] représente, s'il est >0 , un niveau minimum pour l'activité j (resp. pour la transformation h), seuil en dessous duquel les coefficients techniques de cette activité (resp. transformation) ne sont plus valables.

Les contraintes de type x_b expriment l'équilibre statique fondamental de conservation des biens dans les sous systèmes que constituent les secteurs intérieurs (alinéa 2.b) : $x_b(t,s,j)$ stipule que, dans le secteur s pendant la période t , les utilisations (y compris l'éventuel prélèvement) du bien i ne peuvent excéder les apports (y compris l'éventuelle dotation).

Les contraintes de types x_k , x_d et x_h expriment les limitations dans le fonctionnement dues aux limitations du capital fixe disponible : relativement au parc j dans le secteur s pendant la période t , la contrainte $x_k(t,s,j)$ exprime que le niveau effectif de fonctionnement de l'activité correspondante ne peut dépasser le niveau effectif de disponibilité du parc ; tandis que la contrainte $x_d(t,s,j)$ exprime que le nombre de modules du parc mis en transformations ne peut dépasser le nombre de modules qui sont en place au début de la période ; de même, la contrainte $x_h(t,s,k)$ exprime que, dans le secteur s et relativement à la capacité de stockage k , la diminution du stock par déstockage pendant la période t ne peut excéder le niveau du stock au début de la période.

Les contraintes de types v_f et v_u expriment les effets d'échelle : l'activité j [resp. la transformation h] ne peut être à un niveau non nul (i.e. fonctionner effectivement) [resp. être réalisée], en particulier avec les coefficients techniques $C_f(i,j)$ [resp. $C_u(i,h)$] qui figurent dans les contraintes de type x_b , que si ce niveau est au moins égal au seuil $X_f(j)$ [resp. $X_u(h)$]. La contrainte disparaît évidemment lorsque le seuil est nul.

On souligne que les contraintes introduites ici ne concernent, comme les variables physiques de base, que les secteurs intérieurs, les seuls dans lesquels l'appareil productif est pris en compte (alinéa 3.a).

Les relations (5.1) à (5.4) sont linéaires par rapport aux variables de base qui y figurent (variables de types X_f , X_p , X_u , X_z). Les relations (5.5) et (5.6) sont aussi linéaires mais à seuil ; l'effet de seuil peut éventuellement être pris en compte par introduction de variables auxiliaires à valeurs entières ([115], tome 2, alinéa 16.2.1).

b) Evolution des parcs et des stocks. Il faut ensuite exprimer les modifications des parcs et des stocks entre chaque période élémentaire et la suivante, cela seulement dans le cas évolutif, c'est à dire (alinéa 2.a) lorsque $t_0 < t_1$. Désignant alors par T_0 le sous-intervalle $[t_0, t_1 - 1]$ de l'intervalle $T = [t_0, t_1]$, les contraintes correspondantes concernent :

- l'évolution des parcs par transformations,

$$(5.7) \quad \text{pour } t \in T_0, s \in S_n, j \in J_p, \quad X_p(t+1, s, j) = Y_p(t, s, j) + \sum_{h \in H_j^+} N_2(h) X_u(t, s, h) \\ \text{[contr. } x_e(t, s, j) \text{]} ;$$

- l'évolution des stocks par stockage et déstockage,

$$(5.8) \quad \text{pour } t \in T_0, s \in S_n, k = (j', j, j'') \in K, \\ X_f(t+1, s, j) = X_f(t, s, j) - X_f(t, s, j'') + X_f(t, s, j') \\ \text{[contr. } x_s(t, s, k) \text{]}.$$

La contrainte $x_e(t, s, j)$ exprime la conservation des équipements du parc j lors des transformations effectuées durant la période t , dans le secteur s : le nombre de modules en place au début de la période $t+1$ (membre de gauche) est égal au nombre de modules en place au début de la période t moins le nombre de modules mis en transformations pendant cette période [premier terme au second membre, terme ≥ 0 d'après $x_d(t, s, j)$], plus le nombre de modules qui résultent de transformation (vers le parc j) effectuées durant cette période (second terme).

De façon analogue, la contrainte $x_s(t, s, k)$ exprime la conservation du bien stocké lors des opérations de stockage, déstockage, entretien du stock effectuées durant la période t , dans le secteur s , relativement à la capacité de stockage k : le niveau du stock au début de la période $t+1$ (membre de gauche)

est égal au niveau du stock au début de la période t (premier terme au membre de droite), moins [resp. plus] la diminution [resp. l'augmentation] du niveau du stock par déstockage (second terme) [resp. stockage (troisième terme)], le second membre ainsi défini étant ≥ 0 d'après la contrainte de compatibilité $xh(t,s,k)$.

On souligne que les contraintes introduites ici ne concernent, comme celles introduites dans l'alinéa précédent, que les secteurs intérieurs.

c) Comptabilité. Il faut enfin introduire les règles de base de la comptabilité. Les contraintes correspondantes concernent :

- les équilibres dépenses-recettes pour les secteurs intérieurs,

$$(5.9) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, \quad Z_d(t,s) + \sum_{l \in L} D(t,l,s) \\ = Z_r(t,s) + \sum_{l \in L} R(t,l,s) \quad [\text{contr. } q_0(t,s)] ;$$

- les équilibres dépenses-recettes pour les opérations,

$$(5.10) \quad \text{pour } t \in T, l \in L, \quad \sum_{s \in S} D(t,l,s) = \sum_{s \in S} R(t,l,s) \quad [\text{contr. } q_s(t,l)] ;$$

- la cohérence entre actif et passif,

$$(5.11) \quad \text{pour } t \in T, l \in L_f, \quad \sum_{s \in S} W_p(t,l,s) = \sum_{s \in S} W_m(t,l,s) \quad [\text{contr. } q_i(t,l)] ;$$

- la compatibilité des opérations financières avec les encours,

$$(5.12) \quad \text{pour } t \in T, f \in F_p, \quad R_p(t,f) \leq W_p(t,f) \quad [\text{contr. } k_p(t,f)],$$

$$(5.13) \quad \text{pour } t \in T, f \in F_m, \quad D_m(t,f) \leq W_m(t,f) \quad [\text{contr. } k_m(t,f)] ;$$

- l'évolution des encours,

$$(5.14) \quad \text{pour } t \in T_0, f \in F_p, \quad W_p(t+1,f) = W_p(t,f) - R_p(t,f) + D_p(t,f) \\ [\text{contr. } e_p(t,f)],$$

$$(5.15) \quad \text{pour } t \in T_0, f \in F_m, \quad W_m(t+1,f) = W_m(t,f) - D_m(t,f) + R_m(t,f) \\ [\text{contr. } e_m(t,f)].$$

Les contraintes de types q_0 , q_s et q_i expriment de façon standard les équilibres comptables fondamentaux, avec le formalisme des comptes écran adopté ici (alinéas 2.a, 2.b, 3.b, 4.d) et dans le cadre du système de comptabilité en parties doubles. On note que l'équilibre est exprimé en valeur courante dans les contraintes de type q_0 , mais en volume dans celles de type q_s (variables de types D et R).

Les contraintes de type q_0 explicitent l'interprétation des secteurs comme sous-systèmes donnant lieu à une comptabilité en valeur (contrairement aux activités qui n'ont qu'un rôle physique, technique ; alinéa 2.a) ; elles fournissent, via les variables d'échanges en valeur $Z_d(t,s)$ et $Z_r(t,s)$, le couplage entre la base physique et l'appareil monétaire et financier. Ces variables, qui correspondent aux totaux des dépenses et des recettes dues aux échanges commerciaux (alinéa 4.d), complètent les sommes qui les suivent dans (5.9) pour ce qui est des opérations sur biens et services.

Les contraintes de type q_s expriment que, pour chaque type d'opération, toute dépense imputée à un secteur correspond à une recette imputée à un autre secteur ; tandis que les contraintes de type q_i expriment la conservation des droits dans leur répartition entre secteurs via la dualité entre créances et dettes (alinéas 2.b et 3.b).

La contrainte $k_p(t,f)$ [resp. $k_m(t,f)$] exprime que, relativement à l'imputation f , le montant (mesuré en volume) des recettes par diminution des créances (resp. des dépenses pour diminution des dettes) pendant la période t ne peut excéder le montant des encours correspondants au début de la période ; tandis que la contrainte $e_p(t,f)$ [resp. $e_m(t,f)$] exprime la conservation des droits (mesurés en volume) lors des transactions (correspondant à f) effectuées durant la période t : l'encours de créances [resp. de dettes] au début de la période $t+1$ (membre de gauche) est égal à l'encours de créances [resp. de dettes] au début de la période t (premier terme au membre de droite), moins la diminution des créances [resp. des dettes] (second terme), plus l'augmentation des créances [resp. des dettes] (troisième terme), le second membre ainsi défini étant ≥ 0 d'après la contrainte de compatibilité $k_p(t,f)$ [resp. $k_m(t,f)$]. On note que les couples de contraintes (k_p, e_p) et (k_m, e_m) sont analogues au couple (x_h, x_s) concernant les stocks.

On souligne que les équilibres dépenses-recettes de type q_0 [relations (5.9)] ne sont écrits que pour les secteurs intérieurs : cela tient à ce que, puisque seuls les échanges des secteurs extérieurs avec l'ensemble considéré (i.e. avec les secteurs intérieurs) sont pris en compte (alinéa 2.b), une contrainte $q_0(t,s)$ pour $s \in S_x$ serait faussée par la nullité [conventionnelle ; relation (4.5)] des termes $Z(t,s',s)$ et $Z(t,s,s'')$ correspondant aux échanges entre le secteur extérieur s et les secteurs extérieurs s' et s'' .

Toutefois, compte tenu des équilibres dépenses-recettes pour les opérations (contraintes de type q_s), les contraintes de type q_0 entraînent la relation,

$$(5.16) \quad \text{pour } t \in T, \quad \sum_{s \in S_x} Z_d(t,s) + \sum_{s \in S_x} \sum_{l \in L} D(t,l,s) \\ = \sum_{s \in S_x} Z_r(t,s) + \sum_{s \in S_x} \sum_{l \in L} R(t,l,s),$$

qui exprime l'équilibre dépenses-recettes pour l'ensemble extérieur, cela ici exactement puisque les termes correspondant aux échanges entre secteurs extérieurs s'éliminent entre les deux membres. Que (5.16) résulte de (5.9) et 5.10) est une conséquence, dans le cadre formel adopté ici, de la propriété de non indépendance des équations comptables ([99], §1c, page 50). On note que, lorsque l'ensemble S_x des secteurs extérieurs est réduit à un seul élément, s_x , la relation (5.16) relative à la période t coïncide avec $q_0(t,s_x)$.

On souligne enfin que les équilibres dépenses-recettes pour les opérations (contraintes de type q_s) et les équations d'évolution des encours (contraintes de types e_p et e_m) entraînent que la cohérence entre actif et passif (contraintes de type q_i) est vérifiée pour la période $t+1$ dès qu'elle l'est pour la période t [i.e. q_s, e_p, e_m et $q_i(t,l)$ entraînent $q_i(t+1,l)$]. Il en résulte qu'on obtient un ensemble de contraintes logiquement équivalent à celui introduit en ne stipulant $q_i(t,l)$ ($l \in L_f$) que pour la période initiale $t = t_0$.

§ 6 - CONTRAINTES SUPPLEMENTAIRES

On introduit ici, par des exemples, les contraintes qui complètent les contraintes fondamentales : contraintes circonstancielle (alinéa 6.a) et contraintes spéciales (alinéa 6.b). La synergie de ces contraintes supplémentaires et des contraintes fondamentales est récapitulée de façon formelle au paragraphe 7 et illustrée aux paragraphes 10 à 12.

a) Contraintes circonstancielle. Des indications très diverses peuvent être exprimées par l'introduction de valeurs fixées ou de bornes pour les variables de base ou les variables dérivées. Dans ce sens, est dite circonstancielle toute contrainte consistant à imposer à certaines variables, de base ou dérivées, soit d'être exogènes (fixées), soit d'être bornées (inférieurement ou supérieurement). Ainsi, toute contrainte circonstancielle est de l'une ou l'autre des trois formes suivantes :

$$(6.1) \quad V_v = a,$$

$$(6.2) \quad V_v \geq b,$$

$$(6.3) \quad V_v \leq c,$$

où, d'une part V_v désigne, soit une variable de base (§3), soit une variable dérivée (§4), d'autre part a, b, c , sont des nombres ≥ 0 qui constituent des données supplémentaires dites données circonstancielle. On explicite d'abord ci-après deux exemples typiques de telles contraintes. On cite ensuite d'autres exemples illustrant comment ces contraintes peuvent représenter, soit des circonstances, soit des comportements.

Le premier exemple concerne le fait que, dans les études évolutive (i.e. lorsque $t_0 < t_1$; alinéa 2.a), les variables de capital [physique (parcs ou stocks) ou financier (encours)] sont très généralement exogènes pour la période initiale $t = t_0$ (alinéa 12.b). Ces conditions initiale s'écrivent :

$$(6.4) \quad X_p(t_0, s, j) = \underline{X}_p(s, j) \quad (s \in S_n, j \in J_p),$$

$$(6.5) \quad X_f(t_0, s, j) = \underline{X}_f(s, j) \quad (s \in S_n, j \in J_q),$$

$$(6.6) \quad W_p(t_0, f) = \underline{W}_p(f) \quad (f \in F_p) \quad \text{et} \quad W_m(t_0, f) = \underline{W}_m(f) \quad (f \in F_m),$$

où $\underline{X}_p(s, j)$ ($s \in S_n, j \in J_p$), $\underline{X}_f(s, j)$ ($s \in S_n, j \in J_q$), $\underline{W}_p(f)$ ($f \in F_p$), $\underline{W}_m(f)$ ($f \in F_m$), sont des données circonstancielle, les donnée initiale. Dans les études de transitions, ces variables peuvent aussi être fixées pour la période finale $t = t_1$ (alinéa 12.d). Par contre, dans les études statique (où t_0 est la seule période), ces conditions n'ont généralement pas lieu d'être, les niveaux des variables de capital étant endogènes, seulement bornés ou soumis à des contraintes spéciales [par exemple comme (6.9) ci-après ; alinéa 12.c].

Le second exemple concerne les prix : dans la plupart des applications, les prix extérieurs (alinéa 3.b) sont exogènes, cette hypothèse étant à rapprocher de celle selon laquelle le système productif n'est pris en compte que pour les secteurs intérieurs (alinéa 3.a) ; les prix intérieurs peuvent être aussi exogènes, par exemple dans les applications concernant des ensembles économiques non protégés (alinéas 9.d et 9.e).

Des valeurs fixées non nulles ou des bornes (inférieures et supérieures, éventuellement assez rapprochées) pour diverses variables de fonctionnement ou de parc interviennent dans le calage empirique d'un jeu de données techniques

(alinéa 12.b), les données circonstanciellees correspondantes étant alors des valeurs observées.

Des valeurs fixées à zéro ou des bornes peuvent avoir couramment, soit une interprétation circonstancielle, soit une interprétation comportementale.

Pour les niveaux d'activité, des valeurs fixées à zéro peuvent exprimer que les techniques correspondantes, soit ne sont pas disponibles (interprétation circonstancielle), soit ne sont pas utilisées par décision (interprétation comportementale), pendant la période en cause ; de même pour des bornes.

Pour les niveaux d'échanges, des valeurs fixées à zéro peuvent exprimer que ces échanges, bien qu'étant nominativement prévus (par la nomenclature E), sont quantitativement, soit considérés comme impossibles (interprétation circonstancielle), soit rejetés par décision (interprétation comportementale) ; des bornes peuvent avoir aussi les deux interprétations : par exemple une borne supérieure pour un niveau d'importation peut exprimer, soit une limitation de l'offre extérieure (interprétation circonstancielle), soit un contingentement (interprétation comportementale).

Enfin en ce qui concerne les variables dérivées, par exemple une borne supérieure pour la variable $Y_b(t,s,i)$ exprime une limitation de l'excédent effectif du bien i dans le secteur s pendant la période t ; cette limitation peut signifier, soit une condition physique (interprétation circonstancielle), soit une réglementation (interprétation comportementale).

b) Contraintes spéciales. Les particularités qui ne relèvent pas des contraintes fondamentales et ne peuvent pas être prises en compte naturellement par des contraintes circonstanciellees, doivent être représentées par d'autres contraintes supplémentaires, les contraintes spéciales.

Vu leur rôle de complément à une structure de base (alinéas 7.a et 7.b), ces contraintes peuvent présenter des formes très diverses dont on ne cherche pas ici à faire une présentation exhaustive : l'effort de systématisation a porté principalement sur la structure de base dont l'introduction a en particulier comme but de limiter au maximum le volume (la "jungle") des contraintes spéciales ([40], §1.2 et §1.3).

On présente donc seulement ci-après quelques exemples de telles contraintes, en commençant par celles qui concernent la base physique et en distinguant les contraintes instantanées et les contraintes avec délai, les contraintes linéaires (éventuellement à seuil) et les contraintes non linéaires.

D'abord, des contraintes instantanées faisant intervenir la totalité du système en cause via une sommation sur les secteurs :

$$(6.7) \quad \sum_{s \in S_n} Y_b(t,s,i) \leq y(t,i),$$

$$(6.8) \quad \sum_{e \in E_{i,x,n}} X_z(t,e) \leq z(t,i),$$

où $y(t,i)$ et $z(t,i)$ (nombres ≥ 0) sont des données et où $E_{i,x,n}$ désigne le sous-ensemble de E constitué des transferts du bien i de l'extérieur vers l'intérieur, i.e. des échanges de la forme (i,s',s'') avec $s' \in S_x$ et $s'' \in S_n$. La relation (6.7) exprime que l'excédent total du bien i dans le système (i.e. dans tous les secteurs intérieurs) pendant la période t ne dépasse pas $y(t,i)$; tandis que la relation (6.8) exprime que la quantité totale de bien i importée par le système (i.e. par tous les secteurs intérieurs en provenance de tous les secteurs extérieurs) ne dépasse pas $z(t,i)$. Comme pour les contraintes circonstanciellees, ces relations peuvent avoir une interprétation circonstancielle ou

une interprétation comportementale.

Puis des contraintes encore instantanées mais permettant de prendre en compte un impératif de croissance de parcs $j_1 \in J_p$ dans des études statiques :

$$(6.9) \quad c'(s,j)Xp(t,s,j) \leq Xu(t,s,h_j) \leq c''(s,j)Xp(t,s,j) \text{ avec } h_j = (j_0, j_1),$$

où $c'(s,j)$ et $c''(s,j)$ (nombres ≥ 0) sont des taux de croissance qui peuvent être donnés ou variables [par exemple comme critère ; relation (9.7)].

Ensuite, des contraintes avec délai qui stipulent une certaine rigidité dans l'évolution des niveaux de certaines activités :

$$(6.10) \quad b'(t,s,j)Xf(t,s,j) \leq Xf(t+1,s,j) \leq b''(t,s,j)Xf(t,s,j),$$

où $b'(t,s,j)$ et $b''(t,s,j)$ sont données tels que $0 \leq b'(t,s,j) \leq b''(t,s,j)$. Cette rigidité peut représenter des impératifs de régularité dans le fonctionnement, impératifs techniques non pris en compte par ailleurs ou impératifs résultant d'un comportement spécifique. Des contraintes analogues mais concernant les variables d'échanges $Xz(t,e)$ et $Xz(t+1,e)$ pourraient représenter des contrats régissant ces échanges.

Enfin des contraintes à seuil permettant de prendre en compte l'avènement de techniques nouvelles au cours d'un cheminement, via l'accumulation (formellement le stockage) de biens représentant les connaissances correspondantes :

$$(6.11) \quad Xf(t,s,j) \geq c(j) \text{ ou } Xu(t,s,h) = 0,$$

où, d'une part $h \in H$ représente la construction du parc $j_1 \in J_p$ [i.e. $h = (j_0, j_1)$] réclamant une accumulation du bien de connaissances en cause, d'autre part $j_0 \in J_q$ représente le stock de ce bien, enfin $c(j)$ est un seuil donné de connaissance (représenté par un niveau du stock) en dessous duquel aucune construction n'est possible. La relation (6.11) est à conjuguer, d'une part avec la condition initiale $Xp(t_0, s, j_1) = 0$, d'autre part avec l'introduction d'une activité de "recherche" produisant le bien de connaissance.

Mise à part éventuellement (6.9), les contraintes spéciales ci-dessus, qui concernent la base physique, sont naturellement linéaires et s'expriment directement en termes des variables de base. Les contraintes spéciales concernant l'appareil monétaire et financier réclament en général l'introduction de variables spéciales et sont souvent non linéaires.

Ainsi le calcul du montant des intérêts dus par un secteur s réclame l'introduction de la variable représentant le taux d'intérêt correspondant :

$$(6.12) \quad Db(t,g) = In(t,g)Wm(t,f),$$

où, d'une part f et g désignent respectivement les couples (l,s) et (l',s) , $l \in L_f$ représentant l'opération de prêt en cause et $l' \in L_r$ l'opération de versement des intérêts correspondante, d'autre part $In(t,g)$ est le taux d'intérêt ; ce taux peut être exogène, auquel cas (6.12) est linéaire, ou endogène, auquel cas (6.12) est non linéaire (bilinéaire) et réclame d'être complétée par des contraintes de comportement financier. Une contrainte analogue pourrait concerner le montant des impôts indirects d'un secteur en fonction de ses achats.

De même, le calcul du montant des impôts directs payés par un secteur s pendant la période t réclame l'introduction des variables supplémentaires $T_x(t,s)$ et $A_s(t,s)$ représentant respectivement le taux d'imposition et l'assiette de ces impôts pour cette période :

$$(6.13) \quad D_b(t,g) = T_x(t,s)A_s(t,s),$$

où g désigne le couple (l,s) , $l \in L_r$ représentant l'opération de répartition correspondant aux impôts en cause. Cette relation doit être complétée : d'abord par l'équation de définition de l'assiette $A_s(t,s)$ comme solde significatif convenable du secteur s pendant la période $t-1$ (cela pour $t > t_0$), par exemple,

$$(6.14) \quad A_s(t,s) = Z_r(t-1,s) - Z_d(t-1,s) \quad \text{si } Z_r(t-1,s) - Z_d(t-1,s) > 0 \\ \text{et } A_s(t,s) = 0 \quad \text{sinon ;}$$

puis par la relation exprimant le taux d'imposition $T_x(t,s)$ en fonction de l'assiette, par exemple fonction étagée correspondant au barème de l'impôt, ce qui peut être exprimé par des contraintes à seuil.

On note que, bien qu'étant avec délai, la contrainte (6.13) ne fait intervenir que des variables relatives à la période t : cela tient à l'introduction de la variable de mémorisation $A_s(t,s)$ qui permet de reporter le caractère interpériodes dans l'équation de définition (6.14) de cette variable en fonction des variables relatives à la période $t-1$.

Plus généralement, toute contrainte avec délai [par exemple (6.10)] peut être écrite de façon instantanée, i.e. de façon à ne concerner que des variables relatives à une seule période, en introduisant des variables (spéciales) de mémorisation qui sont, elles, liées aux variables des périodes précédentes par des équations de définition convenables. Lorsque la période en question est la période initiale $t = t_0$, ces équations n'ont pas lieu d'être et les variables de mémorisation sont naturellement exogènes (alinéa 12.b).

Au delà des exemples précédents, on pourrait inscrire dans le cadre formel mis en place ici les contraintes économétriques de comportements qui permettent le bouclage par les variables monétaires et financières dans les modèles macro-économiques empiriques ([3], [28], [112], [51], [14], [102], [121]). On voit ainsi la possibilité d'un modèle conjugant la richesse de ces derniers du point de vue représentation des comportements avec une représentation intrinsèque de la base physique qui leur manque dans leur état actuel. Mais cette possibilité n'est pas la visée première de ce travail : en fonction du propos de la prospective libre (alinéa 1.a), on s'intéresse ici davantage à des réalisations du modèle (alinéa 7.c) comportant le moins possible de contraintes spéciales, quitte à être très sous-déterminées (voir cependant le §11).

On souligne enfin l'arbitraire qui existe dans la distinction entre contraintes fondamentales et contraintes spéciales : en fonction de la généralité du propos, on a visé ici un système minimal de contraintes fondamentales (alinéa 7.c), mais rien n'empêche évidemment, en fonction d'un propos plus particulier, d'inclure dans ce système d'autres contraintes, par exemple certaines de celles citées ci-dessus.

§ 7 - RECAPITULATION

Les divers composants du modèle présentés dans les paragraphes 2 à 6 ci-dessus sont récapitulés ici (alinéas 7.a et 7.b), pour aboutir à une vue synthétique de la structure à deux étages visée, via ses réalisations (alinéa 7.c) et les déterminations qu'elle réclame (alinéa 7.d). Ce paragraphe, assez abstrait, sera complété par la présentation des modalités qui font l'objet du paragraphe 8 et illustré dans les paragraphes 10 à 12.

a) Structure de base. Au descriptif fondamental Desf, qui est supposé donné (alinéa 2.c), est associée la structure de base dont les composants ont été introduits progressivement dans les paragraphes 3 à 6 ci-dessus : variables de base (§3), données techniques (§4) et circonstancielle (alinéas 5.a et 6.a), contraintes fondamentales (§5), contraintes circonstancielle (alinéa 6.a). On commence par récapituler ces divers composants.

Les variables de base sont récapitulées dans le tableau 1 :

T	type	indexation	notation	signification
A				
B	Xf	T x Sn x J	Xf(t,s,j)	niveau d'activité
L	Xp	T x Sn x Jp	Xp(t,s,j)	niveau de parc
E	Xu	T x Sn x H	Xu(t,s,h)	niveau de transformation
A	Xz	T x E	Xz(t,e)	niveau d'échange
U				
	Pr	T x E	Pr(t,e)	prix d'échange
1	Po	T x Lf	Po(t,l)	cours d'opération
	Db	T x Gd	Db(t,g)	dépense de répartition
	Rb	T x Gr	Rb(t,g)	recette de répartition
	Dp	T x Fp	Dp(t,f)	dépense pour créance
	Dm	T x Fm	Dm(t,f)	dépense remb. dette
	Rp	T x Fp	Rp(t,f)	recette remb. créance
	Rm	T x Fm	Rm(t,f)	recette par augm. dette
	Wp	T x Fp	Wp(t,f)	encours de créances
	Wm	T x Fm	Wm(t,f)	encours de dettes

Un jeu de données de base est un couple (B_0, B_1) où B_0 et B_1 sont respectivement un jeu de données techniques et un jeu de données circonstancielle.

Un jeu de données techniques B_0 est constitué par le multiplet des coefficients techniques de types Cf, Cp, Cu, Cz, Mp, M1, M2, N2 (alinéa 4.b), Xf et Xu (alinéa 5.a). On désigne par Coef(Desf) l'ensemble (le cône ≥ 0) formé de tous ces multiplets (relatifs au descriptif Desf). On note que Coef(Desf) ne dépend pas de l'échelle temporelle T.

La spécification d'un jeu de données circonstancielle se décompose naturellement comme suit en deux étapes.

La première étape, nominative, consiste en la spécification de la famille, notée Desc et appelé descriptif circonstanciel, de multiplets d'indexation des variables [par exemple (t,s,j) pour une variable de type Xf, etc] qui indique (selon un ordre qu'il est inutile d'explicitier ici) quelles sont les variables qui sont respectivement exogènes, bornées supérieurement, bornées inférieure-

ment ou, pour le type Yb, donnent lieu à dotations ou prélèvements (alinéa 5.a) ; on désigne par Cir(Desf) l'ensemble des descriptifs circonstanciels Desc considérés comme possibles (relativement au descriptif Desf).

La seconde étape, numérique, consiste en la spécification du jeu de données circonstancielle lui-même, i.e. du multiplet B_1 de nombres ≥ 0 indexé par Desc et dont les composantes constituent les données circonstancielle visées [dotations et prélèvements (alinéa 5.a), valeurs fixées et bornes (alinéa 6.a)] ; on désigne par Don(Desc) l'ensemble de ces multiplets. Ce formalisme permet commodément de distinguer une variation qualitative de Desc d'une variation quantitative de B_1 dans Don(Desc), Desc étant fixe (alinéa 9.c).

Les contraintes fondamentales lient les variables de base aux données de base, essentiellement données techniques et accessoirement données circonstancielle via les dotations et prélèvements ; elles sont récapitulées par le tableau 2 :

T	type	indexation	notation	signification
A				
B	xb	T x Sn x I	xb(t,s,i)	conservation des biens
L	xk	T x Sn x Jp	xk(t,s,j)	compat. activités/parcs
E	xd	T x Sn x Jp	xd(t,s,j)	compat. transf./parcs
A	xh	T x Sn x K	xh(t,s,k)	compat. déstock./stocks
U	vf	T x Sn x Jp	vf(t,s,j)	effets échelle activités
	vu	T x Sn x H	vu(t,s,h)	effets échelle transf.
2				
	xe	T x Sn x Jp	xe(t,s,j)	évolution des parcs
	xs	T x Sn x K	xk(t,s,k)	évolution des stocks
	qo	T x Sn	qo(t,s)	équilibre par secteurs
	qs	T x L	qs(t,l)	équilibre par opérations
	qi	T x Lf	qi(t,l)	cohérence actif/passif
	kp	T x Fp	kp(t,f)	compat. op./enc. créances
	km	T x Fm	km(t,f)	compat. op./enc. dettes
	ep	T x Fp	ep(t,f)	évolut. enc. créances
	em	T x Fm	em(t,f)	évolut. enc. dettes

Enfin les contraintes circonstancielle qui fixent ou bornent les variables de base en fonction des données circonstancielle.

On souligne que, dans le cadre formel défini par le descriptif fondamental Desf, le descriptif circonstanciel Desc \in Cir(Desf) ainsi que les jeux de données $B_0 \in$ coef(Desf) et $B_1 \in$ Cir(Desc) sont génériques, à priori quelconques ; ces termes doivent être spécifiés dans les applications conformément aux schémas de construction et d'utilisation qui font l'objet des paragraphes 8 et 9.

b) Réalisations de base. On appelle cheminement de base (relatif au descriptif Desf) tout multiplet de valeurs des variables de base rangées dans l'ordre des périodes et, par exemple, dans l'ordre du tableau 1 ci-dessus pour les autres indices : $(Xf(t,s,j) (s \in Sn, j \in J), Xp(t,s,j) (s \in S, j \in Jp), \dots, Wm(t,f) (f \in F)) (t \in T)$. On appelle régime de base (relatif au descriptif Desf) tout multiplet de valeurs des variables de base relatives à une période, variables rangées, par exemple, dans l'ordre du tableau 1 : $(Xf(s,j) (s \in Sn, j \in J), Xp(s,j) (s \in Sn, j \in Jp), \dots, Wm(f) (f \in Fm))$.

Se référant au TABLEAU 1 (alinéa 7.a), on souligne la répartition des variables de base en trois blocs : le bloc des variables physiques (variables de types Xf, Xp, Xu, Xz) ; le bloc des variables de prix (variables de types Pr et Po) ; le bloc des variables comptables (variables de types Db, Rb, Dp, Dm, Rp, Rm, Wp, Wm). On appelle simplement bloc physique (resp. bloc de prix, bloc comptable) et on désigne par Vq (resp. Vp, Vc) un multiplet de valeurs des variables physiques (resp. de prix, comptables) rangées dans le même ordre que dans un cheminement. Un cheminement de base (resp. un régime de base dans le cas statique) XB est alors identifié au triplet (Vq,Vp,Vc) des blocs (physique, de prix, comptable) correspondants.

Une réalisation de base (relative à la structure de base) de descriptif fondamental Desf est un quadruplet,

$$(7.1) \quad \text{Resb} = (\text{Desf}, \text{Desc}, B_0, B_1),$$

vérifiant les relations de compatibilité :

$$(7.2) \quad \text{Desc} \in \text{Cir}(\text{Desf}),$$

$$(7.3) \quad B_0 \in \text{Coef}(\text{Desf}) \quad \text{et} \quad B_1 \in \text{Don}(\text{Desc}).$$

Ainsi, spécifier une réalisation de base, de descriptif fondamental Desf, revient à spécifier un descriptif circonstanciel Desc et un jeu de données de base (B_0, B_1) , tous deux compatibles avec le descriptif fondamental Desf [relations (7.2) et (7.3)].

On appelle extension de la réalisation de base Resb donnée par (7.1), et on note $\text{Ext}(\text{Resb})$ ou encore $\text{Ext}(\text{Desf}, \text{Desc}, B_0, B_1)$, l'ensemble des cheminements de base compatibles avec le jeu de données de base (B_0, B_1) , i.e. vérifiant toutes les contraintes spécifiées par ce jeu (contraintes fondamentales et contraintes circonstancielles : contraintes de base).

Les réalisations de base sont en général (i.e. avec les jeux de données circonstancielles "naturels") très sous-déterminées en ce sens que (alinéa 7.c), si elles ne sont pas vides, leurs extensions sont de "gros" ensembles (infinis) multidimensionnels. Cette sous-détermination résulte de ce que la structure de base ne prend en compte les comportements que par les contraintes circonstancielles ; elle peut être réduite en rendant le jeu de données circonstancielles plus serré (i.e. en augmentant le nombre des variables exogènes et en rapprochant les bornes) ; mais ce procédé est évidemment limité par sa rigidité et par l'arbitraire relatif aux données nécessaires, ainsi que le montre l'exemple fondamental des prix (alinéas 6.a et 9.e). Des contraintes spéciales s'imposent alors.

c) Structure spéciale ; réalisations. Dans le cadre formel général de cette récapitulation, on va traiter les contraintes spéciales, par une démarche "en extension" analogue à celle appliquée aux contraintes circonstancielles, en introduisant des termes $\text{Spe}(\text{Desf}, \text{Desc})$, Desp et $\text{Don}(\text{Desp})$ parallèlement aux termes $\text{Cir}(\text{Desf})$, Desc et $\text{Don}(\text{Desc})$.

On suppose définie pour cela une classe de structures spéciales, compatibles avec le descriptif fondamental Desf (en particulier intégrant les variables de base) et dont chaque représentant est spécifié par un descriptif spécial Desp indiquant, d'une part ce que sont nominativement les variables et les jeux de données spéciales, d'autre part la forme des contraintes spéciales qui les lient entre eux et aux variables de base.

On désigne par $\text{Spe}(\text{Desf}, \text{Desc})$ l'ensemble des descriptifs spéciaux Desp considérés comme possibles relativement au type de structure spéciale retenu ainsi qu'aux descriptifs Desf et Desc . De plus, pour chaque tel descriptif Desp , on désigne par $\text{Don}(\text{Desp})$ l'ensemble des spécifications des jeux de données spéciales B_2 considérés comme possibles relativement à ce descriptif.

Cela étant, la structure complète que l'on a en vue peut être appréhendée comme suit :

- chaque représentant de la structure est spécifié par un descriptif,

(7.4) $\text{Des} = (\text{Desf}, \text{Desc}, \text{Desp}),$

vérifiant la relation (7.2) et la relation,

(7.5) $\text{Desp} \in \text{Spe}(\text{Desf}, \text{Desc}) ;$

un descriptif sera aussi appelé simplement structure ;

- un jeu de données, relatif au descriptif Des , est un triplet (B_0, B_1, B_2) vérifiant la relation (7.3) et la relation,

(7.6) $B_2 \in \text{Don}(\text{Desp}) ;$

- une réalisation (de la structure), basée sur le (ou de) descriptif Des (ou encore basé sur Desf , ...) est un quadruplet,

(7.7) $\text{Res} = (\text{Des}, B_0, B_1, B_2),$

où (B_0, B_1, B_2) un jeu de données relatif à Des .

Ainsi, spécifier la réalisation Res définie par (7.4) et (7.7) revient à spécifier la réalisation de base sous-jacente $\text{Resb} = (\text{Desf}, \text{Desc}, B_0, B_1)$ (alinéa 7.b), le descriptif spécial Desp et le jeu de données spéciales B_2 ; en particulier, une réalisation de base est une réalisation sans contraintes spéciales (ou avec des contraintes spéciales tautologiques).

La structure (resp. la réalisation) est dite statique (resp. évolutive) dans le cas statique (resp. évolutif ; alinéa 2.a) ; elle est dite à mémorisation canonique si toute contrainte spéciale avec délai est écrite de façon instantanée au moyen de variables de mémorisation (alinéa 6.b).

On appelle cheminement (relatif à la structure Des ou à la réalisation Res) tout couple $X = (XB, Vs)$ formé d'un cheminement de base XB (alinéa 7.b) et d'un multiplet Vs , appelé bloc spécial, de valeurs des variables spéciales rangées (comme pour XB) dans l'ordre des périodes. On appelle de plus régime relatif à la période $t \in T$ dans le cheminement (XB, Vs) , le multiplet $(XB(t), Vs(t))$ des variables relatives à la période t . Ainsi un cheminement apparaît comme une suite de régimes indexés par les périodes successives $t \in T$: si X désigne un cheminement, on note $X(t)$ le régime (de ce cheminement) relatif à la période t . Dans le cas statique, régimes et cheminements coïncident.

On appelle alors extension de la réalisation Res donnée par (7.4) et (7.7), et on note $\text{Ext}(\text{Res})$ ou encore $\text{Ext}(\text{Des}, B_0, B_1, B_2)$, l'ensemble des cheminements compatibles avec le jeu de données (B_0, B_1, B_2) , i.e. vérifiant toutes les contraintes spécifiées par ce jeu (contraintes fondamentales, circonstancielles et spéciales). Les éléments de $\text{Ext}(\text{Res})$ sont appelés cheminements (resp. régimes dans le cas statique) compatibles de (ou avec) la réalisation Res .

Une réalisation est dite sous-déterminée (resp. catégorique) si son extension comporte plus d'un élément (resp. un seul élément).

La sous-détermination des réalisations envisagées résulte essentiellement de l'omission prospective de certains mécanismes qui sont considérés comme contingents, comme susceptibles d'être divers. Ces mécanismes, concernant l'organisation économique et les comportements, sont représentés par des contraintes circonstancielle ou des contraintes spéciales, principalement par ces dernières, cela par opposition aux équilibres fondamentaux, en particulier aux équilibres physiques, qui eux ne sont pas contingents et sont toujours représentés par les contraintes fondamentales. Ainsi, la réalisation de base sous-jacente étant en général très sous-déterminée (alinéa 7.b), une réalisation est d'autant moins sous-déterminée que la structure spéciale correspondante est plus riche.

Un des buts du type de structure à deux étages introduit ici est de permettre des comparaisons quantitatives entre les multiples options possibles concernant ces mécanismes contingents : ces comparaisons vont être obtenues en faisant varier les composantes circonstancielle et spéciales, B_1 et B_2 , du jeu de données, la composante technique B_0 restant fixe (alinéa 9.c).

A ce sujet, la notion naturelle de réalisation "plus sous-déterminée" qu'une autre joue un rôle important. Dans ce sens, une structure $Des = (Desf, Desc, Desp)$ est dite dérivée de la structure Des donnée par (7.4) si elle est plus riche en ce sens que, d'une part $Desf = Desf$, d'autre part $Desc$ et $Desp$ contiennent respectivement $Desc$ et $Desp$ (ainsi toute contrainte de Des est aussi une contrainte de Des). Une réalisation $Res = (Des, B_0, B_1, B_2)$ basée sur Des est alors dite dérivée de la réalisation Res donnée par (7.7) si, d'une part $B_0 = B_0$, d'autre part B_1 et B_2 induisent respectivement B_1 et B_2 par restriction canonique à $Desc$ et $Desp$. On a ainsi la propriété visée :

(7.8) $Ext(Res)$ est contenu dans $Ext(Res)$ si Res est dérivée de Res .

En fonction de cette propriété, on dira aussi que Res est moins sous-déterminée que Res ou que Res est plus sous-déterminée que Res .

Le procédé le plus simple pour construire des réalisations dérivées consiste à rendre des variables exogènes. Dans ce sens, on utilisera (alinéa 9.e) les notations suivantes se référant à la répartition des variables en blocs (alinéa 7.b) : on désigne d'abord par $Blq(Res)$ [resp. $Blp(Res)$, $Blc(Res)$] l'ensemble des blocs physiques Vq [resp. des blocs de prix Vp , des blocs comptables Vc] compatibles avec les contraintes circonstancielle définies par le jeu de données circonstancielle B_1 de la réalisation Res ; on désigne de plus par $Bls(Res)$ l'ensemble des blocs spéciaux et par $Blcs(Res)$ l'ensemble des couples $Vcs = (Vc, Vs)$ où $Vc \in Blc(Res)$ et $Vs \in Bls(Res)$; on désigne enfin, pour chaque $Vq \in Blq(Res)$ [resp. $Vp \in Blp(Res)$], par $Res(Vq)$ [resp. $Res(Vp)$] la réalisation dérivée de Res pour laquelle toutes les variables physiques [resp. de prix] sont exogènes et ont leurs valeurs prescrites par Vq [resp. Vp].

d) Déterminations. Pour l'utilisation du modèle, le premier problème à résoudre est celui de la détermination, pour chaque réalisation, d'éléments de son extension, i.e. de cheminements (resp. de régimes dans le cas statique) compatibles avec le jeu de données correspondant. Dans le contexte (essentiel ici ; alinéa 7.c) des réalisations sous-déterminées, les extensions sont très généralement de "gros" ensembles (infinis, multidimensionnels, de structure complexe) ; chaque détermination réclame alors un procédé de choix.

Dans ce sens, la détermination d'éléments optimaux pour des critères variés va jouer un rôle important. Formellement, un critère, relatif à la structure Des, est une fonction numérique des variables (variables de base et variables spéciales), i.e. une fonction numérique, sur l'ensemble des cheminements, qui est définie explicitement en fonction des variables ; soit Cri(Des) l'ensemble de ces fonctions.

Si Res est une réalisation basée sur la structure Des, les éléments de Cri(Des) sont aussi dits relatifs à la réalisation Res. A chaque tel critère est alors associé le problème d'optimisation :

$$(7.9) \quad \text{trouver } \underline{X} \in \text{Ext}(\text{Res}) \quad \text{tel que } C(\underline{X}) = \text{Min}_{X \in \text{Ext}(\text{Res})} C(X),$$

(le problème analogue avec Max au lieu de Min se ramène au précédent en changeant C en -C). Admettant que ce problème est résoluble, on note $\underline{X}(\text{Res}, C)$ ou encore [si Res est définie par (7.4) et (7.7)] $\underline{X}(B_0, B_1, B_2, C)$ sa solution ou, en cas de non unicité, une de ses solutions spécifiées. Le choix du régime $X(\text{res}, C)$ repose alors sur celui du critère C.

Dans les déterminations par optimisation, une place à part est occupée par les réalisations linéaires, réalisations pour lesquelles toutes les contraintes sont linéaires (éventuellement à seuil) par rapport aux variables endogènes. Le problème d'optimisation (7.9) peut alors être résolu de façon standard par les méthodes de la programmation linéaires ([115]) si le critère C est linéaire. Cette possibilité est importante, vu la grande taille des problèmes d'optimisation en cause (alinéa 8.c).

Une réalisation peut ne pas être linéaire à cause de sa structure spéciale ou à cause de sa structure de base.

En ce qui concerne la structure de base, on remarque que, mises à part les contraintes à seuil exprimant les effets d'échelle (contraintes de types vf et vu), cette structure ne comporte comme contraintes non linéaires que les équilibres en volume des secteurs (contraintes de type qo) qui font intervenir les produits des quantités par les prix [relations (4.4) et (4.12)]. Cela tient à ce que l'analyse détaillée qui est faite ici de la base physique permet d'éviter de façon naturelle les non linéarités "empiriques" qui grèvent les modèles macroéconomiques, tant en ce qui concerne la représentation du système productif (fonctions de production ; alinéa 10.f) que celle des échanges (fonctions d'importations et d'exportations).

Il en résulte qu'une réalisation de base (supposée par exemple telle que les cours sont exogènes) est linéaire dans les deux cas suivants : soit tous les prix sont exogènes, soit tous les niveaux d'échanges sont exogènes. Ces deux cas sont étudiés dans l'alinéa 9.e.

Par ailleurs, les contraintes spéciales introduisent d'autres non linéarités inévitables [par exemple encore par bilinéarité dans (6.12) ou (6.13)]. L'esprit dans lequel la structure spéciale est envisagée consiste à rester, comme pour la structure de base, le plus près possible des linéarités ou multilinéarités naturelles, cela au prix d'un alourdissement du descriptif.

§ 8 - MODALITES DE CONSTRUCTION

Après un aperçu du protocole de mise en oeuvre du modèle (alinéa 8.a), ce paragraphe contient diverses indications concernant les réalisations de base : d'une part méthodes de construction (alinéas 8.b et 8.c), d'autre part particularités de constitution qui nourrissent le formalisme (alinéas 8.d et 8.e). On ne donne ici que des indications succinctes qui seront complétées, tant en ce qui concerne la méthode d'agrégation que le détail des modalités par la présentation séparée d'exemples numériques (voir aussi [32], chap. 6).

a) Protocole opératoire. La mise en oeuvre du modèle, relativement à un ensemble humain déterminé, comporte de façon standard des phases de construction et des phases d'exploitation.

Une phase de construction comporte les étapes suivantes qui consistent à spécifier (avec la terminologie introduite au §7) :

- (1) un descriptif fondamental Desf ;
- (2) un jeux de données techniques B_0 relatif à Desf ;
- (3) un descriptif circonstanciel Desc ε Cir(Desf) ;
- (4) un jeux de données circonstancielles $B_1 \varepsilon$ Don(Desc) ;
- (5) un descriptif spécial Desp ε Spe(Desf,Desc) ;
- (6) un jeux de données spéciales $B_2 \varepsilon$ Don(Desp).

Chaque phase de construction fournit ainsi un Descriptif Des = (Desf,Desc, Desp) et une réalisation Res = (Des, B_0 , B_1 , B_2) : c'est à partir d'une ou de plusieurs réalisations obtenues de la sorte que peut se dérouler une phase d'exploitation, par exemple via l'un ou l'autre des schémas d'utilisation qui sont étudiés dans les paragraphes 9 à 12.

On souligne que chaque phase de construction n'exige évidemment pas la reprise complète de toutes les étapes (1) à (6) : après une étape initiale qui doit être complète de façon à mettre en place l'ensemble, les étapes courantes sont partielles et procèdent seulement par modification de certains composants.

On souligne aussi que l'ordre des étapes précédentes n'est pas quelconque, mais résulte de l'interdépendance des divers composants d'une réalisation : toute phase de construction (initiale ou par modification) doit respecter cette interdépendance ; cet impératif constitue une difficulté importante dans la manipulation du modèle, difficulté qui ne peut être dépassée que par l'utilisation d'un logiciel assurant de façon standard les vérifications nécessaires.

En fait, au delà de cette interdépendance, les étapes (1) à (6) n'ont pas le même statut vis-à-vis de la plus ou moins grande permanence, stabilité au cours des phases d'exploitation, des termes qui en résultent. Dans ce sens, les étapes (1) et (2) (auxquelles est essentiellement relatif ce paragraphe 8) ont un statut primordial, de préliminaire, car le descriptif fondamental Desf et le jeu de données techniques B_0 qu'elles fournissent jouent un rôle de fondement stable (seulement soumis à des variations limitées ; alinéa 9.c), susceptible de porter des composants circonstancielles (Desc, B_1) et spéciaux (Desp, B_2) très divers via les étapes (3) à (6). Cette opposition entre la stabilité des composants fondamentaux et la variabilité des composants circonstancielles ou spéciaux, est une caractéristique essentielle pour l'adéquation de la structure en cause à la prospective libre (alinéas 1.a, 7.c, 9.a, 9.c).

Cela étant, les phases de construction ne sont que les préliminaires des phases d'exploitation : la coordination entre les deux doit être assurée par un

cahier des charges convenable appelé démarcation.

La démarcation doit préciser les deux types de déterminants que sont, d'une part les caractéristiques générales de l'ensemble humain en cause, d'autre part les conditions et objectifs des études prospectives à mener.

Les premiers, en tant qu'antécédents intentionnels des jeux de données, concernent : le territoire (ressources et patrimoine), le lot de techniques considérées comme disponibles, l'organisation des échanges, les niveaux de vie, les comportements et stratégies de gestion, l'environnement économique extérieur à prendre en compte.

Les second concernent les traits généraux de l'étude qui sont en aval des jeux de données, par exemple les critères à utiliser pour les analyses multi-critère, les comparaisons à faire, le terme considéré ou l'arbitrage entre stabilité et développement.

Les deux types de déterminants ne sont évidemment pas indépendants et certains aspects en sont souvent très imbriqués. La démarcation est entendue comme un texte relativement court, présentant l'ensemble de façon plus suggestive que formelle : un exercice littéraire précédant le dur labeur numérique des étapes de la construction !

b) Délimitation. En ce qui concerne l'étape nominative (1), la délimitation, qui conduit à la spécification du descriptif fondamental $Desf = (I, J, S, L, T; Jp, H, K, Sn, E, Lf, Gd, Gr, Fd, Fm)$, il est utile de distinguer les deux partitions suivantes de ce descriptif (la nomenclature de périodes T étant mise à part) : la partition formelle en les deux groupes formés des nomenclatures, de base I, J, S, L, dérivées Jp, H, K, Sn, E, Lf, Gd, Gr, Fd, Fm ; la partition fonctionnelle en les trois groupes formés des nomenclatures, techniques I, J, Jp, H, K, sectorielles S, Sn, E, monétaires (et financières) L, Lf, Gd, Gr, Fd, Fm.

La spécification des diverses nomenclatures appelle alors les remarques contrastées suivantes :

- dans chaque groupe de la partition fonctionnelle, les nomenclatures de base doivent être définies, avant les nomenclatures dérivées, mais en tenant compte de ce que vont être ces dernières ;

- la spécification des nomenclatures techniques, d'une part, des nomenclatures monétaires, d'autre part, donne lieu à une autonomie partielle, mais pas totale car chacune d'elles dépend aussi de la spécification des nomenclatures sectorielles.

De ces remarques se dégagent les deux groupes de nomenclatures à traiter en fonction des indications fournies par la démarcation : le groupe physique (I, J, S, Jp, H, K, Sn, E) et le groupe organisationnel (S, L, Lf, Gd, Gr, Fd, Fm, Sn, E). A partir des nomenclatures de base respectives (I, J, S et S, L ; première remarque ci-dessus), les traitements peuvent être relativement autonomes à condition de respecter le lien constitué par les nomenclatures sectorielles (deuxième remarque ci-dessus).

En ce qui concerne le groupe physique, la plausibilité (physique) des régimes ou des cheminements compatibles (avec les jeux de données potentiels) réclame, des nomenclatures en cause, une exhaustivité suffisante pour que les contraintes fondamentales expriment convenablement les propriétés de conservation et de compatibilité requises. Par exemple, relativement aux nomenclatures I, J, E et aux contraintes de type xb, tout bien nominativement consommé par une activité doit être nominativement produit par une autre activité ou fourni par un échange. On dit ici "nominativement" car il s'agit seulement, en un premier stade qualitatif, de mettre ce qu'il faut dans les nomenclatures pour qu'il n'y ait pas de lacune nominative.

Cette exhaustivité est relative en ce sens qu'elle ne signifie pas universalité : selon la taille et la nature de l'ensemble humain considéré, les

nomenclatures de base I, J, S peuvent être plus ou moins spécialisées. On distingue à ce sujet les ensembles de type local (par exemple communes ou cantons ruraux) qui sont de petite taille et n'incluent ni grande industrie ni services centraux, des ensembles de type national (départements, régions, nations, ensembles multinationaux) qui sont plus vastes et incluent au moins certains de ces éléments, les zones de concentration (villes, zones industrielles, etc) s'apparentant aux secondes malgré leur petite taille.

En ce qui concerne le groupe organisationnel, l'impératif d'exhaustivité est moindre, dans la mesure où il est relatif à la prise en compte des comportements, laquelle est soumise à contingence prospective (alinéa 7.c). Par ailleurs la spécification des nomenclatures du groupe monétaire est en général plus fortement liée à celle de la structure spéciale que celles du groupe technique.

c) Agrégation. Les exigences du recueil des données et du traitement informatique excluant évidemment de manipuler des nomenclatures de base qui soient ultimes du point de vue de la finesse de l'analyse, les opérations précédentes de délimitation (alinéa 8.b) sont à conjuguer avec la procédure d'agrégation nominative qui consiste à regrouper les objets concrets (choses qui circulent, processus techniques, agents, opérations élémentaires) en classes génériques, en agrégats, qui constituent les postes (biens, activités, secteurs, opérations) des nomenclatures de base opérationnelles.

Pour les nomenclatures I, J, L dont les postes sont quantifiés en tant qu'agrégats (alinéa 2.a), cette procédure d'agrégation nominative est inséparable de la procédure d'agrégation quantitative qui consiste à définir l'appareil de quantification associé à ces nomenclatures, lequel est à la base de la numérisation [étapes (2), (4), (6)]. Cet appareil associe à chaque poste une unité par rapport à laquelle sont mesurés les quantités ou niveaux correspondants. La définition de ces unités repose, via de nombreux arbitrages se référant à la démarcation, sur l'introduction de rapports d'équivalences entre les objets concrets qui sont agrégés. Ces équivalences, qui s'expriment par un ensemble de conventions, relèvent de considérations globales, d'anticipations heuristiques, concernant les régimes ou cheminements potentiels et imposent des conditions de validité aux jeux de données (en particulier circonstancielles) à utiliser pour les déterminations.

En ce qui concerne les nomenclatures techniques I et J (pour lesquelles les difficultés de l'agrégation sont typiques), ces considérations globales concernent essentiellement la circulation des biens entre les activités : par exemple, les équivalences entre biens peuvent être faites, en termes physiques, "à la production" ou "à l'utilisation" ; elles peuvent aussi être faites "en valeur", pourvu que les valorisations correspondantes soient bien distinguées des prix en tant que variables du modèle.

On souligne que le caractère plus ou moins intrinsèque de l'appareil de quantification repose sur ces considérations globales et non sur le fait que les unités retenues (qui ne sont de toute façon définies qu'à un facteur près) soient "physiques".

En ce qui concerne la nomenclature d'opérations, l'agrégation "en valeur courante" peut ne pas convenir pour certains titres (or et devises par exemple) ; l'agrégation "en volume" pose alors des problèmes analogues à ceux des nomenclatures techniques.

Sans chercher à rentrer ici dans le dédale des problèmes redoutables que posent les procédures d'agrégation quantitative ([32], §6.2), on mentionne à leur sujet la démarche suivante à deux étapes.

On remarque d'abord que l'appareil de quantification est d'autant moins

contestable que les nomenclatures en cause sont plus détaillées : quand un regroupement ou une équivalence pose problème, il y a toujours moyen de clarifier la situation en "désagrégeant". D'où les deux étages : d'abord une agrégation primaire fournissant un micro-descriptif Desf suffisamment détaillé pour que sa justification soit claire, même si ses dimensions (voir ci-après) excèdent les possibilités de calcul ; ensuite une agrégation secondaire partant du micro-descriptif Desf pour aboutir au descriptif opérationnel Desf, cette seconde agrégation étant susceptible d'être mieux contrôlée puisque, contrairement à la précédente, son point de départ, Desf, est explicite.

Pour cette agrégation secondaire, le problème est ouvert de trouver un algorithme de résolution fournissant l'appareil de quantification de Desf à partir, d'une part de celui de Desf, d'autre part de conditions convenables portant sur Desf (ordres de grandeur des dimensions, zones de spécialisation, etc ; [32], alinéas 6.2.c,d). Ce problème est une extension de celui de l'agrégation en programmation linéaire, pour lequel il ne semble exister que peu de résultats généraux ([73], alinéa 2.2, [49], [32], alinéa 6.2.d).

Voici, pour fixer les idées, des ordres de grandeurs concernant les dimensions, i.e. les nombres d'éléments, n_x , des diverses nomenclatures. La représentation assez détaillée d'un ensemble de type local (alinéa 8.b) est possible avec n_I et n_J de l'ordre de 100, n_S et n_L de l'ordre de 10 ([32a]). Par contre, pour un ensemble de type national, ces dimensions ne semblent devoir permettre qu'une maquette illustrative, d'ailleurs déjà possible avec n_I et n_J plus petits ([32b]) : une représentation réaliste réclamerait alors plutôt n_I et n_J de plusieurs centaines, n_S et n_L de plusieurs dizaines. Par ailleurs, n_J peut être nettement plus grand que n_I [point(1) de l'alinéa 8.d], n_{Jp} peut ne valoir qu'une fraction de n_J et n_H valoir 2 à 3 fois n_{Jp} , n_E peut aller de quelques pour cent à cent pour cent de $n_I \times n_S \times n_S$.

En ce qui concerne les sources d'informations techniques, trois approches sont possibles pour la détermination des coefficients techniques (laquelle est étroitement liée à l'agrégation quantitative) : l'approche "par les traités techniques", l'approche "à dire d'experts", l'approche "par les statistiques" (ou économétrique).

Les deux premières approches, plus strictement techniques, sont plus conformes que la troisième à la recherche d'une représentation compréhensive de la base physique ; de plus elles sont les seules utilisables pour les évaluations concernant les techniques à venir.

La troisième approche présente évidemment l'inconvénient de ne fournir que des moyennes aveugles, difficiles à intégrer dans la démarche compréhensive. Il faut y distinguer le cas des statistiques physiques de celui des statistiques en valeur de la comptabilité nationale. Les premières sont une source d'informations complémentaires parfois précieuses, spécialement en ce qui concerne les services et les comportements de consommation finale. Les secondes peuvent fournir des cadres de calage global (par exemple sur un tableau de Leontief ; alinéas 11.e et 12.b). Par ailleurs, tirer de la comptabilité nationale un jeu de données techniques (dans l'acception donnée ici à ce mot qui n'est pas celle des modèles économétriques) est un exercice tentant (et qui a été tenté ; [32a]) mais qui est délicat à intégrer dans une démarche de prospective libre.

A terme, le développement des applications du modèle à des ensembles humains variés devrait conduire à la constitution de base de données rassemblant, dans les cadres du formalisme introduit et avec un système unifié de conventions d'agrégation, des jeux de données type, pour des types divers de descriptifs (locaux, régionaux, nationaux, plus ou moins spécialisés, etc). Ces constituants déjà organisés permettraient d'aborder les applications avec un minimum de travail consistant à adapter les données type aux situations particulières visées.

d) Modalités techniques. Les points (1) à (6) ci-après complètent les généralités sur les nomenclatures et coefficients techniques données aux alinéas 2.a,b et 4.b.

(1) Biens et activités. On souligne d'abord que, au delà de leur interdépendance, les nomenclatures de biens et d'activités ont chacune leur individualité et, en général, ne sont pas identifiables de façon canonique par une correspondance biunivoque (en particulier elles n'ont qu'exceptionnellement le même nombre d'éléments). Cela tient aux productions jointes (plusieurs biens produits par une même activité) et aux redondances d'activités (plusieurs activités produisant le même bien).

Cette distinction, dans la ligne du modèle de Von Neumann-Sraffa ([108], [116]) et des modèles de programmation quantitative utilisés dans la planification sectorielle ([79], [87], [45]), est un facteur important de la souplesse requise pour la prospective libre (alinéa 1.a) ; elle s'oppose à l'identification de I et J sur laquelle reposent les modèles économétriques ([90], [91], [19], [3], [51]) et qui est un facteur de leur rigidité.

(2) Ressources. Chaque ressource (i.e. classe de ressources agrégées) prise en compte définit un bien i_r . Ce bien est consommé de façon standard par les activités concernées au prorata des coefficients techniques correspondants ; par exemple, dans le cas d'une ressource en sol, les consommations peuvent n'être qu'en maintenance [donc le seul fait des parc $j \in J_p$ via les coefficients $C_p(i_r, j)$], sauf pour les activités agricoles.

Dans le cas d'une ressource renouvelable (sol, eau, etc), on peut traiter les apports du bien i_r par des dotations $A'(t, s, i_r)$ (alinéa 5.a), mais il est plus commode d'introduire un parc de ressource j_r qui produit i_r en fonctionnement [i.e. avec $C_f(i_r, j_r) > 0$ et $C_p(i_r, j_r) = 0$]. Un tel parc de ressource (par exemple de sol) peut donner lieu à transformations (par exemple à défrichage pour un parc de forêt).

Dans le cas d'une ressource non renouvelable, on peut traiter les apports du bien i_r en introduisant une capacité de stockage $k_r = (j', j, j'')$ du bien i_r pour laquelle on a $C_f(i_r, j') = 0$ (i.e. sans stockage possible ; alinéa 4.b).

(3) Parcs. Chaque classe d'équipements prise en compte définit un parc $j \in J_p$. Si les équipements en cause sont spécifiques de l'activité j (i.e. ne peuvent être utilisés que par elle), le parc j est dit spécifique. Si, par contre, les utilisations potentielles des équipements en cause sont multiples, le parc j est dit polyvalent ; le lien de ce parc avec ses utilisations potentielles est alors assuré par la circulation d'un bien d'usage i_j qui est produit par l'activité j en fonctionnement [i.e. avec $C_f(i_j, j) > 0$] et consommé selon l'usage des équipements via des coefficients de types C_f, C_p, C_u, C_z . Un parc polyvalent peut ainsi être associé à plusieurs activités sans parc. Un parc de ressource [point (2)] est aussi formellement un parc polyvalent, le bien d'usage correspondant étant la ressource considérée.

La maintenance et les transformations des parcs entraînent la consommation (via les coefficients techniques de types C_p et C_u) de certains biens d'équipement qui figurent de façon standard dans la nomenclature de biens.

Les parcs d'animaux (chevaux, bétail, etc) doivent inclure en maintenance (et non en fonctionnement) les consommations d'entretien courant et les productions non contingentes. Pour le bétail, tous les coefficients de fonctionnements peuvent ainsi être nuls.

(4) Services. L'élaboration des nomenclatures techniques de base par l'introduction de biens représentant des services et d'activités produisant ces services est une méthode puissante pour systématiser et simplifier la représentation des circulations, tout en restreignant le nombre de coefficients techniques spécifiques (en particulier des coefficients techniques d'échanges).

Outre les biens d'usage qui en constituent des exemples importants [point (3) ci-dessus], les services peuvent être très divers : soins, savoirs, études, communications, transports, distribution, organisation privée ou publique, entretiens (de matériels, de locaux, du territoire), etc.

La quantification des services pose des problèmes délicats : mesures en termes de durées qui correspondent à du travail (savoirs, soins, organisation), en termes d'énergie (services de transport), en termes des équipements utilisés (biens d'usage).

(5) Travail et consommations finales. Le point de départ est l'introduction, d'une part de biens représentant les divers types de travail pris en compte, d'autre part d'activités, dites d'entretien de la population, susceptibles de fournir ces biens. Pour une telle activité j_* , le module représente un type de groupe humain (hameau, village, quartier urbain, agrégat plus inhomogène, etc) ; ce module est spécifié (alinéa 2.a), en compréhension par l'effectif et les caractéristiques de sa population ainsi que par les équipements domestiques en cause, en extension par ses coefficients techniques qui définissent les consommations d'entretien du groupe considéré (coefficients <0) ainsi que l'offre concomitante des divers types de travail (coefficients >0). L'effectif de la population j_* est alors par exemple, à la période t dans le secteur s , proportionnel à la valeur de la variable $X_f(t, s, j_*)$.

Ces consommations d'entretien peuvent être entendues en un sens plus ou moins strict, incluant plus ou moins de vie culturelle ou ... de "part maudite" ([6]) : elles expriment, via des coefficients techniques, une hypothèse concernant les besoins de strict entretien (de la force de travail) du groupe considéré. On souligne que cette hypothèse physique concernant les besoins n'est pas à confondre avec le comportement de consommation finale du groupe, lequel peut être pris en compte, indépendamment et en termes de prix, par une fonction de demande (alinéas 10.b et 11.d).

(6) Analyses intrapériodes. Les productions ou consommations des divers biens peuvent, à l'intérieur des périodes élémentaires, donner lieu à des modulations (horaires, journalières, saisonnières, etc) ou à des décalages temporels réclamant stockages. On peut représenter ces inhomogénéités en procédant à une désagrégation temporelle de chaque bien concerné en autant de postes distincts qu'il y a de sous-périodes (en général imbriquées) à prendre en compte et en introduisant éventuellement des activités de stockage transformant ces biens désagrégés les uns dans les autres.

On peut ainsi, par exemple, prendre en compte le passage des pointes relatif à des biens divers (travail, transports, électricité, etc).

e) Modalités sectorielles. Au delà de l'interprétation générale des secteurs, en termes organisationnels, comme pôles d'échanges et (pour les secteurs intérieurs) sous-systèmes actifs (alinéas 2.a,b, 3.a, 4.b, 5.c), une grande variété d'utilisations du formalisme sectoriel introduit est possible, tant en ce qui concerne la combinatoire physique des échanges que l'aspect comptable, monétaire et financier. On examine schématiquement ci-après, d'une part le traitement de la localisation des activités, d'autre part celui des circulations commerciales, enfin le cas minimal de la consolidation.

(1) Localisation des activités. Afin de prendre en compte l'étendue du territoire considéré par une élaboration convenable de la nomenclature de secteurs, on peut conjuguer l'acception organisationnelle, générale, des secteurs avec une acception territoriale via des hypothèses de localisation.

Pour cela, le territoire est décomposé en zones et la nomenclature de secteurs est élaborée de telle sorte que chaque secteur concerné (par la localisation) est associé à, localisé sur, une zone précise. En interdisant à certaines activités certains secteurs, via des contraintes circonstanciennes convenables,

on stipule ainsi une localisation des activités. De plus, les consommations de transport des biens entre les zones peuvent alors être pris en compte via les coefficients techniques de transferts (coefficients de type Cz ; alinéa 4.b), la circulation de services convenables [point (4) de l'alinéa 8.d] et les limitations dues à la nomenclature d'échanges E.

Par contre, les transports intrazonales échappent à ce traitement et doivent être pris en compte en affectant aux diverses activités ou transformations concernées des consommations de services convenables [point (4) de l'alinéa 8.d] via les divers coefficients techniques (coefficients de types Cf, Cp, Cu) et en fonction des caractéristiques de la zone.

(2) Circulations commerciales. Voici un schéma de traitement des aspects commerciaux de la distribution : on introduit d'abord, dans les nomenclatures I, J, Sn respectivement, un bien "service de distribution" i_d et un sous-ensemble I_d dont les éléments représentent les biens qui donnent lieu au commerce en cause, une activité j_d produisant le service i_d , un secteur "distribution" s_d ; la nomenclature d'échanges E est ensuite élaborée pour spécifier que les biens $i \in I_d$ doivent transiter par le secteur s_d , i.e. ne peuvent être transférés que d'un secteur $s \neq s_d$ à s_d ou de s_d à un secteur $s \neq s_d$; on suppose enfin que le service i_d n'est consommé (via des coefficients techniques de type Cz convenables) que par les échanges de la forme (i, s_d, s) avec $i \in I_d$ et que les consommations en sont imputées au seul secteur s_d [i.e. que $Cz(s, i_d, e) = 0$ si $s \neq s_d$].

Dans ces conditions, pour chaque bien $i \in I_d$, la variable $Pr(t, e)$ représente, relativement au circuit commercial en cause, un prix de gros ou un prix de détail selon que l'échange e est de la forme (i, s, s_d) [achat par s_d] ou de la forme (i, s_d, s) [vente par s_d] ; de plus, les quantités $Cf(i, j_d) \times f(t, s_d, j_d)$ représentent les consommations totales dues à la distribution dans le circuit commercial en cause.

Ce schéma peut donner lieu à des variantes diverses, en particulier comportant plusieurs services de distribution ; pour s'intégrer dans une réalisation, il est à compléter par des contraintes circonstancielle et spéciales convenables (par exemple contraintes répercutant les coûts de distribution sur les prix de détail).

Un schéma analogue, mais où i_d , j_d , s_d seraient remplacés respectivement par un bien "travail", une activité "entretien de la population", un secteur "ménages", peut servir de point de départ au traitement du comportement de consommation finale d'un groupe de population [point (5) de l'alinéa 8.d et alinéas 10.a, b].

(3) Consolidation. A l'opposé des exemples précédents d'élaboration sectorielle, il peut être utile de simplifier au maximum la nomenclature de secteurs intérieurs en la réduisant à un seul poste ; le descriptif fondamental est alors dit consolidé. De tels descriptifs interviennent naturellement pour les études préliminaires principalement axées sur l'analyse du système productif et des échanges extérieurs (alinéa 9.e) ; ou encore comme "référence physique" dans les études du poids d'une organisation multisectorielles (alinéa 9.d).

On souligne à ce propos que la relative indépendance entre les nomenclatures techniques et les nomenclatures sectorielles (alinéa 8.b) rend possible de mettre plusieurs organisations sectorielles sur une même base technique, ce qui permet des comparaisons d'organisations (alinéas 9.c, d).

§ 9 - SCHEMAS D'UTILISATION

On présente ici divers schémas d'utilisation potentielle du modèle dans le contexte, essentiel à la prospective libre, des réalisations sous-déterminées. Ces schémas sont centrés sur deux thèmes : l'analyse multicritère et les études de variabilité (alinéas 9.a à 9.c) ; le rôle des prix et le couplage-découplage entre physique et monétaire (alinéas 9.d et 9.e). Ces schémas seront illustrés et complétés par les exemples traités aux paragraphes 10 à 12.

a) Analyses multicritère. Les objectifs du modèle (alinéa 1.a) se traduisent naturellement par les deux caractéristiques suivantes des études exploratoires : d'une part les réalisations concernées sont sous-déterminées ; d'autre part une même étude peut réclamer l'utilisation de plusieurs réalisations différant notablement les unes des autres tant qualitativement que quantitativement.

Ainsi les études exploratoires typiques du modèle vont réclamer deux types d'approches : d'une part des études de multiplicité pour analyser l'extension de chacune des réalisations en cause ; d'autre part des études de variabilité pour comparer les extensions de diverses réalisations.

Une étude de multiplicité concerne, pour une réalisation sous-déterminée Res, l'analyse de l'ensemble Ext(Res), de son étendue et de sa structure. Une approche pratique d'une telle étude consiste à délimiter l'ensemble Ext(Res) par la détermination, la comparaison et la classification de certains de ses éléments typiques.

Une étude de variabilité concerne la variation de l'extension, via celle de ses éléments typiques dégagés par les études de multiplicité, en fonction, soit de certaines composantes du jeu de données (variations numériques), soit de certains composants qualitatifs de la structure (nomenclatures, descriptif circonstanciel ou spécial ; variations structurelles).

Pour ces deux types d'études, l'analyse multicritère fournit un instrument pratique important : elle consiste à prendre comme éléments typiques de l'extension Ext(Res) les cheminements (resp. les régimes dans le cas statique) optimaux $X(\text{Res}, C)$ correspondant à des critères C variés (alinéa 7.d). Ainsi, une étude de multiplicité pour la réalisation Res de descriptif Des réclame de comparer les termes $X(\text{Res}, C)$ pour divers critères $C \in \text{Cri}(\text{Des})$, tandis qu'une étude de variabilité réclame de comparer les termes $X(\text{Res}, C)$ pour diverses réalisations Res, mais pour un même critère C.

Dans les deux cas, il s'agit de comparer des cheminements (resp. des régimes dans le cas statique). Pour cela, on utilise de façon standard des indicateurs qui sont, comme les critères (alinéa 7.d), des fonctions numériques des variables : la comparaison des cheminements X_1 et X_2 s'appuie, pour chaque indicateur Q, sur celle des nombres $Q(X_1)$ et $Q(X_2)$.

En fait, critères et indicateurs, sont souvent interchangeables dans l'analyse multicritère : C_3 peut servir d'indicateur pour comparer $X(\text{Res}, C_1)$ avec $X(\text{Res}, C_2)$, C_1 pour comparer $X(\text{Res}, C_2)$ avec $X(\text{Res}, C_3)$, C_2 pour comparer $X(\text{Res}, C_1)$ avec $X(\text{Res}, C_3)$, etc. Cependant, cette interchangeabilité n'est pas totale : certaines fonctions des variables sont plus indiquées comme critères, d'autres comme indicateurs, cela en particulier pour des raisons de calcul dans la résolution du problème (7.9).

Dans l'analyse multicritère, la diversité des critères (et des indicateurs) joue un rôle important : on s'intéresse en priorité aux critères, dits intrinsèques, qui peuvent être interprétés comme représentant une tendance concrète, un comportement du système modélisé (et pas seulement un choix de l'opérateur du modèle !) ; le critère fait alors partie de la représentation du système, au même titre que le jeu de données et en complétant ce dernier.

On souligne la différence entre cette démarche et, soit l'optimisation normative ([79], [80], chap. 3), soit la théorie des préférences ([37], chap. 4, [100], chap. II), qui reposent sur l'utilisation, soit d'un seul critère, soit d'un seul indicateur, modulés (la "fonction d'utilité").

b) Critères. On explicite ici quelques types de critères intrinsèques, en cherchant à illustrer la diversité des formes possibles. Tous ces critères sont situés, du point de vue de leur signe, par rapport au problème de minimisation (7.9). Bien que présentées ici comme critères, les fonctions correspondantes peuvent en général aussi être utilisées comme indicateurs (alinéa 9.a).

On cite d'abord les critères élémentaires qui correspondent à l'optimisation d'une seule variable, V_a :

$$(9.1) \quad C(X) = bV_a \quad \text{avec } b = +1 \quad \text{ou} \quad b = -1 ;$$

par exemple, $b = -1$ et $V_a = Xf(t,s,j_m)$, où j_m est une activité d'entretien de la population (alinéa 8.-), permet de maximiser la population (du type défini par j_m) dans le secteur s pendant la période t ; $b = -1$ et $V_a = Xp(t,s,j)$ de maximiser les équipements du parc $j \in J_p$; $b = +1$ et $V_a = Xz(t,e)$, avec $e = (i,s',s'')$, de minimiser les transferts de bien i du secteur s' au secteur s'' pendant la période t .

Puis les critères correspondant à la minimisation de la consommation d'un bien i (par exemple travail ou ressource), soit dans un secteur, soit (par exemple) dans le système complet, pendant une période :

$$(9.2) \quad C(X) = Yb^-(t,s,i) \quad \text{ou} \quad C(X) = \sum_{s \in S_n} Yb^-(t,s,i),$$

en définissant $Yb^-(t,s,i)$ par une relation analogue à (4.3) qui définit $Yb(t,s,i)$ mais où, dans chaque somme au second membre, les termes > 0 sont supprimés et les termes < 0 remplacés par leurs valeurs absolues ; on expliciterait de façon analogue, les critères correspondant à la minimisation de la production d'un déchet i , en remplaçant $Yb^-(t,s,i)$ par $Yb^+(t,s,i)$. On peut aussi, aux seconds membres de (9.2), normaliser en divisant par le niveau d'une activité de référence (par exemple activité d'entretien de la population ; alinéa 8.d) pour obtenir (spécialement comme indicateurs) des ratios.

Les critères correspondant à la maximisation d'un solde commercial pour un secteur ou pour le système complet :

$$(9.3) \quad C(X) = Z_d(t,s) - Z_r(t,s) \quad \text{ou} \quad C(X) = \sum_{s \in S_n} [Z_d(t,s) - Z_r(t,s)].$$

Enfin les critères correspondant à la minimisation du montant total des transferts relatifs, par exemple, à une opération l pendant la période t :

$$(9.4) \quad C(X) = \sum_{s \in S} [D(t,l,s) + R(t,l,s)],$$

en notant que la sommation peut être sur S dans (9.4), alors que dans (9.3)

elle ne peut être que sur S_n ou sur un de ses sous ensembles, puisque la somme sur S est nulle d'après (4.13).

Les critères (9.1) et (9.2) sont linéaires, mais pas les critères (9.3) et (9.4), sauf si les prix et les cours sont exogènes. On note que tous ces critères sont explicités en fonction des données de base. D'autres critères peuvent être modulés en fonction de données supplémentaires, par exemple :

$$(9.5) \quad C(X) = \sum_{i \in I} a(i) Y_b^-(t, s, i),$$

où les coefficients $a(i)$ ($i \in I$) donnés expriment une valorisation relative des divers biens ; ou encore (ici uniquement comme critère),

$$(9.6) \quad C(X) = C_1(X) + a C_2(X),$$

où C_1 (critère principal) et C_2 (critère auxiliaire) sont explicités et où a est un paramètre de modulation. Dans les relations (9.1) à (9.5), la période t en cause est généralement la période finale $t = t_1$ dans l'utilisation comme critère (alinéas 12.c,d), mais quelconque dans celle comme indicateur ; dans (9.2) et (9.3) à (9.5), on peut aussi sommer sur $t \in T$.

On souligne que l'utilisation d'un critère pour une détermination [problème (7.9)] n'est souvent raisonnable que conjuguée avec certaines contraintes circonstancielles ou spéciales. De telles contraintes peuvent être nécessaires pour empêcher que la solution soit aberrante. Par exemple, pour éliminer la solution nulle, un critère du type (9.2) réclame que la population soit exogène ; ou un critère du type (9.4) que les prix soient soumis à une normalisation. D'autres critères s'expriment en termes de variables spéciales et n'ont de signification que par rapport à certaines contraintes spéciales ; il en est ainsi par exemple, dans le contexte de la contrainte (6.9), du critère,

$$(9.7) \quad C(X) = -c'(s, j).$$

Par ailleurs, l'analyse multicritère n'est évidemment pas la seule démarche utilisable pour les études de multiplicité : des cheminements (ou des régimes) peuvent être obtenus par des combinaisons convenables (par exemple barycentriques dans le cas linéaire) de cheminements (ou de régimes) optimaux ; ou encore (pour ce qui est des cheminements) par simulation dynamique (alinéa 12.d).

c) Variations de réalisations. On dégage ici quelques types de variations pouvant affecter une réalisation dans les études de variabilité.

Considérant une réalisation Res définie par (7.7) et (7.4) (alinéa 7.c), on distingue d'abord : d'une part les variations numériques qui ne concernent que le jeu de données, le descriptif Des étant invariant ; d'autre part les variations structurelles qui concernent principalement le descriptif, le jeu de données étant invariant, dans la mesure de son adaptation à la variation du descriptif.

Les variations numériques peuvent être classées selon la composante du jeu de données qui varie : variation de type technique concernant B_0 , de type circonstanciel concernant B_1 , de type spécial concernant B_2 . De même, les variations structurelles peuvent être classées selon le descriptif qui varie : variation du descriptif fondamental Des_f , du descriptif circonstanciel Des_c , du descriptif spécial Des_p .

Les variations numériques de type technique (variations de coefficients techniques) ou de type spécial (par exemple variations de taux d'intérêt ou de taxation) interviennent dans les études de sensibilité : elles sont en général (mais pas toujours) de faible amplitude. Par contre les variations circonstancielles, tant numériques que structurelles, sont souvent plus tranchées.

Un cas important de variation structurelle est constitué par le passage d'une réalisation à une réalisation dérivée, passage dans lequel le descriptif fondamental est invariant (alinéa 7.c). Dans ce sens, une situation favorable pour comparer deux réalisations Res1 et Res2 ayant le même descriptif fondamental, est celle où on peut les considérer comme dérivées d'une même réalisation Res0 ; par exemple, Res1 peut dériver de Res0 en rendant exogène certaines variables, Res2 en imposant des contraintes spéciales concernant ces variables, etc. Cette démarche est illustrée aux paragraphes 10 à 12.

Parmi les variations structurelles concernant le descriptif fondamental, on distingue : d'une part celles, dites de type organisationnel, qui ne concernent que les nomenclatures S, Sn, E, L, Lf, Gd, Gr, Fp, Fm, les nomenclatures techniques I, J, Jp, H, K étant (pour l'essentiel) invariantes, d'autre part celles, dites de type technique, qui concernent principalement les nomenclatures techniques I, J, Jp, H, K. Les premières permettent de laisser invariant le jeu de données techniques, tandis que les secondes réclament une modification de ce jeu qui relève d'une procédure d'agrégation ou de désagrégation (alinéa 8.c).

d) Poids de l'organisation. Un schéma important d'utilisation du modèle, reposant sur des variations structurelles, concerne l'évaluation du poids de l'organisation multisectorielle conformément à la problématique suivante :

- on suppose donnés, d'une part une réalisation Res dont le descriptif Des est tel que Sn n'est pas réduit à un seul élément, d'autre part un critère $C \in \text{Cri}(\text{Res})$ qui est fonction du seul bloc physique Vq ;

- on cherche, d'une part une réalisation Res (de descriptif Des) comportant les mêmes composantes physiques que Res (en particulier les mêmes nomenclatures et coefficients techniques), d'autre part un critère $C \in \text{Cri}(\text{Des})$ projetant C dans Des, cela de telle sorte que le cheminement optimal $X(\text{Res}, C)$ représente ce que pourrait être un "optimum purement physique" dans le contexte défini par la réalisation Res et le critère C ;

- le concept d'"optimum purement physique" est précisé en supposant que la réalisation Res comporte toutes les contraintes de Res sauf, d'une part les contraintes d'équilibre des secteurs intérieurs (contraintes de type q0), d'autre part (éventuellement) certaines contraintes spéciales de comportements des secteurs intérieurs s'exprimant en termes monétaires et financiers.

Cela étant, la comparaison des termes $X(\text{Res}, C)$ et $X(\text{Res}, C)$ fournit une mesure (éventuellement via l'utilisation de plusieurs indicateurs) du poids de l'organisation multisectorielle et des comportements dans le contexte défini par la réalisation Res et le critère C.

Une première méthode, assez générale, pour aborder ce problème consiste à procéder par desserrage des contraintes de type q0 au moyen de transferts convenables : dans ce sens, la réalisation Res est déduite de Res en adjoignant à Sn un poste s_a (représentant le bureau des transferts), à Lr un poste l_a (représentant l'opération de répartition correspondante), à Gd et à Gr les couples (l_a, s) ($s \in \text{Sn}$) ; les transferts en cause peuvent alors avoir lieu puisque les variables $D_b(t, l_a, s)$ et $R(t, l_a, s)$ ($s \in \text{Sn}$) (qui en représentent les montants) sont libres de toute contrainte et on peut prendre $C = C$.

Dans cette démarche, des précautions sont évidemment à prendre pour éviter que l'optimum $X(\underline{Res}, \underline{C})$ ne soit aberrant (par exemple si Res comporte une fonction de demande). Par ailleurs, si les nomenclatures S_n, L_r, G_d, G_r de la réalisation Res comportent déjà les postes nécessaires aux transferts, Res peut être obtenu simplement en supprimant les contraintes (circonstanciennes ou spéciales) portant sur les variables $Db(t, l_a, s)$ et $R(t, l_a, s)$ ($s \in S_n$).

Les prix intérieurs peuvent être éventuellement quelconques à cause du desserrage des contraintes de type q_0 ; cependant, rétablissant ces contraintes une fois obtenu l'optimum physique, on peut aussi chercher à déterminer des prix d'équilibre adaptés à cet optimum (alinéa 9.e).

Une seconde méthode, plus particulière, peut convenir dans les cas où, les secteurs intérieurs ayant seulement une interprétation organisationnelle (alinéa 8.e), les coefficients techniques d'échanges sont négligées ou répartis sur les autres coefficients : supposant aussi que le critère C est global [par exemple du type de la seconde relation (9.2)], on peut procéder par consolidation des secteurs intérieurs (alinéa 8.e), i.e. prendre pour Res une réalisation comportant les mêmes nomenclatures et coefficients techniques que Res, mais n'ayant qu'un seul secteur intérieur, les nomenclatures d'échanges, d'opérations et d'imputations, ainsi que les données circonstanciennes, étant consolidées en conséquence.

Prenant alors pour \underline{C} la projection naturelle de C (supposé global) sur $Cri(\underline{Des})$, le cheminement $X(\underline{Res}, \underline{C})$ constitue une version consolidée de l'optimum physique cherché. L'étude de cette réalisation Res est un préliminaire "purement physique" qui est souvent utile pour les études de la réalisation multisectorielle Res de départ (alinéa 12.a).

e) Statut des prix. On présente ici une approche schématique de la question du couplage (ou du découplage) entre variables physiques et variables monétaires ([43], introduction) que permet l'appareil formel introduit dans le contexte des réalisations sous-déterminées. Cette approche repose sur la complémentarité entre la détermination du bloc des variables physiques à prix exogènes et la détermination de prix "adaptés" à un bloc des variables physiques exogène ; elle fournit des schémas d'analyse multicritère liés au calcul des prix. On désigne ici par Res une réalisation sous-déterminée.

Se référant à la décomposition du multiplet des variables de base en blocs (alinéas 7.b et 7.c), on peut écrire le problème d'optimisation (7.9) sous la forme :

$$(9.8) \quad \text{trouver } \underline{V}_q \in Blq(Res), \underline{V}_p \in Blp(Res), \underline{V}_{cs} \in Blcs(Res) \text{ tels que,} \\ (\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) \in Ext(Res) \text{ et } C(\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) = \text{Min } C(\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}). \\ (\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) \in Ext(Res)$$

On associe à ce problème les deux problèmes partiels suivants qui sont couramment linéaires (alinéa 7.d) ; les notations sont celles de l'alinéa 7.c. D'abord le problème physique, où on suppose donné $\underline{V}_p \in Blp(Res)$:

$$(9.9) \quad \text{trouver } \underline{V}_q \in Blq(Res) \text{ et } \underline{V}_{cs} \in Blcs(Res) \text{ tels que,} \\ (\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) \in Ext(Res) \text{ et } C(\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) = \text{Min } C(\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) ; \\ (\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) \in Ext(Res)$$

ou, de façon équivalente,

$$(9.10) \quad \text{trouver } \underline{X} \in Ext(Res(\underline{V}_p)) \text{ tel que } C(\underline{X}) = \text{Min } C(\underline{X}). \\ \underline{X} \in Ext(Res(\underline{V}_p))$$

Ensuite le problème de prix, où on suppose donné $\underline{V}_q \in \text{Blq}(\text{Res})$:

(9.11) trouver $\underline{V}_p \in \text{Blq}(\text{Res})$ et $\underline{V}_{cs} \in \text{Blcs}(\text{Res})$ tels que,

$$(\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) \in \text{Ext}(\text{Res}) \text{ et } C(\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) = \text{Min}_{(\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) \in \text{Ext}(\text{Res})} C(\underline{V}_q, \underline{V}_p, \underline{V}_{cs}) ;$$

ou, de façon équivalente,

(9.12) trouver $\underline{X} \in \text{Ext}(\text{Res}(\underline{V}_q))$ tel que $C(\underline{X}) = \text{Min}_{\underline{X} \in \text{Ext}(\text{Res}(\underline{V}_q))} C(\underline{X})$.

Le problème (9.8) [ou (7.9)] correspond à la détermination conjointe du bloc physique et du bloc de prix ; la solution représente ainsi un équilibre général, relatif au critère C, dans le contexte de la réalisation sous-déterminée Res.

Le problème (9.9) [ou (9.10)] correspond à la détermination du bloc physique, le bloc de prix étant exogène [forme (9.10)]. Ce type de détermination intervient naturellement dans les études préliminaires axées sur l'analyse du système productif et des échanges extérieurs, études où la représentation de l'organisation économique intérieure est simplifiée au maximum (par exemple avec un seul secteur intérieur, auquel cas il n'y a que des prix extérieurs ; alinéas 3.b et 6.a) ; il intervient aussi dans l'étude du poids de l'organisation multisectorielle pour des ensembles économiques non protégés, où les prix intérieurs sont imposés par l'extérieur (alinéa 9.d).

Le problème (9.11) [ou (9.12)] correspond à la détermination du bloc de prix, le bloc physique étant exogène [forme (9.12)]. Une telle détermination peut être rapprochée de la recherche, par exemple dans le cas statique qui est le plus indiqué ici, d'un système de prix "adapté" à un régime (bloc) physique déterminé antérieurement. Un critère du type (9.4), correspondant à la minimisation des transferts compensatoires entre secteurs, peut alors convenir.

La détermination antérieure du bloc physique peut s'inscrire dans divers contextes. Elle peut résulter d'une étude indépendante axées sur la base physique, par exemple dans laquelle les contraintes d'équilibre comptable sont desserrées par des transferts convenables (alinéa 9.d). Mais elle peut aussi intervenir dans un processus itératif de résolution du problème complet (9.8) (voir ci-après).

On note le rôle à part que joue le bloc V_{cs} dans les problèmes (9.9) et (9.11) : ici toujours endogène (au moins partiellement), ce bloc se cale sur le bloc exogène pour satisfaire aux contraintes comptables et éventuellement aux contraintes spéciales.

On note aussi que les réalisations $\text{Res}(V_q)$ et $\text{Res}(V_p)$ sont linéaires si les cours sont exogènes et si, par exemple, la structure spéciale est linéaire ; les problèmes (9.9) et (9.11) relèvent alors de la programmation linéaire (alinéa 7.d) si le critère C est aussi linéaire, ce qui est fréquent (alinéa 9.b).

Dans certains cas, le problème complet (9.8) peut être résolu, au moins approximativement, par un processus itératif où les deux types de déterminations sont alternées. On remarque à ce sujet que chaque stade de l'itération fournit un cheminement (resp. un régime dans le cas statique) compatible qui peut être significatif, même s'il n'est pas très proche de l'optimum. Par ailleurs, lorsque, par exemple, le critère C ne dépend que du bloc physique V_q , les déterminations de prix (9.11) réclament un autre critère dépendant du couple (V_p, V_{cs}) [par exemple du type (9.4)] ; un choix intrinsèque de cet autre critère permet de compléter la tendance exprimée par le critère principal [forme (9.6) ; alinéa 9.b].

§ 10 - UN EXEMPLE STATIQUE

On explicite ici une structure statique simple (alinéas 10.a,b) afin d'illustrer formellement l'articulation des diverses contraintes ainsi que le maniement des réalisations et des déterminations via l'analyse multicritère (alinéas 10.c,d). Sur cet exemple, on envisage aussi les liens du formalisme proposé avec ceux du modèle de Von Neumann-Sraffa (alinéa 10.e) et du modèle de Walras-Debreu (alinéa 10.f) ; le lien avec la problématique des modèles à production simple est par ailleurs explicité au paragraphe 11.

a) Elements de base. Ignorant les effets d'échelle, les transformations, les opérations de financement et les échanges extérieurs, la structure de base envisagée ne dépend que des nomenclatures I, J, Jp, Sn, E, Lr, Gd, Gr (de biens, d'activités, de parcs, de secteurs intérieurs, d'échanges, d'opérations et d'imputations de répartition). Ces nomenclatures et le jeu de données techniques, ici réduit aux coefficients de types Cf, Cp, Cz, sont supposées posséder les particularités suivantes :

- les nomenclatures I et J comportent (entre autres) respectivement un poste "travail" i_m et un poste "entretien de la population" j_m qui sont situés par la relation standard que vérifient les coefficients techniques d'offre et de consommations de travail (alinéa 8.d),

$$(10.1) \quad C_f(i_m, j_m) \geq 0 \quad \text{et} \quad C_f(i_m, j) \leq 0 \quad \text{pour} \quad j \in J, \quad j \neq j_m ;$$

- la nomenclature Sn est constituée, d'une part d'un poste s_m , dit secteur final, agrégeant ménages et administrations, d'autre part de postes correspondant aux divers secteurs productifs ;

- la nomenclature Lr est constituée de deux postes l' et l'' correspondant respectivement à des transferts des secteurs productifs vers s_m (dividendes et impôts) et de s_m vers les secteurs productifs (subventions) ; en conséquence, la nomenclature d'imputations Gd [resp. Gr] est constituée des couples (l', s) ($s \neq s_m$) et (l'', s_m) [resp. des couples (l', s_m) et (l'', s) ($s \neq s_m$)] ;

- la nomenclature E vérifie la condition,

$$(10.2) \quad \text{pour } s' \in S_n, s'' \in S_n, (i_m, s', s'') \in E \text{ si et seulement si } s' = s_m,$$

qui complète (10.1) [ainsi que (10.3) ci-après] en exprimant que le bien travail ne peut être transféré que du secteur final vers les autres secteurs ;

- les coefficients techniques de types Cp et Cz sont négligeables.

On suppose donné de plus :

- un sous-ensemble A de $S_n \times J$ représentant la compatibilité entre activités et secteurs en ce sens que l'activité j peut avoir lieu dans le secteur s si et seulement si $(s, j) \in A$; les conditions (10.1) et (10.2) sont complétées à ce sujet par,

$$(10.3) \quad (s_m, j_m) \in A \quad \text{et} \quad (s, j_m) \notin A \quad \text{pour } s \neq s_m ;$$

par un choix convenable de A, on peut exclure certaines activités de certains secteurs, par exemple toute activité autre que j_m de s_m ; des conditions de compatibilité entre A et E doivent être satisfaites [voir ci-après, ce qui concerne la relation (10.17)] ;

- un sous-ensemble B de $S_n \times J_p$ indiquant quels sont les parcs dont les niveaux sont exogènes (par exemple, parcs de ressources).

Ces ensembles A et B sont des composantes du descriptif circonstanciel.

Dans ces conditions, les variables de base sont :

- les niveaux des activités $X_f(s, j)$ ($s \in S_n, j \in J$),
- les niveaux des parcs $X_p(s, j)$ ($s \in S_n, j \in J_p$),
- les niveaux des échanges, $X_z(e)$ ($e \in E$),
- les prix des biens, $Pr(i)$ ($i \in I$),
- les montants $Db(l', s)$ versés par les secteurs $s \neq s_m$ au secteur s_m ,
- le montant $Rb(l', s_m)$ reçu des secteurs $s \neq s_m$ par le secteur s_m ,
- les montants $Rb(l'', s)$ reçus du secteur s_m par les secteurs $s \neq s_m$,
- le montant $Db(l'', s_m)$ versé par le secteur s_m aux autres secteurs,

On souligne que les prix sont supposés ne dépendre que des biens (et pas des secteurs concernés) ; il s'agit d'une condition très forte d'organisation économique qui est mise ici en préalable.

Dans la suite, on note, pour $s \neq s_m$, $Db(s)$ [resp. $Rb(s)$] au lieu de $Db(l', s)$ [resp. $Rb(l'', s)$] et $Db(s_m)$ [resp. $Rb(s_m)$] au lieu de $Db(l'', s_m)$ [resp. $Rb(l', s_m)$].

On définit en outre les variables dérivées $Y'(s, i)$, $Y''(s, i)$ et $Y_b(s, i)$ ($s \in S_n, i \in I$), $Z_d(s)$ et $Z_r(s)$ ($s \in S_n$) par les relations (alinéas 4.a,d),

$$(10.4) \quad Y'(s, i) = \sum_{e \in E_{i, \dots, s}} X_z(e) \quad \text{et} \quad Y''(s, i) = \sum_{s \in E_{i, s, \dots}} X_z(e) \quad (s \in S, i \in I).$$

$$(10.5) \quad Y_b(s, i) = \sum_{j \in J} C_f(i, j) X_f(s, j) + Y'(s, i) - Y''(s, i) \quad (s \in S_n, i \in I),$$

$$(10.6) \quad Z_d(s) = \sum_{i \in I} Pr(i) Y'(s, i) \quad \text{et} \quad Z_r(s) = \sum_{i \in I} Pr(i) Y''(s, i) \quad (s \in S).$$

On note l'absence au second membre de (10.5) des termes faisant intervenir les coefficients techniques de types C_p et C_z qui sont négligés. On note aussi les équations de conservation qui résultent de (10.4) : d'abord,

$$(10.7) \quad \sum_{s \in S_n} Y'(s, i) = \sum_{s \in S_n} Y''(s, i) \quad \text{pour } i \in I, \text{ puis,}$$

$$(10.8) \quad \sum_{s \in S_n} Z_d(s) = \sum_{s \in S_n} Z_r(s).$$

b) Réalisation de base. Les contraintes fondamentales s'écrivent alors :

$$(10.9) \quad Y_b(s, i) \geq 0 \quad \text{pour } s \in S_n, i \in I,$$

$$(10.10) \quad X_f(s, j) \leq X_p(s, j) \quad \text{pour } s \in S_n, j \in J_p,$$

$$(10.11) \quad Z_d(s) + Db(s) = Z_r(s) + Rb(s) \quad \text{pour } s \neq s_m,$$

$$(10.12) \quad Z_d(s_m) + Db(s_m) = Z_r(s_m) + Rb(s_m),$$

$$(10.13) \quad \sum_{s \neq s_m} Db(s) = Rb(s_m),$$

$$(10.14) \quad Db(s_m) = \sum_{s \neq s_m} Rb(s),$$

On note que les contraintes d'équilibre comptable (10.11) à (10.14) ne sont pas indépendantes en ce sens que, par exemple, (10.11), (10.13) et (10.14) jointes à (10.8) entraînent (10.12) (propriété de non indépendances des équations comptables ; [99], §1.c, page 50).

Aux contraintes fondamentales ci-dessus sont adjointes les contraintes circonstancielles suivantes :

$$(10.15) \quad X_f(s, j) = 0 \quad \text{pour } (s, j) \notin A \quad (s \in S_n, j \in J),$$

$$(10.16) \quad X_p(s, j) = \underline{X}_p(s, j) \quad \text{pour } (s, j) \in B,$$

$$(10.17) \quad Y_b(s, i) = 0 \quad \text{pour } s \neq s_m, i \in I.$$

Les relations (10.15) et (10.16) expriment respectivement la compatibilité des niveaux d'activités avec les secteurs et celle des niveaux de parcs avec les niveaux fixés $\underline{X}_p(s, j)$ ($(s, j) \in B$).

Les contraintes de serrage (10.17) expriment que les transferts des divers biens sont ajustés de façon à éviter des excédents pour les secteurs productifs, les excédents éventuels étant ainsi reportés sur le secteur final ; cette normalisation des échanges ne restreint pas la généralité, au moins dès que A et E satisfont des conditions de compatibilité telles que les transferts requis par le fonctionnement du système puissent avoir lieu [par exemple, si E contient tous les échanges (i, s, s_m) ($i \in I, s \neq s_m$)].

On désigne par Res0 la réalisation de base (alinéa 7.b) définie par les éléments introduits ci-dessus, en l'occurrence :

- le descriptif fondamental statique Desf0 correspondant aux nomenclatures I, J, Jp, Sn, E, Lr, Gd, Gr, les autres nomenclatures étant ici ignorées ;
- le jeu de données techniques constitué par le multiplet des coefficients techniques de fonctionnement ($C_f(i, j)$, $i \in I, j \in J$) ;
- le descriptif circonstanciel Desc0 correspondant aux ensembles A et B ;
- le jeu de données circonstancielles constitué par le multiplet des niveaux des parcs fixés $\underline{X}_p(s, j)$ ($(s, j) \in B$).

Cette réalisation Res0 est très sous-déterminée (alinéa 7.c), en particulier en ce qui concerne les variables de types Pr, Db, Rb. On va en considérer ci-après diverses réalisations dérivées (alinéa 7.c) en distinguant celles où les prix sont exogènes (alinéa 10.c) et celles qui donnent lieu à un calcul de prix (alinéa 10.d).

c) Cas des prix exogènes. On commence par rendre les prix exogènes [alinéa 9.e ; problème (9.9)] via les contraintes circonstancielles :

$$(10.18) \quad P_r(i) = \underline{P}_r(i) \quad (i \in I),$$

où les nombres ≥ 0 $\underline{P}_r(i)$ ($i \in I$) représentent des prix fixés. La réalisation Res1 ainsi obtenue est linéaire (alinéa 7.d) ; elle est encore en général très sous-déterminée, tant en ce qui concerne les variables physiques de types Xf et Xp que les variables monétaires de types Db et Rb.

Les études de multiplicité via l'analyse multicritère (alinéa 7.a) concernant cette réalisation peuvent être, par exemple, menées avec l'un ou l'autre des critères physiques suivants [toujours conformément au problème (7.9)] qui font intervenir les hypothèses (10.1) à (10.3) :

- le critère "population maximum",

$$(10.19) \quad C(X) = - X_f(s_m, j_m)$$

- le critère "travail minimum",

$$(10.20) \quad C(X) = \sum_{s \neq s_m} \sum_{j \neq j_m} |C_f(i_m, j)| X_f(s, j),$$

lequel doit être associé à une contrainte supplémentaire de type extensif, par exemple la contrainte circonstancielle rendant exogène le niveau de population,

$$(10.21) \quad Xf(s_m, j_m) = \underline{X}f(s_m, j_m).$$

Ces études de multiplicité peuvent être conjuguées avec des études de variabilité diverses (alinéa 9.c) dont on cite ci-après deux exemples.

On peut d'abord faire varier les parcs, tant qualitativement via l'ensemble B, que quantitativement via les niveaux fixés $Xp(s, j)$ $((s, j) \in B)$, cela entre les deux extrêmes que constituent : d'une part un ensemble B maximum, i.e. identique à $S_n \times J_p$, permettant d'analyser une situation de fait ; d'autre part un ensemble B minimum, i.e. réduit aux parcs de ressources, chaque détermination fournissant alors de façon prospective les niveaux des parcs d'équipements adaptés au régime en cause.

D'autres études de variabilité peuvent concerner le poids de l'organisation multisectorielle (alinéa 9.d) exprimée par les nomenclatures S_n, E, A et par les prix fixés. Pour ces études, il faut introduire des limitations relatives aux montants des transferts $Db(s)$ et $Rb(s)$ $(s \in S_n)$. On peut imposer, par exemple, les contraintes circonstancielles,

$$(10.22) \quad Db(s_m) \leq dbm \quad \text{et} \quad Rb(s_m) \leq rbm,$$

où, en vertu de (10.13) et (10.14), rbm et dbm représentent des bornes supérieures pour les montants des transferts respectivement des secteurs productifs au secteur final et du secteur final aux secteurs productifs : selon l'un ou l'autre des critères physiques envisagés, des valeurs élevées de dbm et rbm permettent d'atteindre l'optimum purement physique (alinéa 9.d), tandis que des valeurs décroissant vers zéro permettent de mesurer le poids croissant de l'organisation via l'analyse des régimes optimum obtenus.

d) Calculs de prix. Pour illustrer le calcul des prix, on considère la réalisation Res_2 , dérivées de Res_0 , qui est définie, d'abord par la contrainte circonstancielle (10.22) jointe à la normalisation du prix du travail,

$$(10.23) \quad Pr(i_m) = 1,$$

tandis que les autres prix $Pr(i)$ $(i \neq i_m)$ sont endogènes, ensuite par les contraintes spéciales (10.24) et (10.25) ci-après :

$$(10.24) \quad \sum_{i \in I} Pr(i) C_f(i, j) Xf(s, j) = vt(s, j) [Z_r(s) - Z_d(s)] + Z_a(s, j) \quad \text{pour } s \neq s_m \text{ et } (s, j) \in A,$$

$$(10.25) \quad Pr(i) Y_b(s_m, i) \geq v(i) Z_d(s_m) \quad \text{pour } i \in I, i \neq i_m.$$

Pour chaque secteur productif $s \neq s_m$, les contraintes (10.24) expriment un comportement de ce secteur concernant la façon dont le solde $Z_r(s) - Z_d(s)$ des échanges commerciaux est réparti, aux ajustements $Z_a(s, j)$ près et selon les coefficients de ventilation $vt(s, j)$, entre les diverses activités du secteur. Les ajustements $Z_a(s, j)$ sont des variables spéciales (de signes quelconques) tandis que les coefficients $vt(s, j)$ sont des données spéciales ≥ 0 vérifiant,

$$(10.26) \quad \sum_{j \in J_A(s)} vt(s, j) = 1 \quad \text{pour } s \neq s_m \text{ tel que } J_A(s) \text{ est non vide,}$$

où $J_A(s)$ désigne l'ensemble des $j \in J$ tels que $(s, j) \in A$. Cette relation de normalisation est à rapprocher de ce que (10.5), (10.17) et (10.24) entraînent,

$$(10.27) \quad \sum_{j \in J_A(s)} Z_a(s, j) = [1 - \sum_{j \in J_A(s)} vt(s, j)] [Z_r(s) - Z_d(s)] \quad \text{pour } s \neq s_m ;$$

ce qui fait que (10.24) et (10.26) entraînent,

$$(10.28) \quad \sum_{j \in J_A(s)} Z_a(s, j) = 0 \quad \text{pour } s \neq s_m,$$

relation qui va justifier le serrage de (10.24) par minimisation des variables d'ajustement [relation (10.29)].

Les contraintes (10.25) expriment un comportement du secteur final pour ce qui est des consommations contingentes, c'est à dire (alinéa 8.d) des consommations (des divers biens $i \neq i_m$) qui s'ajoutent, au prorata des coefficients ≥ 0 $v(i)$ ($i \neq i_m$) qui sont des données spéciales, aux consommations d'entretien représentées par les termes $C_f(i, j_m) X_f(i, j_m)$ comptabilisés dans $Y_b(s_m, i)$.

On note le rôle joué dans cette démarche par le report des excédents sur le secteur final via les contraintes de serrage (10.17). On note aussi que les quantités, $v(i)[Z_d(s_m)/Pr(i)] + |C_f(i, j_m)| X_f(i, j_m)$ ($i \neq i_m$), considérées comme fonctions du vecteur des prix $Pr(i)$ ($i \neq i_m$) et du revenu disponible $Z_d(s_m) = Z_r(s_m) + R_b(s_m) - D_b(s_m)$ [relation (10.12)], définissent une fonction de demande finale analogue à celles utilisées dans les modèles économétriques (fin de l'alinéa 11.b).

Cela étant, conformément à la problématique de l'alinéa 9.e appliquée à la réalisation Res2, on peut s'intéresser aux problèmes (9.8), (9.9) et (9.11), relativement à la réalisation Res2 et à un critère C de la forme,

$$(10.29) \quad C(X) = C'(X) + C''(X) \quad \text{avec} \quad C''(X) = b \sum_{(s, j) \in A} |Z_a(s, j)|,$$

où b est un paramètre ≥ 0 de modulation et où C' est un critère physique [par exemple défini par (10.19) ou par (10.20) sous la contrainte (10.21)].

Lorsque les prix sont exogènes [problème (9.9)], on se trouve dans une situation généralisant celle de la réalisation Res1 (alinéa 10.c).

Pour ce qui est de la détermination d'un système de prix $Pr(i)$ ($i \neq i_m$), soit adapté à un bloc de variables physiques exogène [problème (9.11)], soit dans le cadre de la détermination d'un équilibre général [problème (9.8)], la minimisation de $C''(X)$ ci-dessus exprime que les prix sont conditionnés pour que les contraintes de ventilation (10.24) soient, en moyenne, le plus près possible d'être satisfaites avec des ajustements nuls. Les prix sont évidemment aussi conditionnés par les équilibres budgétaires des secteurs [contraintes (10.11) et (10.22)], cela de façon d'autant plus stricte que les bornes db_m et rb_m sont plus petites. Dans ce sens, la contrainte (10.22) peut être remplacée par l'adjonction au critère C" d'un terme $a[Db(s_m) + R_b(s_m)]$ où a est un paramètre ≥ 0 de modulation [alinéa 9.b, exemple (9.4)].

Afin de réduire la sous-détermination de la réalisation Res2 en ce qui concerne les variables de types Db et R_b , on peut introduire les contraintes,

$$(10.30) \quad Db(s) - R_b(s) = r(s) \sum_{j' \in J_A(s)} Z_f(s, j') \quad \text{pour } s \neq s_m, \quad \text{avec,}$$

$$(10.31) \quad Z_f(s, j) = \sum_{i \neq i_m} Pr(i) C_f^-(i, j) X_f(s, j) \quad \text{pour } (s, j) \in A,$$

où, d'une part $C_f^-(i, j)$ vaut $-C_f(i, j)$ si $C_f(i, j) < 0$ et zéro sinon, d'autre part les coefficients ≥ 0 $r(s)$ ($s \neq s_m$) sont des données spéciales représentant des taux de profit. On rejoint ainsi la problématique des prix de production ([116], chap. 2 et 7, [1], chap. II et III), mais ici pour un régime stationnaire : d'après (10.11), (10.24) et (10.30) redonnent, aux ajustements près, la définition de ces prix ([116], alinéas 4 et §51, [1], §II.II.1 et §III.I.3) en supposant que les coefficients $vt(s, j)$ sont endogènes et déterminés par,

$$(10.32) \quad vt(s, j) \sum_{j' \in J_A(s)} Z_f(s, j') = Z_f(s, j) \quad \text{pour } s \neq s_m \text{ et } (s, j) \in A.$$

e) Modèle de Von Neumann-Sraffa. Afin d'expliciter le lien de la réalisation Res2 avec le modèle de Von Neumann-Sraffa ([108], [116], [1], chap.III, [114]), on considère les hypothèses supplémentaires suivantes la concernant :

- S_n se compose de s_m et d'un unique secteur productif s_0 ;
- seule l'activité j_m peut avoir lieu dans le secteur s_m [i.e. $(s_m, j) \in A$ implique $j=j_m$] et on a $C_f(i, j_m) \leq 0$ pour $i \neq i_m$; l'ensemble B est vide ;
- les bornes de transferts dbm et rbm ainsi que les coefficients de consommations contingentes $v(i)$ ($i \neq i_m$) sont nuls.

Sous les hypothèses précédentes, les contraintes physiques (10.9) et (10.17) entraînent (10.33) et (10.34) ci-après :

$$(10.33) \quad \sum_{j \neq j_m} C_f(i, j) X_f(s_0, j) \geq |C_f(i, j_m)| X_f(s_m, j_m) \quad \text{pour } i \neq i_m,$$

$$(10.34) \quad \sum_{j \neq j_m} |C_f(i_m, j)| X_f(s_0, j) \leq |C_f(i_m, j_m)| X_f(s_m, j_m).$$

En effet, il suffit, d'écrire (10.17) pour $s=s_0$ et (10.9) pour $s=s_m$ en tenant compte de (10.15) et de l'hypothèse faite ici sur A, puis de remarquer que $Y''(s_0, i) - Y'(s_0, i)$ vaut $- [Y''(s_m, i) - Y'(s_m, i)]$ d'après (10.7). Inversement, un multiplet de valeurs des variables $X_f(s, j)$ ($s \in S_n, j \in J$) vérifiant (10.33) et (10.34) peut être complété par un multiplet de valeurs des variables d'échanges de telle sorte que (10.9) et (10.17) soient satisfaites.

Par ailleurs, la contrainte de ventilation (10.24) s'écrit ici,

$$(10.35) \quad \left[\sum_{i \neq i_m} Pr(i) C_f(i, j) - |C_f(i_m, j)| \right] X_f(s_0, j) = Z_a(s_0, j) \quad \text{pour } j \neq j_m.$$

En effet, d'après (10.22) et l'hypothèse $Dbm = Rbm = 0$, la contrainte (10.11) entraîne que $Z_d(s_0) = Z_r(s_0)$; d'où (10.35), compte tenu de (10.23).

Cela étant, la détermination des variables physiques conformément au problème (9.9) (alinéa (10.c), avec le critère "travail minimum" (10.20) sous la contrainte de population exogène (10.21), correspond ici [en négligeant la limitation de l'offre de travail (10.34)] au problème linéaire :

$$(10.36) \quad \text{Minimiser } \sum_{j \neq j_m} |C_f(i_m, j)| X_f(s_0, j) \quad \text{sous les contraintes (10.33)}.$$

Par ailleurs, d'après (10.35), le calcul du système de prix $Pr(i)$ ($i \neq i_m$) conformément au problème (9.11) (alinéa 10.d), avec le critère $C'(X)$ donné par (10.29) et relativement à la solution $\underline{X}_f(s_0, j)$ ($j \neq j_m$) du problème (10.36) correspond au problème :

$$(10.37) \quad \text{Minimiser } \sum_{j \neq j_m} \left| \sum_{i \neq i_m} Pr(i) C_f(i, j) - |C_f(i_m, j)| \right| \underline{X}_f(s_0, j).$$

Se référant alors à la formulation donnée par B.Schefold ([114], §1.3, page 140), le modèle de Von Neumann-Sraffa, ici stationnaire, correspondant aux données en cause [matrice de coefficients techniques $C_f(i, j)$ ($i \neq i_m, j \neq j_m$), consommations finales $|C_f(i, j_m)| \underline{X}_f(s_m, j_m)$ ($i \neq i_m$), consommations unitaires de travail $|C_f(i_m, j)|$ ($j \neq j_m$), taux de croissance et de profit nuls] repose sur la considération du problème primal (10.36) et de son problème dual qui s'écrit :

$$(10.38) \quad \text{Maximiser } \sum_{i \neq i_m} Pr(i) |C_f(i, j_m)| \quad \text{sous les contraintes,}$$

$$(10.39) \quad \sum_{i \neq i_m} Pr(i) C_f(i, j) \leq |C_f(i_m, j)| \quad \text{pour } j \neq j_m.$$

D'après le théorème faible des écarts complémentaires ([115], tome 1, §5.4, Théorème 5.3), le système des prix duaux $Pr(i)$ ($i \neq i_m$) solution de ce problème vérifie les relations de complémentarité :

$$(10.40) \quad \left[\sum_{i \neq i_m} p_r(i) C_f(i, j) - |C_f(i_m, j)| \right] \underline{X}_f(s_0, j) = 0 \quad \text{pour } j \neq j_m.$$

Ainsi, ce système $p_r(i)$ ($i \neq i_m$) est solution du problème (10.37) correspondant au calcul de prix proposé, ce qui montre le lien cherché.

La variante de la réalisation Res2 correspondant aux contraintes (10.30) à (10.32) s'apparente de façon analogue à un modèle de Von Neumann-Sraffa encore stationnaire mais avec un taux de profit éventuellement > 0 .

f) Ensembles de production. En ce qui concerne les liens du formalisme proposé avec celui du modèle de Walras-Debreu ([37], [100]), on explicite ci-après ce que sont les ensembles de production des secteurs dans le cadre des réalisations res0, Res1 ou Res2 introduites ci-dessus. On se place ici dans une situation multisectorielle et on suppose que $B = S_n \times J_p$.

Pour chaque secteur $s \in S_n$, on définit l'ensemble de production Prod(s) du secteur s comme l'ensemble des multipléts $y(i)$ ($i \in I$), dits vecteurs de production ([37], §3.2 ; [100], §I.2 et §III.1), pour lesquels il existe un multiplétt $X_f(j)$ ($j \in J$) de niveaux d'activités vérifiant les relations,

$$(10.41) \quad \sum_{j \in J} C_f(i, j) X_f(j) - y(i) \geq 0 \quad \text{pour } i \in I,$$

$$(10.42) \quad X_f(j) \leq \underline{X}_p(s, j) \quad \text{pour } j \in J_p,$$

$$(10.43) \quad X_f(j) = 0 \quad \text{pour } j \in J_A(s).$$

Ainsi, l'ensemble de production Prod(s) du secteur s est défini ici explicitement en termes des caractéristiques techniques du secteur s : coefficients techniques $C_f(i, j)$ ($i \in I, j \in J$), niveaux des parcs $\underline{X}_p(s, j)$ ($j \in J_p$), ensemble A.

L'existence d'un multiplétt $X_f(s, j)$ ($s \in S_n, j \in J$) de niveaux d'activités vérifiant les contraintes physiques (10.9), (10.15) et (10.16), relativement à un multiplétt d'échanges $X_z(e)$ ($e \in E$), équivaut alors à,

$$(10.44) \quad Y(s, \dots) \in \text{Prod}(s) \quad \text{pour } s \in S_n,$$

où $Y(s, \dots)$ désigne le vecteur de production $Y''(s, i) - Y'(s, i)$ ($i \in I$). C'est par une relation de la forme (10.44) que sont représentées les contraintes techniques dans le modèle de Walras-Debreu ([37], §3.2 ; [100], §III.1).

On souligne la "linéarisation" que constitue le passage de la relation (10.44) aux contraintes (10.9), (10.15) et (10.16) : les ensembles Prod(s) sont des ensembles polyédraux convexes dont les frontières sont en général définies par des fonctions non linéaires (les "fonctions de production" ; [100], §III.1), contrairement aux contraintes en cause. L'analyse en termes techniques des ensembles de production permet ainsi de tourner leurs non linéarités.

On souligne aussi que les variables d'échanges consolidés $Y'(s, i)$ et $Y''(s, i)$, qui interviennent seules dans le modèle de Walras-Debreu, ne sont généralement pas indépendantes à cause de l'organisation des échanges imposée par la nomenclature E : la considération des variables d'échanges individualisés $X_z(e)$ ($e \in E$) est indispensable pour tenir compte de cette organisation, de même d'ailleurs que des consommations d'échanges ici négligées.

Le cadre de la réalisation de base Res0 (par exemple) permet par ailleurs une représentation des comportements concurrentiels qui font l'objet de la théorie de Walras-Debreu ([37] ou [100], §3.4 et chap. 5 ; [50]). Le problème se pose donc d'étudier comment les résultats de cette théorie concernant l'existence d'un équilibre général peuvent être étendus à ce cadre.

§ 11 - CAS DE LA PRODUCTION SIMPLE

Bien que le type de structure qui fait l'objet de ce travail ait été conçu autour d'une représentation de l'appareil productif dégagée de l'hypothèse trop rigide de la production simple, on explicite ci-après à titre d'exercice formel (alinéas 11.a et 11.b) ce que donne sous cette hypothèse la structure particulière présentée au paragraphe précédent. Cet exercice permet de relier le formalisme proposé à celui du modèle de Léontief (alinéa 11.c) ; il fournit aussi des exemples simples de réalisations catégoriques (alinéas 11.c,d).

a) Hypothèses. Dans le cadre de la réalisation Res0 spécifiée aux alinéas 10.a et 10.b, on peut interpréter le cas de la production simple au travers des hypothèses suivantes :

- les trois nomenclatures I, J, Sn (resp. les trois postes spécifiés i_m, j_m, s_m) coïncident ; on conserve la seule notation I (resp. i_m).

- en plus de (10.1), les coefficients techniques vérifient,

$$(11.1) \quad C_f(i,i) = 1 \quad \text{et} \quad C_f(i,j) \leq 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad (i \in I, j \in J) ;$$

on pose,

$$(11.2) \quad c(i,i) = 0 \quad \text{et} \quad c(i,j) = - C_f(i,j) \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad (i \in I, j \in J) ;$$

- en plus de (10.2), la nomenclature d'échanges E vérifie,

$$(11.3) \quad \text{pour} \quad i \neq s, \quad (i, s', s) \in E_{i, \dots, s} \quad \text{si et seulement si} \quad s' = i \quad (i \in I, s \in I, s' \in I),$$

$$(11.4) \quad E_{i, \dots, i} \text{ est vide} \quad (i \in I),$$

ce qui exprime que le bien i ne peut être fourni que par le secteur i et peut être reçu par tout secteur autre que i ; de cette propriété et de (10.4), il résulte que,

$$(11.5) \quad Y'(s,s) = 0 \quad \text{et} \quad Y''(s,i) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq s \quad (s \in I, i \in I) ;$$

les variables $Y'(s,i)$ et $Y''(s,i)$ ($s \in I, i \in I$) peuvent alors être considérées comme indépendantes, à la seule condition de vérifier, outre (11.5) ci-dessus, les équations de conservation (10.7) ;

- en plus de (10.3), l'ensemble A vérifie,

$$(11.6) \quad (s,j) \in A \quad \text{si et seulement si} \quad s = j \quad (s \in S_n, j \in J),$$

signifiant ainsi que l'activité j ne peut avoir lieu que dans le secteur j ; on note $X_f(j)$ au lieu de $X_f(j,j)$ et $X_p(j)$ au lieu de $X_p(j,j)$.

Sous les hypothèses précédentes, on considère la réalisation Res3, dérivée de Res0, qui est définie en adjoignant aux contraintes de Res0 [relations (10.7) à 10.17)], d'une part les contraintes circonstancielles [équivalentes à (10.22) avec $dbm = rbm = 0$],

$$(11.7) \quad Db(s) = 0 \quad \text{et} \quad Rb(s) = 0 \quad \text{pour} \quad s \neq i_m,$$

d'autre part les contraintes spéciales de serrage,

$$(11.8) \quad X_p(j) = X_f(j) \quad \text{pour } j \in J_p,$$

enfin les contraintes spéciales de consommations contingentes (10.25).

La relation (11.7) exprime que tous les transferts sont exclus ; les équilibres (10.11) et (10.12) s'écrivent alors simplement :

$$(11.9) \quad Z_d(s) = Z_r(s) \quad \text{pour } s \in I.$$

La relation (11.8) signifie que l'on ignore le rôle des parcs.

b) Système réduit. D'après (11.5) et (11.6), (10.5) donne ici,

$$(11.10) \quad Y_b(s,i) = -c(i,s)X_f(s) + Y'(s,i) \quad \text{pour } i \neq s \ (i \in I, s \in I),$$

$$(11.11) \quad Y_b(s,s) = X_f(s) - Y''(s,s) \quad (s \in I).$$

Il en résulte que la contrainte de serrage (10.17) équivaut à,

$$(11.12) \quad \text{pour } s \neq i_m, \quad Y''(s,s) = X_f(s) \quad \text{et} \quad Y'(s,i) = c(i,s)X_f(s) \quad \text{pour } i \neq s.$$

Les relations (11.5) et (11.12) expriment que le secteur s reçoit les quantités des biens $i \neq s$ qu'il consomme sans pouvoir les produire et fournit la quantité du bien s qu'il produit. En vertu de ces relations et de (11.8), un régime compatible avec la réalisation Res_3 est entièrement défini par le multiplet des quantités : $X_f(j)$ ($j \in I$), $Y'(i_m, i)$ ($i \neq i_m$), $Y''(i_m, i_m)$, $Pr(i)$ ($i \in I$).

Cela étant, on a la propriété d'équivalence suivante : un régime est compatible avec la réalisation Res_3 [i.e. vérifie les contraintes (10.7) à (10.17) et (10.25)] si et seulement s'il vérifie le système réduit constitué des relations (11.13) à (11.18) ci-après :

$$(11.13) \quad X_f(i) - \sum_{j \neq i_m} c(i,j)X_f(j) - Y'(i_m, i) = 0 \quad \text{pour } i \neq i_m,$$

$$(11.14) \quad Y''(i_m, i_m) = \sum_{j \neq i_m} c(i_m, j)X_f(j).$$

$$(11.15) \quad Y'(i_m, i) - c(i, i_m)X_f(i_m) \geq 0 \quad \text{pour } i \neq i_m,$$

$$(11.16) \quad X_f(i_m) - \sum_{j \neq i_m} c(i_m, j)X_f(j) \geq 0,$$

$$(11.17) \quad [Pr(j) - \sum_{i \neq j} Pr(i)c(i, j)]X_f(j) = 0 \quad \text{pour } j \neq i_m,$$

$$(11.18) \quad Pr(i)[Y'(i_m, i) - c(i, i_m)X_f(i_m)] \\ \geq v(i)Pr(i_m) \sum_{j \neq i_m} c(i_m, j)X_f(j) \quad \text{pour } i \neq i_m.$$

La vérification de cette équivalence peut être faite comme suit :

- pour $s \neq i_m$, (10.9) découle de (10.17), elle même équivalente à (11.12) ; par ailleurs, (11.10) et (11.12) entraînent que (10.9) pour $s = i_m$ équivaut à (11.15) ;

- en vertu de (11.5) et (11.12), les équations de conservation (10.7) équivalent à (11.13) pour $i \neq i_m$ et à (11.14) pour $i = i_m$;

- conjuguée avec (11.12) et (11.14), (11.11) pour $s = i_m$ entraîne que (10.9) pour $s = i_m$ et $i = i_m$ équivaut à (11.16) ;

- en vertu de (11.5) et (11.12), on a,

$$(11.19) \quad Z_d(s) = \sum_{i \neq s} \text{Pr}(i)c(i,s)Xf(s) \quad \text{pour } s \neq i_m \quad \text{et} \quad Z_d(i_m) = \sum_{i \neq i_m} \text{Pr}(i)Y'(i_m, i),$$

$$(11.20) \quad Z_r(s) = \text{Pr}(s)Xf(s) \quad \text{pour } s \neq i_m \quad \text{et} \quad Z_r(i_m) = \text{Pr}(i_m)Y''(i_m, i_m);$$

ainsi, (11.9) pour $s \neq i_m$ [i.e. (10.11)] équivaut à (11.17) tandis que (11.9) pour $s = i_m$ équivaut à,

$$(11.21) \quad \text{Pr}(i_m)Y''(i_m, i_m) = \sum_{i \neq i_m} \text{Pr}(i)Y'(i_m, i);$$

- d'après (11.10) pour $s = i_m$, (11.21) et (11.14), (10.25) équivaut à (11.18).

On note que les contraintes de ventilation (10.24) avec des ajustements nuls correspondent ici à (11.17) et découlent des équilibres des secteurs (10.11) ou (11.9). Par ailleurs, l'équivalence entre (11.18) et (10.25) explicite le lien de (10.25) avec les contraintes correspondantes du modèle FIFI ([3], relation (32), page 74 ; [28], tome 1, relations (34) à (36), page 187).

c) Résolution. L'étude de l'extension de la réalisation Res3 revient, d'après la propriété d'équivalence précédente (alinéa 11.b), à la résolution du système réduit (11.13)-(11.18). Or, en portant $Y'(i_m, i)$ ($i \neq i_m$) tiré de (11.13) dans (11.15) et dans (11.18), on voit que le système réduit se ramène au système constitué de (11.16) et des relations (11.22) à (11.24) ci-après,

$$(11.22) \quad Xf(i) - \sum_{j \neq i_m} c(i, j)Xf(j) \geq c(i, i_m)Xf(i_m) \quad \text{pour } i \neq i_m.$$

$$(11.23) \quad [\text{Pr}(j) - \sum_{i \neq i_m} \text{Pr}(i)c(i, j)]Xf(j) = \text{Pr}(i_m)c(i_m, j)Xf(j) \quad \text{pour } j \neq i_m.$$

$$(11.24) \quad \text{Pr}(i)[Xf(i) - \sum_{j \neq i_m} c(i, j)Xf(j)] - \text{Pr}(i_m)v(i) \sum_{j \neq i_m} c(i_m, j)Xf(j) \geq \text{Pr}(i)c(i, i_m)Xf(i_m) \quad \text{pour } i \neq i_m.$$

entre les variables $Xf(j)$ ($j \in J$) et $\text{Pr}(i)$ ($i \in I$), toujours supposées telles que,

$$(11.25) \quad Xf(j) \geq 0 \quad (j \in J) \quad \text{et} \quad \text{Pr}(i) \geq 0 \quad (i \in I).$$

Si I a n éléments, (11.23) et (11.24) comportent $2n - 2$ équations ou inéquations pour $2n$ variables. Afin de réduire cette sous-détermination de Res3, on considère la réalisation Res3A dérivée de Res3, d'une part en imposant l'égalité dans (11.24) [soit (11.26) la relation correspondante], d'autre part en rendant exogènes, l'offre de travail (i.e. le niveau de la population) $Xf(i_m)$ et le prix du bien "travail" (i.e. le taux de salaire) $\text{Pr}(i_m)$, via les contraintes circonstanciennes,

$$(11.27) \quad Xf(i_m) = \underline{Xf}(i_m) \quad \text{et} \quad \text{Pr}(i_m) = \underline{\text{Pr}}(i_m),$$

avec la condition,

$$(11.28) \quad \underline{Xf}(i_m) > 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{Pr}}(i_m) > 0.$$

On fait alors sur la matrice des coefficients techniques $c(i, j)$ ($i \in I, j \in I$) et le vecteur $v(i)$ ($i \in I, i \neq i_m$) les hypothèses :

(11.29) $c(i, i_m) > 0$ pour $i \neq i_m$; $c(i_m, j) > 0$ pour $j \neq i_m$,

(11.30) la matrice $I_d - C_m$ est inversible et son inverse D_m est ≥ 0 ,

où C_m est la matrice partielle des coefficients $c(i, j)$ ($i \neq i_m, j \neq i_m$) ;

(11.31) $v(i) = kv_0(i)$ avec $v_0(i) \geq 0$ ($i \neq i_m$) et $k \geq 0$,

où $v_0(i)$ ($i \neq i_m$) et k sont donnés.

Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant : le système constitué des relations (11.22), (11.23) et (11.26) admet une solution et une seule dès que $k \geq 0$ est assez petit ; cette solution vérifie la condition de positivité forte,

(11.32) $Xf(j) > 0$ pour $j \neq i_m$ et $Pr(i) > 0$ pour $i \neq i_m$;

elle est obtenue en tirant $Pr(i)$ ($i \neq i_m$) du premier système linéaire,

(11.33) $Pr(j) - \sum_{i \neq i_m} Pr(i)c(i, j) = Pr(i_m)c(i_m, j)$ pour $j \neq i_m$,

puis $Xf(j)$ ($j \neq i_m$) du second système linéaire,

(11.34) $Xf(i) - \sum_{j \neq i_m} [c(i, j) + [Pr(i_m)/Pr(i)]v(i)c(i_m, j)]Xf(j)$
 $= c(i, i_m)Xf(i_m)$ pour $i \neq i_m$,

où $Pr(i)$, avec $Pr(i) > 0$, ($i \neq i_m$) est la solution du système (11.33).

Sous la condition de positivité faible (11.25), la condition forte (11.32) découle de (11.22), (11.28) et (11.29) pour les niveaux d'activités, puis de (11.23) et (11.29) pour les prix ; il en résulte que le système (11.23), (11.26) se réduit au système (11.33), (11.34).

Or ce système admet, sous les hypothèses (11.29) à (11.31), une solution unique > 0 pour $k \geq 0$ assez petit : d'abord (11.33) admet une solution unique ≥ 0 et cette solution est > 0 d'après (11.28) et (11.29) ; ensuite, désignant par V_0 la matrice de coefficients $Pr(i_m)v_0(i)c(i_m, j)$ ($i \neq i_m, j \neq i_m$) [hypothèse (11.31)] et par F le vecteur de composantes $c(i, i_m)Xf(i_m)$ ($i \neq i_m$), le système (11.34) s'écrit, d'après l'hypothèse (11.30), $(I - kD_mV_0)X = D_mF$; mais, d'après la même hypothèse, ce dernier système admet une solution unique > 0 pour $k \geq 0$ assez petit car, d'une part le vecteur D_mF est ≥ 0 , d'autre part, la matrice D_mV_0 étant ≥ 0 , la matrice $I - kD_mV_0$ est alors inversible et d'inverse ≥ 0 (la série géométrique matricielle de terme général $k^n(D_mV_0)^n$ fournit cet inverse ; [81], théorème 8.2.4, page 253 ; [38], théorème III*, page 601), enfin une solution ≥ 0 de (11.34) est > 0 d'après (11.28) et (11.29).

La solution ainsi obtenue doit en outre être confrontées à la limitation de l'offre de travail que stipule (11.16). La propriété d'existence et d'unicité établie peut donc aussi être exprimée en disant que la réalisation Res3A est catégorique (alinéa 7.c), sous les hypothèses (11.29) à (11.31), dès que $k \geq 0$ est assez petit et l'offre de travail $Xf(i_m)$ assez grande.

d) Variantes. Dans le cadre de la réalisation Res3A (alinéa 11.c), lorsqu'on suppose en particulier que,

(11.35) $v(i) = 0$ pour $i \neq i_m$,

on retrouve le résultat de base concernant le modèle de Léontief et le modèle à production simple standard ([90], [91], [1], chap. I, [95]) : au facteur de proportionnalité (exogène) $Pr(i_m)$ près, les prix $Pr(i)$ ($i \neq i_m$) déterminés par (11.33) définissent alors les "valeurs travail" de la théorie formalisée de Marx ([106], [1], chap. I, [95], chap. III, [83], pp. 14-19).

En fait, pour la réalisation Res3A, ce sont toujours ces valeurs travail, qui sont déterminées par (11.33), même avec une fonction de demande effective, i.e. même si (11.35) n'est pas vérifiée. Pour aller au delà, il faut modifier la contrainte circonstancielle (11.27) qui fixe le taux de salaire.

Dans ce sens, on considère la structure Res3B, dérivée de Res3, dans laquelle, l'offre de travail est encore exogène (comme dans Res3A), mais le taux de salaire est endogène et soumis à la contrainte,

$$(11.36) \quad Pr(i_m) = w_0 + \sum_{i \neq i_m} b(i)Pr(i) - b[Xf(i_m) - \sum_{j \neq i_m} c(i_m, j)Xf(j)]/Xf(i_m).$$

Cette contrainte constitue une forme statique de la relation de Phillips-Lipsey ([28], tome 1, relation (26), page 187) faisant intervenir une tension sur le marché du travail via le troisième terme au membre de droite, terme dans lequel le facteur de b représente le taux de chômage [qui est ≥ 0 d'après (11.16)].

La résolution du système formé des relations (11.16), (11.22), (11.23), (11.26) et (11.36) réclame alors un procédé itératif bouclant sur la variable $Pr(i_m)$, via la résolution des systèmes (11.33) et (11.34). Si le jeu de données $c(i, j)$ ($i \in I, j \in I$), $Xf(i_m)$, $v(i)$, $b(i)$ ($i \in I, i \neq i_m$), w_0 , b est tel que ce système ait une solution et une seule, la réalisation Res3B fournit un exemple de réalisation catégorique représentant un équilibre général. Les prix d'équilibre ainsi déterminés diffèrent en général des valeurs travail : le système (11.33) les déterminant dépend ici, via (11.36), des niveaux d'activités.

Une autre variante consiste à modifier les contraintes (11.7) en introduisant, par exemple, des dividendes $Db(s)$ ($s \in I, s \neq i_m$) non nuls. Se référant à la problématique des prix de production dans le modèle de Von Neumann-Sraffa ([108], [116], chap. II, [1], chap. II), on peut, comme cas particulier de (10.30), remplacer les contraintes (11.7) par les contraintes,

$$(11.37) \quad Db(s) - Rb(s) = r \sum_{i \neq i_m} Pr(i)c(i, s)Xf(s) \quad \text{pour } s \neq i_m,$$

où $r \geq 0$ est un taux de profit donné, la sommation pour $i \neq i_m$ correspondant à l'hypothèse de salaires payés "post-factum" ([1], page 54). Les relations (11.33) et (11.34) sont alors à remplacer par les relations,

$$(11.38) \quad Pr(j) - (1 + r) \sum_{i \neq i_m} Pr(i)c(i, j) = Pr(i_m)c(i_m, j) \quad \text{pour } j \neq i_m,$$

$$(11.39) \quad Xf(i) - \sum_{j \neq i_m} [c(i, j) + [Pr(i_m)/Pr(i)]v(i)c(i_m, j)]Xf(j) \\ - rv(i) \sum_{s \neq i_m} \sum_{j \neq i_m} [Pr(i)/Pr(i)]c(j, s)Xf(s) \\ = c(i, i_m)Xf(i_m) \quad \text{pour } i \neq i_m.$$

On souligne que, contrairement à la problématique de la "règle d'or", qui stipule l'égalité du taux de croissance et du taux de profit ; [108], [114], §1.3, [1], section IV.III), ce dernier est introduit ici dans un contexte stationnaire (alinéa 10.a). Le formalisme proposé permettrait de traiter aussi le cas de la croissance dans le cadre statique en cause ici, cela via des variables de transformation $Xu(j)$ ($j \in I$) et, par exemple, des contraintes spéciales

de la forme (6.9) qui pourraient s'écrire,

$$(11.40) \quad Xu(j) = c(j)Xp(j) \quad \text{pour } j \in I.$$

Enfin, on pourrait aussi considérer une réalisation analogue à Res3A, mais où serait exogène, au lieu de la variable $Xf(i_m)$, une variable $Xp(j_1)$, avec $j_1 \neq j_m$, représentant un parc de ressources (alinéa 8.d). Pour des jeux de données convenables, on obtient ainsi d'autres exemples de réalisations catégoriques dans lesquelles l'offre de travail est endogène.

e) Tableaux de Leontief. Le rapprochement étudié ci-dessus entre le formalisme proposé et celui du modèle de Léontief repose sur la considération de réalisations très particulières. Une autre approche consiste à partir des tableaux d'échanges intersectoriels, ou tableaux de Leontief, plutôt que du modèle à production simple.

Dans cette approche, on associe, pour une réalisation à priori quelconque, à chaque régime un tel tableau théorique : plus précisément, le tableau de Leontief correspondant au régime $X(t)$, régime relatif à la période t dans le cheminement X (alinéas 7.b,c), est spécifié par la matrice $Z(t, s', s'')$ ($s' \in S$, $s'' \in S$), notée $Z_*(X(t))$, qui est définie par la relation (4.4) (alinéa 4.d) en fonction des multiplats de niveaux d'échanges et de prix relatifs à $X(t)$.

Vu la signification qu'ont les secteurs (considérés comme agrégats d'agents économiques ; alinéas 2.a et 8.e) dans le cadre du formalisme proposé, les tableaux théoriques ainsi définis dans ce cadre correspondent aux tableaux d'échanges intersectoriels qui sont introduits dans la méthodologie de Leontief à partir des données économétriques ([89], [90], [91], partie II) et qui sont utilisés dans l'analyse "input-output" ([19], [75], chap. 7, [11]).

Chacun de ces tableaux est en lui-même purement descriptif des flux d'échanges (en valeur) entre secteurs ; mais, conformément à la méthodologie de Leontief, il peut donner lieu à la spécification d'un modèle à production simple, en particulier ([91], page 137, [75], page 165, [11], page 31) via le calcul des coefficients d'"input" $a(t, s', s'')$ ($s' \in S$, $s'' \in S$) par la relation,

$$(11.41) \quad a(t, s', s'') = Z(t, s', s'') / Z_d(t, s'') \quad \text{pour } s' \in S \text{ et } s'' \in S,$$

où $Z_d(s'')$ ($s'' \in S$) est défini par la relation (4.6).

On souligne la distinction entre ces coefficients et les coefficients techniques physiques $Cf(i, j)$ ($i \in I$, $j \in J$) : à la différence de ces derniers qui sont des caractéristiques intrinsèques des processus techniques, les coefficients d'"input" dépendent du régime en cause, via les niveaux d'échanges et les prix.

On souligne de plus que les tableaux $Z_*(X(t))$ introduits ci-dessus diffèrent notablement des TEI ou TES de la comptabilité nationale Française ([17], chap. II, [117], chap. III) et que le concept de branche n'intervient pas dans le modèle proposé. Ce concept, intermédiaire entre ceux d'activité et de secteur via des regroupements entre les premières et des découpages des seconds selon les biens produits ([17], page 19), recouvre essentiellement un artifice des économètres pour tenter de prendre en compte les productions multiples et les empiètements de secteurs tout en restant dans le cadre comptable des tableaux d'échanges intersectoriels et dans le cadre théorique correspondant des modèles à production simple. Ces cadres sont confortables par leur simplicité puisqu'ils ne comportent qu'une seule nomenclature dont les postes sont conçus selon les convenances comme biens, activités ou secteurs : c'est pour essayer de dépasser les rigidités et ambiguïtés qui en résultent, qu'on travaille ici avec les trois nomenclatures.

Une fois en place les distinctions précédentes, la disposition d'un tableau de Leontief empirique Z_* , multiplet $Z_*(s',s'')$ ($s' \in S$, $s'' \in S$) mesuré dans une situation concrète, fournit un mode de calage (alinéa 12.b) d'un jeu de données et d'un régime X représentant cette situation, par exemple dans le cadre d'une structure statique : cela par identification du tableau théorique $Z_*(X)$ avec le tableau empirique Z_* , via l'ajustement des données et du régime en cause.

§ 12 - ETUDES DE TRANSITION

On s'intéresse ici à l'étude de cheminements pour lesquels l'accent est mis sur le caractère de transition entre un état initial (alinéa 12.b) et un état final (alinéa 12.c) : on traduit formellement ce caractère de transition par certains schémas d'études prospectives, des états finals (alinéa 12.c) et des cheminements de transition (alinéa 12.d), schémas basés sur divers modes d'association de réalisations statiques et évolutives (alinéa 12.a). Ces schémas sont ensuite situés, comme un écho à la motivation de ce travail (alinéa 1.a), par rapport à une problématique de planification à long terme (alinéa 12.e).

a) Réalisations locales. Dans la perspective des cheminements de transition auxquels on s'intéresse ici, le résultat de la phase de construction (alinéa 8.a) en cause est supposé être une réalisation évolutive Res, de descriptif Des, dont la nomenclature de périodes $T = [t_0, t_1]$ (avec $t_0 < t_1$) représente l'intervalle de temps sur lequel doit se dérouler le processus considéré. Cette réalisation, point de départ de la phase d'exploitation (alinéa 8.a) à laquelle on s'intéresse, est supposée rassembler et exprimer les divers déterminants à prendre en compte concernant, d'une part les caractéristiques de l'ensemble humain et de son environnement extérieur (entièrement exogène), d'autre part le propos prospectif.

En particulier, le jeu de données circonstancielle spécifie les diverses conditions exogènes en cause, cela pour tout l'intervalle $[t_0, t_1]$: conditions initiales, prix extérieurs, limitations des ressources et des échanges, etc (alinéa 6.a).

Par ailleurs, si des changements techniques sont à prendre en compte, la nomenclature d'activités J doit comporter des postes correspondant aux techniques "nouvelles" et la nomenclature de transformations H des postes représentant les transformations envisageables, tandis que les coefficients techniques correspondants spécifient les caractéristiques modulaires de ces techniques et transformations, les délais nécessaires étant éventuellement représentés par des contraintes spéciales du type de (6.11) (alinéa 6.b).

Enfin on suppose que la réalisation Res est à mémorisation canonique (alinéa 7.c).

Dans le cadre évolutif fourni par la réalisation Res, on va considérer les réalisations statiques qui en sont déduites par restrictions aux diverses périodes $t \in T$.

Dans ce sens, pour chaque $t \in T$, on désigne par Res(t) la réalisation statique, dite restriction locale de la réalisation Res à la période t, qui est définie comme suit :

- le descriptif fondamental de Res(t) est le même que celui de Res, sauf la nomenclature de périodes qui est réduite à la période t ;
- le jeu de données techniques de Res(t) est le même que celui de Res ;
- le jeu de données circonstancielle de Res(t) est la restriction de celui de Res à la période t ; les contraintes de base de Res(t) sont alors celles de Res qui ne concernent que les variables relatives à la période t [i.e. seules sont exclues les équations d'évolution] ;
- les variables spéciales de Res(t) sont les variables spéciales de Res relatives à la période t ;
- les contraintes spéciales de Res(t) sont les contraintes spéciales de Res qui ne concernent que des variables relatives à la période t (i.e. seules sont exclues les équations de définition des variables de mémorisation).

Cette définition entraîne que,

(12.1) $X(t) \in \text{Ext}(\text{Res}(t))$ pour $t \in T$ et $X \in \text{Ext}(\text{Res})$.

Pour chaque $t \in T$: d'une part on désigne par $\text{Blk}(t)$ l'ensemble des multi-plets V_k de valeurs des variables de capital (variables de types $X_f(.,j)$ pour $j \in J_q$, X_p , W_p et W_m) relatives à la période t et vérifiant les contraintes circonstanciennes de $\text{Res}(t)$; d'autre part on désigne par $\text{Blm}(t)$ l'ensemble des multi-plets V_m de valeurs des variables spéciales de mémorisation concernant les périodes antérieures à t (alinéa 6.b) ; enfin, si X_t est un régime compatible de la réalisation $\text{Res}(t)$, on désigne par $V_k(X_t)$ [resp. $V_m(X_t)$] le multi-plet de valeurs des variables de capital (resp. de mémorisation) défini par X_t . On a alors en particulier,

(12.2) $V_k(X(t)) \in \text{Blk}(t)$ et $V_m(X(t)) \in \text{Blk}(t)$ pour $t \in T$ et $X \in \text{Ext}(\text{Res})$.

Ces réalisations locales $\text{Res}(t)$ ($t \in T$) sont très sous-déterminées, en particulier en ce qui concerne les variables de capital et les variables de mémorisation, car le passage de Res à $\text{Res}(t)$ a privé ces variables de leurs liens interpériodes naturels. Pour chaque $t \in T$, chaque $\underline{V}_k \in \text{Blk}(t)$ et chaque $\underline{V}_m \in \text{Blm}(t)$, on désigne par $\text{Res}(t, \underline{V}_k, \underline{V}_m)$ la réalisation statique, dérivée de $\text{Res}(t)$ et dite locale en t pour \underline{V}_k et \underline{V}_m , qui est obtenue en fixant aux niveaux définis par \underline{V}_k et \underline{V}_m respectivement les variables de capital et les variables de mémorisation, i.e. en adjoignant aux contraintes de $\text{Res}(t)$ les contraintes,

(12.3) $V_k(X_t) = \underline{V}_k$ et $V_m(X_t) = \underline{V}_m$.

b) Etat initial ; calage. L'état initial du système, état à la période initiale t_0 , est représenté par un régime compatible X_0 de la réalisation $\text{Res}(t_0)$. Ce régime peut ne pas être entièrement exogène : seuls les multi-plets \underline{V}_{k0} et \underline{V}_{m0} , respectivement de valeurs des variables de capital et de mémorisation à la période initiale, sont impérativement donnés tels que,

(12.4) $\underline{V}_{k0} \in \text{Blk}(t_0)$ et $\underline{V}_{m0} \in \text{Blk}(t_0)$,

les conditions initiales s'écrivant alors,

(12.5) $V_k(X_0) = \underline{V}_{k0}$ et $V_m(X_0) = \underline{V}_{m0}$.

Ces conditions sont supposées être incluses dans les contraintes (circonstanciennes et spéciales) de la réalisation de départ Res . Elles entraînent que la réalisation locale $\text{Res}(t_0, \underline{V}_{k0}, \underline{V}_{m0})$ a la même extension que la réalisation $\text{Res}(t_0)$.

Dans la phase de construction de la réalisation Res , une étape importante est constituée par le calage de l'état initial. Ce calage consiste à ajuster le jeu de données de la réalisation $\text{Res}(t_0)$ (en particulier son jeu de données techniques qui est aussi celui de la réalisation Res) à l'état initial concret en cherchant un régime X_0 correspondant à ce dernier, en ce sens que, d'une part X_0 est compatible avec $\text{Res}(t_0)$ (aspect théorique), d'autre part X_0 intègre les données empiriques, i.e. les résultats d'observations concernant l'état initial concret (aspect empirique).

Cet ajustement du jeu de données de la réalisation $\text{Res}(t_0)$ aux données empiriques repose sur des études de multiplicités et des études de variabilités de cette réalisation via une analyse multicritère convenable (alinéas 9.a,c). Les données empiriques utilisées peuvent être très diverses, soit physiques (niveaux d'activités, de parcs, de transformations, d'échanges), soit monétaires (prix, encours, tableau de Léontief ; alinéa 11.e).

On souligne que cette phase de calage de la réalisation $Res(t_0)$ est postérieure à sa phase de construction dans le cadre de celle de Res : il s'agit seulement, par le test global que constitue la détermination du régime X_0 , de vérifier que les données modulaires (essentiellement les coefficients techniques) déterminées par ailleurs sont compatibles avec les données empiriques disponibles. En particulier, ce calage n'est pas à confondre avec l'estimation des modèles économétriques d'extrapolation ([40], §1.3).

c) Etudes finales. L'état final du système, état à la période finale t_1 , est représenté par un régime compatible X_1 de la réalisation $Res(t_1)$, régime qui sera aussi dit final.

Les études finales, études statiques des régimes finals ou encore études relatives à l'extension de la réalisation $Res(t_1)$ (paragraphe 9), constituent des exercices typiques de prospective libre (alinéa 1.a).

On souligne d'abord à ce sujet que le qualificatif "final" n'a ici un sens que relativement à l'exercice de prospective en cause et à l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ considéré dans l'avenir : ce qualificatif exprime seulement l'impératif structurel consistant en ce que, d'une part l'intervalle de temps appréhendé est fini, d'autre part on s'intéresse à l'état du système à la fin de cet intervalle, impératif logique qui ne préjuge en rien de la poursuite de l'évolution du système après la période t_1 (alinéa 12.e).

Cela étant, les études finales reposent sur les schémas du paragraphe 9 appliqués (ici dans le cas statique) à des réalisations dérivées de la réalisation $Res(t_1)$. Pour une telle réalisation, notée Res_1 , le problème d'optimisation standard (7.9) s'écrit, en désignant par C_1 un critère relatif à la réalisation $Res(t_1)$,

$$(12.6) \quad \text{trouver } X_1 \in \text{Ext}(Res_1) \text{ tel que } C_1(X_1) = \text{Min } C_1(X') \\ X' \in \text{Ext}(Res_1)$$

Parmi les contraintes supplémentaires susceptibles de définir Res_1 à partir de $Res(t_1)$, on laisse provisoirement de côté celles qui concernent l'existence d'une transition entre l'état initial et l'état final ; elles seront examinées à l'alinéa suivant.

Pour ce qui est des contraintes relatives à l'état final en lui-même, indépendamment de la transition, celles qui concernent les transformations ont une importance particulière, en liaison avec les considérations précédentes relatives au qualificatif "final".

Dans ce sens, des contraintes spéciales du type (6.9), écrites pour $t = t_1$, permettent d'exprimer des options très diverses concernant la croissance ou la décroissance des divers parcs. Parmi ces options, figure celle qui consiste à imposer au régime final X_1 d'être stationnaire du point de vue des parcs, cela en faisant, dans (6.9), $c''(t_1, j) = 0$ pour tout $j \in J_p$, ce qui revient à imposer les contraintes circonstancielles,

$$(12.7) \quad Xu(t_1, s, h) = 0 \quad \text{pour } s \in S_n \text{ et } h \in H.$$

La stationnarité peut être imposée de façon analogue pour les variables de mémorisation. Elle peut évidemment aussi être partielle.

Pour les études finales, de multiplicité ou de variabilité (alinéas 9.a-c), le caractère contrasté, tant des critères que des contraintes supplémentaires (par exemple celles concernant les transformations) utilisés, joue un rôle important dans l'investigation du champ des possibles. De même, vu l'incertitude concernant les données circonstancielles (spécialement extérieures) de la réalisation Res à la période finale, les études finales de variabilités par rapport à ces données sont aussi essentielles, en particulier pour prendre en

compte les impératifs de stabilité des régimes finals considérés.

d) Transitions. Chaque cheminement compatible X de la réalisation Res peut être considéré comme un cheminement de transition, comme une transition, entre l'état initial représenté par le régime $X(t_0)$ et l'état final représenté par le régime $X(t_1)$. Les études de transition ne sont donc que des études particulières (de cheminements) relatives à la réalisation évolutive Res en cause ici.

L'état initial étant cerné par les conditions initiales (alinéa 12.b), on va classer les études de transitions par la manière dont le régime final $X(t_1)$ intervient dans la détermination du cheminement X. Dans ce sens, on distingue ci-après l'approche globale et l'approche par simulation dynamique.

Dans l'approche globale, on détermine le cheminement de transition X par résolution du problème d'optimisation standard (alinéa 7.d),

$$(12.8) \quad \text{trouver } X \in \text{Ext}(\underline{\text{Res}}) \text{ tel que } C(X) = \text{Min } C(X'), \\ X' \in \text{Ext}(\underline{\text{Res}})$$

où C est un critère relatif à la réalisation Res et où Res est une réalisation dérivée de Res qui est définie par des contraintes portant sur le régime final. On distingue alors l'approche globale avec décomposition et l'approche globale avec intégration, par la façon dont sont spécifiés C et Res.

Dans l'approche globale avec décomposition, les études finales précèdent les études de transitions. Dans ce sens, on suppose que des études finales préalables ont conduit, via l'étude de divers régimes finals (alinéa 12.c), à la détermination d'un couple $(\underline{V}k_1, \underline{V}m_1)$ tel que,

$$(12.9) \quad \underline{V}k_1 \in \text{Blk}(t_1) \text{ et } \underline{V}m_1 \in \text{Blk}(t_1) ;$$

à ce couple on peut associer l'extension (supposée non vide) de la réalisation $\text{Res}(t_1, \underline{V}k_1, \underline{V}m_1)$, i.e. (alinéa 12.a) la classe des régimes finals, compatibles avec la réalisation $\text{Res}(t_1)$ et tels que,

$$(12.10) \quad V_k(X_1) = \underline{V}k_1 \text{ et } V_m(X_1) = \underline{V}m_1.$$

Cela étant, la réalisation Res est définie, en tant que réalisation dérivée de Res, par les contraintes circonstancielle constituée par la relation,

$$(12.11) \quad V_k(X(t_1)) = \underline{V}k_1 \text{ et } V_m(X(t_1)) = \underline{V}m_1,$$

qui exprime que le cheminement X aboutit à un régime de la classe précédente et fait apparaître le couple $(\underline{V}k_1, \underline{V}m_1)$ comme un objectif.

De plus, le critère C concerne alors, en général, spécifiquement la transition, i.e. ne dépend que des régimes intermédiaires $X(t)$ pour $t_0 < t < t_1$. En fait, dans cette approche, le critère n'a qu'une importance secondaire : ce qui compte, c'est que le problème (12.8) ait une solution, i.e. qu'il existe un cheminement X, compatible avec les jeu de données de Res et vérifiant (12.11). Or cette existence d'une transition est problématique, puisque le couple objectif $(\underline{V}k_1, \underline{V}m_1)$ a été déterminé, par des études finales, de façon a priori indépendantes de la transition. L'approche avec intégration (ci-après) pallie cet inconvénient, mais au prix d'une plus grande lourdeur.

Une variante de l'approche précédente consiste à prendre comme objectif un régime final X_1 , plutôt qu'un couple $(\underline{V}k_1, \underline{V}m_1)$, et à remplacer (12.11) par,

$$(12.12) \quad X(t_1) = X_1.$$

Sous la condition que la réalisation Res est à mémorisation canonique, la réalisation dérivée de Res qui est définie par (12.12) a les mêmes cheminements compatibles que celle définie par (12.11), pourvu que $Vk_1 = Vk(X_1)$ et $Vm_1 = Vm(X_1)$. Cependant, la première formulation semble plus naturelle à cause de la variabilité laissée au régime final.

Dans l'approche globale avec intégration, les études de transition sont intégrées aux études finales. Dans ce sens, la réalisation Res est définie par les contraintes qu'exprime la relation,

$$(12.13) \quad X(t_1) \in \text{Ext}(Res_1),$$

où Res_1 est une réalisation statique dérivée de $Res(t_1)$, du type de celles intervenant dans les études finales (alinéa 12.c). De plus, le critère C est alors de la forme,

$$(12.14) \quad C(X) = C_1(X(t_1)) + a\underline{C}(X),$$

où, d'une part C_1 est un critère relatif à la réalisation $Res(t_1)$, du type de ceux intervenant dans les études finales (alinéa 12.c), d'autre part, a étant un paramètre ≥ 0 de modulation, \underline{C} est un critère concernant spécifiquement la transition, du type de ceux intervenant dans l'approche avec décomposition.

Les études finales avec intégration, i.e. les études correspondant à l'approche précédente, peuvent être menées selon les mêmes schémas que les études finales proprement dites (alinéa 12.c), cela tant en ce qui concerne la spécification de la réalisation Res_1 que le choix du critère final C_1 .

L'intégration alourdit évidemment les études finales, tant du point de vue du volume de calcul nécessaire aux déterminations [résolution du problème évolutif (12.8) au lieu de celle du problème statique (12.6)] que du point de vue de la manipulation des données (qui doivent concerner tout l'intervalle $[t_0, t_1]$ et pas seulement la période finale t_1).

Dans l'approche par simulation dynamique, l'aspect "détermination de proche en proche" (i.e. "dynamique") du cheminement est privilégié par rapport à l'aspect "transition". Dans cette approche, on suppose donné, pour chaque période $t \in T$, un critère C_t relatif à la réalisation locale $Res(t)$ (alinéa 12.a) et on s'intéresse aux cheminements X qui vérifient,

$$(12.15) \quad X \in \text{Ext}(Res) \quad \text{et} \quad C_t(X(t)) = \text{Min}_{X_t \in \text{Ext}(Res(t, Vk(X(t)), Vm(X(t)))} C_t(X_t) \quad \text{pour } t \in T.$$

Eu égard à la définition des réalisations locales (alinéa 12.a), la relation (12.15) exprime que, pour chaque période $t \in T$, le régime $X(t)$ est déterminé "localement", en fonction du capital en place $Vk(X(t))$, du corpus d'informations mémorisées $Vm(X(t))$ et du critère C_t (d'où le vocable de "simulation dynamique"). Ce critère exprime ainsi, pour la période t , une tendance concrète (alinéa 9.a), un comportement (par exemple d'investissement en vue de transformations).

Ainsi, la détermination d'un cheminement X par la relation (12.15) dépend, une fois spécifiée la réalisation Res , de la séquence C_* des critères C_t ($t \in T$). Il faut alors préciser le mode de spécification de cette séquence.

Si la séquence C_* est spécifiée empiriquement, par extrapolation de comportements observés, le régime final $X(t_1)$ d'un cheminement X simulé par (12.15) apparaît comme une prévision finale conditionnelle à C_* .

Inversement, étant donné un objectif (Vk_1, Vm_1) [vérifiant (12.9)] préalablement dégagé par des études finales comme dans l'approche globale avec

décomposition, on peut se proposer de déterminer, par identification, une séquence C_* de telle sorte qu'il existe un cheminement X vérifiant (12.15) et (12.11). Une telle séquence fournit des indications sur les comportements (par exemple d'investissement) souhaitables pendant la transition pour atteindre l'objectif en cause (alinéa 12.e).

On note que, lorsque chaque réalisation locale $Res(t, \underline{V}_k, \underline{V}_m)$ est catégorique (alinéa 7.d), il en est de même de la réalisation Res (au moins si son extension n'est pas vide) et les optimisations figurant dans (12.15) sont sans objet : on se trouve alors dans le cas usuel de la simulation dynamique ([40], §3.2 et §7.2, [96], chap. IV et V).

Les diverses approches précédentes peuvent être conjuguées, dans un va-et-vient entre études finales, études de transition avec objectif, études finales avec intégration et identification d'une séquence C_* de critères pour simulation dynamique.

Par ailleurs, un cheminement de transition X peut être analysé localement, pour les périodes intermédiaires entre t_0 et t_1 , par des études relatives aux réalisations locales $Res(t, \underline{V}_k(X(t)), \underline{V}_m(X(t)))$, avec $t_0 < t < t_1$, ou à des réalisations dérivées. Ces réalisations locales sont en particulier adaptées aux études du poids de l'organisation (alinéa 9.d) et aux calculs de prix (alinéa 9.e), cela éventuellement avec une nomenclature de secteurs plus détaillée que celle de la réalisation Res .

e) Prospective et planification. L'instrument de prospective qui fait l'objet de ce travail, en particulier via les schémas présentés ci-dessus (alinéas 12.a-d), est sensé permettre l'étude exploratoire de transformations profondes, donc à long terme, de l'appareil productif et du système économique d'une collectivité territoriale (alinéa 1.a). Admettant qu'une version de cet instrument est opérationnelle pour une collectivité territoriale déterminée (par exemple comme spécifié à l'alinéa 12.a), la question se pose de l'insertion de la réflexion sur l'avenir qu'il permet dans un processus de planification susceptible de promouvoir de telles transformations. On examine brièvement cette question ci-après.

Le type de planification auquel on s'intéresse est intermédiaire entre les deux exemples historiques, extrêmes quant au caractère contraignant, que sont, d'une part la planification indicative qui est pratiquée en France au niveau macroéconomique, d'autre part la planification dirigiste qui est pratiquée, soit au niveau sectoriel dans les grandes firmes ou les formations militaires, soit au niveau macroéconomique dans les pays socialistes ou certains pays en voie de développement.

La première est essentiellement constituée par des procédures de concertation entre l'état et les divers acteurs de la vie économique. Basées sur des projections économétriques à moyen terme ayant un caractère de prévision plus que d'objectif ([18a], chap. 14, [120], [4], [111]), ces procédures peuvent permettre de coordonner un mouvement existant mais pas de promouvoir un projet explicite impliquant des transformations profondes ([111], [25], chap. VI).

La seconde, efficace au niveau sectoriel (où les objectifs, quoique quantitativement complexes, sont peu différenciés), s'est révélée d'une grande inefficacité au niveau des collectivités territoriales de la majorité des pays socialistes, ce qui fait qu'elle est devenue en Occident synonyme de centralisation abusive et de bureaucratie paralysante ([34], [20], [21], chap. 3, pp. 108-121)

S'inspirant entre autre des idées développées par C.Gruson ([63], livre II, [64], en particulier pp. 27-91), on s'intéresse ici à une planification à horizon long (plusieurs décennies), volontariste pour le long terme en vue de

transformations profondes, mais concertée et souple à court et moyen terme : cette planification emprunte à la planification dirigiste le caractère volontariste (à long terme) qui consiste à axer le processus sur un objectif final plutôt que tendanciel, sur un projet global d'avenir préalablement explicité ; elle emprunte à la planification indicative la valeur donnée à la concertation (entre l'organe du plan et les acteurs de la vie économique), ce qui implique le refus d'un dirigisme centralisé et une exigence de souplesse faisant que l'objectif final est intentionnel plutôt que rigidement fixé et donne lieu à des réexamens périodiques en fonction de l'évolution des circonstances, des potentialités techniques et des besoins.

Le projet à long terme apparaît ainsi comme un guide permettant d'orienter les décisions à court terme et n'est pas à confondre avec ce que sera le système au terme (lui aussi révisable par une procédure glissante) du processus de planification.

Cela étant, on voit le rôle essentiel d'un instrument de prospective libre dans la mise en oeuvre d'un tel processus. D'une part, en ce qui concerne l'étude du projet à long terme, la concertation ne peut avoir lieu que si l'ensemble des acteurs concernés peut disposer d'images quantitatives de l'avenir, images contrastées en fonction des hypothèses faites pour exprimer les diverses tendances socio-politiques : les études finales (alinéas 12.c,d) vont permettre de confronter ces tendances aux contraintes géographiques, techniques et économiques. D'autre part, en ce qui concerne la politique à court et moyen terme, la souplesse et la concertation voulues réclament d'adapter la transition, et éventuellement le projet final, à l'évolution de la conjoncture, intérieure ou extérieure : les études de transition (alinéa 12.d) vont fournir, lors des réexamens périodiques, les indications macroéconomiques nécessaires.

On souligne que les indications à court terme ainsi obtenues, au niveau d'agrégation où sont les modèles de prospective en cause (alinéa 8.c), ne sont pas à confondre avec les mesures de détail du processus de planification : ces dernières, qui sont du ressort de la mise en oeuvre et non de celui de la prospective, doivent être déterminées par les organes décentralisés adéquats dans le cadre de la concertation voulue et des mécanismes répartiteurs du marché. Les procédures décentralisées ([81], [98], [22]) devraient, dans ce sens, être élaborées pour intégrer ces indications.

Le peu de cas qui est fait de la distinction entre prospective (appelée préplanification) et planification dans la conception de la planification dirigiste ([80], chap. 3, [70]) est un facteur important de rigidité de cette dernière, en particulier via l'étroitesse prospective et le caractère aveugle de la démarche d'optimisation normative basée sur un critère unique.

Cette distinction joue au contraire un rôle essentiel dans la conception brossée ici, sans pour cela tomber dans l'assimilation de prospective à prévision qui préside à la conception de la planification indicative. Au demeurant, les études prospectives diverses, basées sur l'analyse multicritère (alinéa 7.a), que l'on a en vue seraient irréalisables, du point de vue informatique, au niveau des évaluations de détail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.ABRAHAM-FROIS, E.BERREBI - Théorie de la valeur, des prix et de l'accumulation - *Economica*, 1976.
- [3] M.AGLIETTA, R.COURBIS, C.SEIBEL - Le modèle FIFI - Tome I, présentation générale - Coll. INSEE, C 22, 1973.
- [4] ATREIZE - La planification Française en pratique - 2^e édition, économie et humanisme, les éditions ouvrières, 1976.
- [6] G.BATAILLE - La part maudite - Ed. de Minuit, 1967.
- [11] O.BJERKHOLT - A precise description of the equation system of the economic model Modis III - *Economics of planning*, 8, 1968, pp. 26-56.
- [14] J.L.BRILLET - Mini-DMS, modèle macroéconomique de simulation - INSEE, Archives et documents, 35, octobre 1981.
- [15] R.BOYER - La croissance Française de l'après guerre et les modèles macro-économiques - *Revue économique*, 27, 1976.
- [17] B.BRUNHES - Présentation de la comptabilité nationale - Coll. INSEE, C 51, 6^e édition, 1976.
- [18] H.BUSSERY, R.COURBIS, C.SEIBEL - Le modèle FIFI - Tome II, les équations - Coll. INSEE, C 37-38, 1975.
- [18a] J.J.CARRE, P.DUBOIS, E.MALINVAUD - La croissance Française, un essai d'analyse économique causale de l'après guerre - Ed. du Seuil, 1972.
- [19] A.P.CARTER, A.BRODY - Applications of input-output analysis - Tomes 1 et 2, North Holland, 1972.
- [20] C.CASTORIADIS - La société bureaucratique - Tomes 1 et 2, Ed. 10/18, 1973.
- [21] C.CASTORIADIS - Devant la guerre - Fayard, 1981.
- [22] P.CHAMPSAUR, G.LAROQUE - Le plan face aux comportements stratégiques d'unités décentralisées ; *Annales de l'INSEE*, 42, 1981.
- [25] COMMISSION DU BILAN - La France en mai 1981 ; forces et faiblesses - La documentation Française, 1982.
- [28] R.COURBIS - Compétitivité et croissance en économie concurrencée - Tomes 1 et 2, Dunod, 1975.
- [32] P.COURREGE, J.DEFLANDRE, P.MATARASSO - Modèles macroéconomiques pour la prospective libre - Fascicule déposé au centre de documentation du CNRS ; 1982.
- [32a] P.COURREGE - Une micro-maquette illustrative du modèle ATHEMA - Fascicule I, document multigraphié, 1985 - fascicule II, en préparation.
- [32b] P.COURREGE, M.FEYRIT, J.LAVILLE, C.PEYTERMANN, C.SIMEON - Application du modèle ATHEMA à un canton rural d'Aquitaine - En préparation.
- [33] A.COUTIERE - Un modèle du système monétaire Français - *Statistiques et études financières*, 1975/17.
- [34] M.A.CROSNIER et Al. - Panorama de l'URSS ; institutions, économie - *Le courrier des pays de l'est*, 226-227, La documentation Française, 1980.
- [37] G.DEBREU - Théorie de la valeur - Dunod, 1966.
- [38] G.DEBREU, I.N.HERSTEIN - Nonnegative square matrices - *Cowles Commission Discussion Paper, Mathematics*, 414, 1952, pp. 597-607.
- [40] M.DELEAU, P.MALGRANGE - Les modèles macroéconomiques empiriques ; analyse et optimisation - Rapport final de la convention CORDES-CEPREMAP, 37/1974.

- [42] M.DELEAU, P.MALGRANGE, P.A.MUET - Une maquette représentative des modèles macroéconomiques- Annales de l'INSEE, 42, 1981, pp. 53-91.
- [43] J.DENIZET - Monnaie et financement - Dunod, 1969.
- [45] ELECTRICITE DE FRANCE - Recueil simplifié des méthodes - Service des études économiques générales, 1977.
- [49] W.D.FISHER - Clustering and aggregation in economics - The John Hopkins Press, 1969.
- [50] M.FLORENZANO - L'équilibre économique général transitif et intransitif : problèmes d'existence - Ed. du CNRS, 1981.
- [51] D.FOUQUET, J.M.CHARPIN, H.GUILLAUME, P.A.MUET, D.VALLET - DMS, modèle dynamique multisectoriel - coll. INSEE, C 64-65, 1978.
- [63] C.GRUSON - Origine et espoirs de la planification Française - Dunod, 1968.
- [64] C.GRUSON - Champ actuel d'une éthique politique - Publication multigraphiée du centre de Villemétrie (8, villa du parc Montsouris, 75014-Paris), 1978.
- [67] H.GUILLAUME, P.A.MUET - simulations et multiplicateurs dynamiques du modèle DMS - Revue économique, 30, 1979, pp.207-243.
- [70] G.M.HEAL - The theory of economic planning - North holland, 1973.
- [71] Ph.HERZOG, P.VAJDA - Esquisse d'un modèle de projection macroéconomique intégrant des variables financières - Annales de l'INSEE, 1, 1969.
- [73] Y.IJIRI - Fundamental queries in aggregation theory - Journal of the American Statistical Association, 66, 1971, pp. 766-782.
- [75] W.ISARD - Methodes d'analyse régionale - Tomes 1 et 2, Dunod, 1972.
- [79] L.V.KANTOROVITCH - Calcul économique et utilisation des ressources - Dunod, 1963.
- [81] S.KARLIN - Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics - Tome 1, Addison-Wesley, 1959.
- [80] T.S.KHACHATUROV (Ed.) - Methods of long term planning and forecasting - Mac Millan, 1976.
- [81] J.KORNAI, Th.LIPTAK - Two level planning ; Econometrica, 33, 1965, pp. 141-169.
- [83] D.LACAZE - Croissance et dualité en économie marxiste - Economica, 1976.
- [87] L.S.LASDON, A.D.WAREN - Survey of nonlinear programming applications - Operation research, 28, 1980, pp. 1029-1073.
- [89] W.LEONTIEF - La structure de l'économie Américaine - Ed. Génin, 1958.
- [90] W.LEONTIEF - Input-output economics - Oxford Univ. press, 1966.
- [91] W.LEONTIEF - Essais d'économiques - Calman-Levy, 1974.
- [94] J.LESOURNE - Technique économique et gestion industrielle - 2^e édition, Dunod, 1971.
- [95] G.MAAREK - Introduction au capital de Karl Marx - Calman-Levy, 1975.
- [96] P.MALGRANGE (Ed.) - Méthodes mathématiques de la modélisation macroéconomique - Les synthèses du SESORI, IRIA, 1979.
- [98] E.MALINVAUD - Decentralized procedures of planning ; dans "Activity analysis in the theory of growth and planning", E.MALINVAUD, M.O.L.BACHARACH (Ed.) - Mac Millan, 1967, pp. 170-208.
- [100] E.MALINVAUD - Leçons de microéconomie - 4^e édition, Dunod, 1977.

- [102] F.MOUTTET, C.PLATEAU, J.L.BRILLET, J.P.MORAND - Mini-DMS-Energie, modèle des interactions économie-énergie - INSEE, Archives et documents, 74, avril 1983.
- [106] M.MORISHIMA - Marx's Economics - Cambridge Univ. press, 1973.
- [108] J.Von NEUMANN - A model of general equilibrium - Review of economic studies, XIII (I), 1945-46, pp. 1-9.
- [111] F.PFERRUUX - Le IV^e plan français (1962-65) ; dans "Les problèmes de la planification", colloque de janvier 1962 - Ed. de l'Institut de Sociologie de l'Université libre de Bruxelles. 1962, pp. 135-167.
- [112] Ph.ROSSIGNOL, P.ROUX-VAILLAND - MINIFIFITOF : maquette du modèle français de planification ; étude de l'intégration des opérations financières - Annales de l'INSEE, 12-13, 1973.
- [114] B.SCHEFOLD - Von Neuman and Sraffa : mathematical equivalence and formal difference - The economic journal, 90, 1980, pp. 140-156.
- [115] M.SIMONNARD - Programmation linéaire - Tomes 1 et 2, 2^e édition, Dunod, 1972 et 1973.
- [116] P.SRAFFA - Production de marchandises par des marchandises - Dunod, 1977.
- [117] L.STOLERU - L'équilibre et la croissance économique - 4^e édition, Dunod, 1978.
- [120] Y.ULLMO - Les méthodes de la planification économique en France ; dans "La planification en France et au Japon" - Coll. INSEE, C 61, 1978.
- [121] P.VILLA - Modélisation macroéconomique des structures financières ; le modèle défi - INSEE, Archives et documents, 53, juillet 1982.

L'exposé qui suit est un complément au texte de présentation théorique du modèle ATHEMA ([0]) ; il est écrit pour en constituer un § 13. Les renvois à ce texte sont faits comme si l'exposé lui était ainsi intégré ; les références se rapportent à sa bibliographie ou à la bibliographie complémentaire ci-après.

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

- [0] P.COURREGÉ - ATHEMA : modèle macroéconomique pour la prospective libre - Arch. centre document. CNRS, 1985.
- [27a] E.COSTE, D.OURY - Analyse énergétique - Ecole des mines de Paris, 1978.
- [32c] P.COURREGÉ - Une micro-maquette illustrative du modèle ATHEMA - Fascicule II - En préparation.
- [32d] P.COURREGÉ - Détermination des prix dans le modèle ATHEMA : prix adaptés et prix duaux - Arch. centre document. CNRS, 1986.
- [109] P.OUTREQUIN.- Elaboration d'une méthode de comparaison des quantités d'énergie fixées dans les principales chaînes énergétiques - CNRS (ATP no 2957), CEREN, INSTN, 1978.

§ 13 - DETERMINATIONS DE PRIX ADAPTES

A la suite de l'alinéa 9.e, on s'intéresse ici à la détermination de prix "adaptés", via un système de contraintes spéciales convenable, à un bloc de variables physiques donné. Ce système de contraintes est présenté formellement (alinéa 13.b), puis discuté du point de vue de sa structure (alinéas 13.c et 13.d) et du point de vue de son utilisation (alinéas 13.e et 13.f).

a) Introduction. L'objet principal de l'exposé est de présenter un système de contraintes spéciales (alinéas 6.b et 7.c) qui lient les prix (variables de type Pr ; alinéa 3.b) au bloc des variables physiques (variables de types Xf, Xp, Xu, Xz ; alinéas 3.a et 7.b).

Ces contraintes constituent, d'une part une inscription dans le cadre formel du modèle ATHEMA de celles qui définissent les prix de production ([116], chap. 2 et 7 ; [1], chap. II et III), d'autre part et parallèlement une extension de celles des problèmes duals de la programmation linéaire ([115], chap. 5) à des solutions non optimales des problèmes primals : elles explicitent, par activités ou par groupes d'activités de chaque secteur intérieur, les soldes partiels en valeur, soldes qui peuvent ainsi être contrôlés (bornés ou minimisés) dans les déterminations. Elles comportent de nombreux paramètres arbitraires (par exemple dans la définition des regroupements d'activités) qui permettent une grande variabilité d'utilisation.

Dans le contexte de la prospective libre auquel on s'intéresse ici (alinéa 1.a, § 9), le système de contraintes en cause est plutôt axé sur la détermination de systèmes de prix intérieurs "adaptés" à un bloc de variables physiques donné, en particulier adaptés à des niveaux donnés de transformations en cours, ce bloc de variables physiques ayant, en général, lui-même été préalablement obtenu par une détermination à prix exogènes (alinéa 9.e).

Ce type de détermination des prix correspond à la problématique suivante, dont l'explicitation va permettre de préciser le sens du terme "adapté".

Un projet préalablement étudié en termes physiques dans le contexte de la prospective libre (alinéa 12.e), par exemple au moyen de réalisations consolidées (alinéa 8.e), doit ensuite être confronté aux problèmes d'organisation intérieure par des études basées sur des réalisations comportant une représentation multisectionnelle de cette dernière (alinéa 9.d).

Ces études peuvent d'abord être faites avec un système de prix intérieurs "quelconque", par exemple avec le système des prix à l'extérieur, lequel peut être considéré comme imposé par l'impératif du libre échange ([3], pp. 21-22 ; [28], tome 1, chap. 2, alinéa 3.2) ; les transferts de répartition entre secteurs sont alors en général importants (impôts à certains secteurs, subventions à d'autres), leurs montants mesurant l'inadéquation du système de prix retenu au projet physique en cause ; or, en dehors de toute idéologie libérale, des transferts importants ont des inconvénients graves, en particulier parcequ'ils faussent le calcul économique, la comptabilité en valeur ne donnant plus une image fidèle des circulations physiques entre secteurs.

D'où l'idée de compléter les études précédentes par la détermination de systèmes de prix intérieurs "adaptés" au projet en cause en ce sens qu'ils minimisent certains transferts de répartition ou certains soldes en valeur par activités. C'est cette idée que le système de contraintes présenté vise à permettre d'expérimenter numériquement dans le cadre formel du modèle ATHEMA.

Les prix ainsi déterminés peuvent avoir des significations diverses, selon

la normalisation (l'unité de valeur) retenue, normalisation qui est l'un des paramètres de commande du système de contraintes en cause : le choix d'une unité de valeur calée sur celle des prix à l'extérieur correspond à une approche plus monétaire, par exemple axée sur le financement équilibré (i.e. avec le moins de transferts possible) de transformations profondes ; le choix, comme unité de valeur, de la quantité unité d'un bien (travail, énergie, sol, etc) à une approche plus physique, les prix en question représentant alors les "contenus" en ce bien relativement au régime ou au cheminement en cause.

On souligne que l'utilisation précédente du système de contraintes introduit n'est pas la seule possible : par exemple, il pourrait aussi être utilisé dans des études axées sur la recherche d'un "équilibre général", i.e. avec détermination conjointe des prix et des variables physiques, dans le cadre formel du modèle ATHEMA. Mais, étant plus normatif que représentatif de comportements actuels, il est sans doute peu adapté à ce genre d'exercice qui relève plutôt de la prévision.

b) Formulation du système de contraintes. On présente d'abord ici de façon formelle le système de contraintes spéciales que l'on a en vue, son interprétation étant discutée aux alinéas 13.c et 13.d. Ce système, dit système xpr, est constitué des contraintes de types xq, xv, xg, xn, xo, xc définies par les relations (13.1) à (13.6) ci-après :

$$(13.1) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, m \in M_q(s), \quad [\text{contr. } xq(t,s,m)]$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left[\sum_{j \in J} Q_f(s,m,j) C_f(i,j) X_f(t,s,j) \right. \\ & \quad + \sum_{j \in J_p} Q_p(s,m,j) C_p(i,j) Y_p(t,s,j) \\ & \quad + \sum_{h \in H} [- Q_u(s,m,h) C_u(i,h) X_u(t,s,h) \\ & \quad \left. - Q_b(s,m,i) Y_b(t,s,i) \right] Pr(t,s,i) = X_1(t,s,m) - X_2(t,s,m); \end{aligned}$$

$$(13.2) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, m \in M_v(s), \quad [\text{contr. } xv(t,s,m)]$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left[\sum_{e \in E_{v_i,s}} V_r(s,m,i) X_z(t,e) \right. \\ & \quad + \sum_{i' \in I} \sum_{s'' \in S_n} \sum_{e \in E_{v_i',s''}} V_z(s,m,i') C_z(s,i,e) X_z(t,e) \\ & \quad \left. - V_b(s,m,i) Y_b(t,s,i) \right] Pr(t,s,i) \\ & - \sum_{i \in I} \sum_{e \in E_{v_i,s}} V_r(s,m,i) X_z(t,e) Pr(t,e) = X_3(t,s,m) - X_4(t,s,m), \quad \text{où} \end{aligned}$$

(13.2a) $e \in E_{v_i,s}$ équivaut à $e \in E$ et $e = (i, s', s)$ avec $s' \in S_n$ et $s' \neq s$;

$$(13.3) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, i \in I, \quad [\text{contr. } xg(t,s,i)]$$

$$Pr(t,e) = Pr(t,s,i) \quad \text{pour } e \in E_{w_i,s}, \quad \text{où}$$

(13.3a) $e \in E_{w_i,s}$ équivaut à $e \in E$ et $e = (i, s, s'')$ avec $s'' \in S_n$ et $s'' \neq s$;

$$(13.4) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, m \in M_n(s), \quad [\text{contr. } xn(t,s,m)]$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left[\sum_{e \in E_{n_i,s}} N_r(s,m,i) X_z(t,e) \right. \\ & \quad + \sum_{i' \in I} \sum_{s'' \in S_n} \sum_{e \in E_{n_i',s''}} N_z(s,m,i') C_z(s,i,e) X_z(t,e) \\ & \quad \left. - N_b(s,m,i) Y_b(t,s,i) \right] Pr(t,s,i) \\ & - \sum_{i \in I} \sum_{e \in E_{n_i,s}} N_r(s,m,i) X_z(t,e) Pr(t,e) = X_5(t,s,m) - X_6(t,s,m), \quad \text{où} \end{aligned}$$

(13.4a) $e \in E_{n_i,s}$ équivaut à $e \in E$ et $e = (i, s', s)$ avec $s' \in S_x$;

$$(13.5) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, m \in Mo(s), \quad [\text{contr. } x_0(t,s,m)]$$

$$\sum_{i \in I} \left[- \sum_{e \in Eo_{i,s}} Or(s,m,i) Xz(t,e) \right. \\ \left. + \sum_{i' \in I} \sum_{s' \in S_n} \sum_{e \in Eo_{i',s'}} Oz(s,m,i') Cz(s,i,e) Xz(t,e) \right. \\ \left. - Ob(s,m,i) Yb(t,s,i) \right] Pr(t,s,i)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{e \in Eo_{i,s}} Or(s,m,i) Xz(t,e) Pr(t,e) = X7(t,s,m) - X8(t,s,m), \text{ où}$$

(13.5a) $e \in Eo_{i,s}$ équivaut à $e \in E$ et $e = (i,s,s')$ avec $s' \in S_x$;

$$(13.6) \quad \text{pour } t \in T, e \in E_n \text{ ou } e \in E_o, \quad [\text{contr. } x_c(t,e)]$$

$$Pr(t,e) = Tx Prx(t,e), \text{ où}$$

(13.6a) E_n [resp. E_o] est la réunion des $E_{n_i,s}$ [resp. $E_{o_i,s}$] pour $i \in I, s \in S_n$.

Dans les relations précédentes :

- d'une part I, J, J_p, H, S_n et S_x, E désignent les nomenclatures, respectivement des biens, des activités, des parcs, des transformations, des secteurs intérieurs et extérieurs, des échanges (alinéas 2.a et 2.b), tandis que $M_q(s), M_v(s), M_n(s), M_o(s)$ ($s \in S_n$) sont des ensembles finis d'indices repérant les contraintes en cause ;

- d'autre part $X_f(t,s,j), X_p(t,s,j), X_u(t,s,h), X_z(t,e), Pr(t,e)$ désignent de façon standard les valeurs des variables de base (alinéas 3.a et 3.b) de types X_f, X_p, X_u, X_z, Pr en cause, $Y_p(t,s,j)$ et $Y_b(t,s,i)$ les valeurs correspondantes des variables dérivées de types Y_p et Y_b [alinéa 4.a, relations (4.1) et (4.3)], $Pr(t,s,i), X_k(t,s,m)$ ($k = 1, \dots, 8$) et T_x les valeurs (toujours ≥ 0) de variables spéciales ;

- enfin les quantités $Prx(t,e)$ désignent les prix à l'extérieur supposés donnés et $Q_f(s,m,j), Q_p(s,m,j), Q_u(s,m,h), Q_b(s,m,i), V_r(s,m,i), V_z(s,m,i), V_b(s,m,i), N_r(s,m,i), N_z(s,m,i), N_b(s,m,i), O_r(s,m,i), O_z(s,m,i), O_b(s,m,i)$ des coefficients donnés entre 0 et 1, dits coefficients de regroupement.

Ces coefficients assurent des répartitions entre contraintes (alinéa 13.c) ; dans ce sens, on introduit les conditions de cohérence :

$$(13.7) \quad \text{pour } s \in S_n, j \in J, j' \in J_p, h \in H,$$

$$\sum_{m \in M_q(s)} Q_f(s,m,j) = 1, \quad \sum_{m \in M_q(s)} Q_p(s,m,j') = 1, \quad \sum_{m \in M_q(s)} Q_u(s,m,h) = 1 ;$$

$$(13.8) \quad \text{pour } s \in S_n, i \in I,$$

$$\sum_{m \in M_v(s)} V_r(s,m,i) = 1, \quad \sum_{m \in M_n(s)} N_r(s,m,i) = 1, \quad \sum_{m \in M_o(s)} O_r(s,m,i) = 1 ;$$

$$(13.9) \quad \text{pour } s \in S_n, i \in I,$$

$$\sum_{m \in M_v(s)} V_z(s,m,i) = 1, \quad \sum_{m \in M_n(s)} N_z(s,m,i) = 1, \quad \sum_{m \in M_o(s)} O_z(s,m,i) = 1 ;$$

$$(13.10) \quad \text{pour } s \in S_n, i \in I,$$

$$\sum_{m \in M_q(s)} Q_b(s,m,i) + \sum_{m \in M_v(s)} V_b(s,m,i) + \sum_{m \in M_n(s)} N_b(s,m,i) + \sum_{m \in M_o(s)} O_b(s,m,i) = 1 ;$$

Ces conditions sont liées à l'équation de centrage :

$$(13.11) \quad \text{pour } t \in T, s \in S_n, \quad [\text{cen}(t,s)]$$

$$\sum_{m \in M_q(s)} [X1(t,s,m) - X2(t,s,m)] + \sum_{m \in M_v(s)} [X3(t,s,m) - X4(t,s,m)] \\ + \sum_{m \in M_n(s)} [X5(t,s,m) - X6(t,s,m)] + \sum_{m \in M_o(s)} [X7(t,s,m) - X8(t,s,m)] =$$

$$Z_r(t,s) - Z_d(t,s),$$

où $Z_d(t,s)$ et $Z_r(t,s)$ sont les valeurs des variables dérivées de types Z_d et Z_r

[alinéa 4.d, relations (4.4) et (4.6)]. Cela étant, une vérification laborieuse mais sans difficulté permet de montrer le résultat suivant qui va jouer un rôle important dans la démarche visée (alinéa 13.c) :

Lemme de centrage. Si les conditions de cohérence (13.7) à (13.10) sont vérifiées, l'équation de centrage (13.11) résulte des contraintes (13.1) à (13.5).

c) Schéma heuristique. Les diverses contraintes du système xpr (alinéa 13.b) sont analysées à l'alinéa 13.d. Au préalable, on indique ici une procédure heuristique qui conduit à ce système et est étroitement liée à la finalité de la démarche. Inversant en quelque sorte le lemme de centrage, cette procédure consiste à partir de l'équation de centrage (13.11) comme objectif à vérifier et, en introduisant les contraintes de type xg, à décomposer son second membre en les premiers membres des contraintes de types xq, xv, xn, xo.

Examinant d'abord l'équation de centrage cen(t,s) relative à t \in T et seSn, on voit que son second membre, Zr(t,s) - Zd(t,s), représente le solde en valeur des échanges de biens par le secteur s ; or ce solde est égal au solde des transferts du secteur s [contrainte qo(t,s) d'équilibre du secteur s, alinéa 5.c, relation (5.9)] ; donc, pour contrôler ("minimiser" en valeur absolue) ce dernier, ce qui est l'idée de base de la démarche (alinéa 13.a), il est naturel de chercher à déterminer les prix en contrôlant les seconds membres (donc les premiers membres) des contraintes de types xq, xv, xn et xo, cela, par exemple, en minimisant le critère Zv défini par la relation (13.12) ci-après ou des critères analogues (alinéa 13.e) :

$$(13.12) \quad Zv = \sum_{t \in T} \sum_{s \in S_n} [\sum_{m \in M_q(s)} [X1(t,s,m) + X2(t,s,m)] + \sum_{m \in M_v(s)} [X3(t,s,m) + X4(t,s,m)] + \sum_{m \in M_n(s)} [X5(t,s,m) + X6(t,s,m)] + \sum_{m \in M_o(s)} [X7(t,s,m) + X8(t,s,m)]]$$

Inversement, le problème est de décomposer chaque solde Zr(t,s) - Zd(t,s) en une somme de termes, de telle sorte que l'égalité (approximative) à zéro de chacun d'eux, d'une part soit possible (ce qui réclame qu'il n'y ait pas trop de termes...), d'autre part détermine convenablement les prix cherchés (ce qui réclame qu'il y en ait assez...).

Pour cela, on part de l'expression suivante (13.13) de Zr(t,s) - Zd(t,s), expression résultant directement des définitions [relations (4.4) et (4.6), alinéa 4.d ; relations (13.2a), (13.3a), (13.4a), (13.5a), alinéa 13.b] :

$$(13.13) \quad Zr(t,s) - Zd(t,s) = \sum_{i \in I} [\sum_{e \in E_{w_s,i}} Xz(t,e)Pr(t,e) + \sum_{e \in E_{o_s,i}} Xz(t,e)Pr(t,e) - \sum_{e \in E_{v_s,i}} Xz(t,e)Pr(t,e) - \sum_{e \in E_{n_s,i}} Xz(t,e)Pr(t,e)]$$

Introduisant alors les variables spéciales Pr(t,s,i) en supposant que la contrainte xg(t,s) [relation (13.3)] est satisfaite, on peut écrire la première somme au second membre de (13.13) sous la forme $[\sum_{e \in E_{w_s,i}} xz(t,e)]Pr(t,s,i)$, puis y substituer, à la somme des xz(t,e) sur E_{w_s,i}, son expression tirée de la relation de définition (4,3) de Yb(t,s,i) (alinéa 4.a), après avoir décomposé dans cette relation la somme sur E_{i,s}, en des sommes sur E_{w_s,i} et sur E_{v_s,i}. Portant le résultat de cette substitution dans (13.13), on obtient :

$$(13.14) \quad Zr(t,s) - Zd(t,s) = \sum_{i \in I} [\sum_{j \in J} C_f(i,j)X_f(t,s,j) + \sum_{j \in J_p} C_p(i,j)Y_p(t,s,j) + \sum_{h \in H} C_u(i,h)X_u(t,s,h)] Pr(t,s,i) + \sum_{i \in I} [\sum_{e \in E_{v_s,i}} Xz(t,e) [Pr(t,s,i) - Pr(t,e)]]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in I} \left[\sum_{e \in E_{s,i}} X_z(t,e) [Pr(t,s,i) - Pr(t,e)] \right] \\
& - \sum_{i \in I} \left[\sum_{e \in E_{o,s,i}} X_z(t,e) [Pr(t,s,i) - Pr(t,e)] \right] \\
& - \sum_{i \in I} Y_b(t,s,i) Pr(t,s,i) + \sum_{i \in I} \left[\sum_{e \in E} C_z(s,i,e) X_z(t,e) Pr(t,s,i) \right].
\end{aligned}$$

Dans cette équation (13.14), qui est une variante de l'équation de centrage, les quatre premières sommes sur $i \in I$ figurant au second membre sont relatives respectivement, à la production, aux échanges intérieurs, aux importations et aux exportations, tandis que les deux dernières sommes sont relatives aux excédents de biens et aux consommations d'échanges (alinéas 3.a, 4.a, 4.b).

Ces quatre premières sommes correspondent respectivement aux premiers membres des contraintes de types x_q, x_v, x_n, x_o relatives à $t \in T$ et $s \in S_n$: ces contraintes sont obtenues, d'une part en décomposant les sommes en question au moyen des coefficients de regroupements de types Q_f, Q_p, Q_u pour la première et V_r, N_r, O_r pour les trois autres, d'autre part en répartissant les deux dernières sommes sur $i \in I$ entre les quatre types de contraintes au moyen des coefficients de regroupement de types Q_b, V_b et V_z, N_b et N_z, O_b et O_z respectivement. Ces décompositions et les options correspondantes sont analysées à l'alinéa 13.d ; elles fournissent une approche heuristique du lemme de centrage.

Chacune des contraintes de types x_q, x_v, x_n, x_o est ainsi relative à une période $t \in T$, à un secteur intérieur $s \in S_n$ et à un indice de regroupement m ; ce dernier repère une somme de termes représentant des recettes ou dépenses à répartir via un ou des indice(s) de sommation [par exemple les termes $Q_f(s,m,j)C_f(i,j)X_f(t,s,j)Pr(t,s,i)$, avec $j \in J$ comme indice de sommation, pour la contrainte $x_q(t,s,m)$]. Ces regroupements sont spécifiés par les coefficients de regroupement [$Q_f(t,s,m)$ dans l'exemple ci-dessus], lesquels sont arbitraires (sous réserve de vérifier les conditions de cohérence) et permettent de prendre en compte des types variés de consolidations et d'affectations pour les recettes et les dépenses en cause : du regroupement discret, où indice de regroupement et indice de sommation coïncident [exemple du point (2) de l'alinéa 13.d], au regroupement grossier, où l'indice de regroupement ne prend qu'une valeur.

On souligne que les contraintes de types x_q, x_v, x_n, x_o ne font que définir les soldes en valeur qui constituent leurs seconds membres. Ces soldes sont exprimés comme différences ($X_1 - X_2$ pour $x_q, X_3 - X_4$ pour x_v , etc) pour que les variables de types X_1, \dots, X_8 puissent être toujours ≥ 0 ; ces variables de contrôle sont appelées à être fixées, bornées, contrôlées en minimisation dans les déterminations [commentaire précédent la relation (13.12) ; alinéa 13.e]. Ce contrôle des seconds membres est indiquée ci-après par le symbole "0".

d) Analyse. Les points (1) à (4) ci-après contiennent divers commentaires concernant la structure et la signification des contraintes constituant le système x_{pr} . D'autres commentaires sont faits à l'alinéa 13.e en même temps que sont discutés les schémas d'utilisation. En outre, le lien avec la théorie de la dualité en programmation linéaire est étudié dans [32d].

(1) Les contraintes de types x_q, x_v, x_g, x_n, x_o font intervenir, en plus des variables de prix standard, $Pr(t,e)$, les variables spéciales $Pr(t,s,i)$ qui représentent aussi des prix, mais sont indexés par les couples (s,i) ($s \in S_n, i \in I$; secteur intérieur, bien) au lieu des échanges $e \in E$: $Pr(t,s,i)$ désigne ainsi le prix du bien i dans le secteur s à la période t . Ces prix "intra-sectoriels", par opposition aux prix standard "inter-sectoriels", sont d'abord des intermédiaires de calcul commodes via les contraintes de types x_g [passage de (13.13) à (13.14), alinéa 13.c ; point (3) ci-dessous]. Il est cependant

tenant de les interpréter comme valeurs d'usage dans les divers secteurs, par opposition aux valeurs d'échange représentées par les prix standard : à ce stade, cette interprétation n'est qu'un jeu de mots, mais qui s'accorde bien au jeu du formalisme. Dans cet ordre d'idées, on note que le prix intra-sectoriel $Pr(t,s,i)$ pourrait aussi être considéré comme un prix standard $Pr(t,e_s,i)$ associé à un échange fictif $e_{s,i}=(i,s,s)$.

Conformément aux conventions faites relativement à la valorisation des biens et des opérations (alinéa 3.b), tous les prix variables [prix intérieurs et extérieurs, inter-sectoriels, $Pr(t,e)$, prix intra-sectoriels $Pr(t,s,i)$] sont supposés relatifs à une même monnaie, la monnaie intérieure de l'ensemble économique considéré. Par contre, les prix à l'extérieur $Prx(t,e)$, qui sont des données (alinéa 13.b), sont supposés relatifs à une monnaie extérieure, éventuellement différente de la monnaie intérieure. On souligne la distinction faite entre les prix extérieurs $Pr(t,e)$ ($e \in E_n$ ou $e \in E_o$) et les prix à l'extérieur correspondants $Prx(t,e)$, le taux de change Tx étant le rapport entre les deux (contraintes de type xc).

Le taux de change est supposé indépendant des secteurs extérieurs concernés, ce qui exprime l'hypothèse d'une seule monnaie extérieure. Il est aussi supposé indépendant de la période t en cause. Cette dernière hypothèse est assez limitative ; elle assure la compatibilité du système xpr avec les contraintes d'évolution des encours (types ep et em , alinéa 5.c). L'introduction de taux $Tx(t)$ dépendants de la période dans les contraintes $xc(t,e)$ réclamerait de modifier les contraintes $ep(t,f)$ et $em(t,f)$ relatives aux imputations f concernant les secteurs extérieurs, par exemple en multipliant les membres de gauche par $Tx(t)$ et ceux de droite par $Tx(t+1)$.

(2) Les contraintes de type xq concernent la production : les trois premières sommes au premier membre représentent les recettes ou les dépenses affectées au regroupement m et concernent respectivement le fonctionnement, la maintenance et les transformations ; le dernier terme (celui en Y_b) représente la valeur des excédents affectés au regroupement m [point (4)].

Ces contraintes généralisent directement celles intervenant dans la définition des prix de production "avec production conjointe" ([116], chap. 7 ; [1], chap. III, section II). Pour l'illustrer, on peut considérer le cas particulier du regroupement discret (alinéa 13.c) spécifié comme suit : $M_q(s)$ coïncide avec J ; $Q_f(s,m,j) = 0$ si $m \neq j$ et $Q_f(s,m,m) = 1$; J_p et H sont vides (ou les coefficients de types C_p et C_u sont nuls). Alors $x_q(t,s,j)$ s'écrit schématiquement :

$$(13.15) \quad \left[\sum_{i \in I} C_f(i,j) Pr(t,s,i) \right] X_f(t,s,j) \sim 0,$$

en supposant de plus les excédents $Y_b(t,s,i)$ nuls, ce qui permet de mettre $X_f(t,s,j)$ en facteur, et en convenant que " ~ 0 " signifie une minimisation en valeur absolue (alinéa 13.c). D'où l'équation usuelle ([1], p. 98) pour tout $j \in J$ tel que $X_f(t,s,j) \neq 0$, en remplaçant " \sim " par " $=$ ".

Cela étant, on passe de (13.15) à (13.1) par introduction des termes en X_p , X_u , Y_b , en notant que la forme (13.15) [avec $X_f(t,s,j)$ en facteur] ne convient pas à la généralisation, laquelle réclame au contraire de mettre la somme de ces termes en facteur de $Pr(t,s,i)$: c'est à travers eux que les contraintes font intervenir les niveaux physiques (propos essentiel de la démarche, alinéa 13.a), au contraire de celles de Sraffa qui en sont indépendantes (voir aussi [32d] à ce sujet). On souligne la prise en compte explicite du capital fixe et de ses transformations, via les variables de types X_p et X_u , que permet le formalisme du modèle ATHEMA à la différence de ceux de Von Neumann et Sraffa.

(3) Les contraintes de types xv, xq, xn, xo, xc concernent les échanges : échanges intérieurs (types xv et xg), importations (types xn et xc) et exportations (types xo et xc).

Les contraintes de types xv, xn, xo ont des structures analogues. Les

termes principaux y sont sur la 1ère et sur la 4ème ligne, ce qui fait que ces contraintes peuvent s'écrire schématiquement :

$$(13.16) \quad \sum_{i \in I} \sum_{e \in E_{i,s}} \#r(s,m,i) Xz(t,e) [Pr(t,s,i) - Pr(t,e)] \underset{\sim}{=} 0$$

où # est mis respectivement pour V ou v (type xv), N ou n (type xn), 0 ou o (type xo) et où $\underset{\sim}{=}$ 0 signifie une minimisation en valeur absolue (alinéa 13.c).

Sous cette forme, on voit que ces contraintes expriment une incitation à rapprocher, à rendre égaux, les prix $Pr(t,s,i)$ et $Pr(t,e)$ pour $e \in E_{i,s}$, cette incitation étant d'autant plus forte que, d'une part la quantité échangée $Xz(t,e)$ est plus grande, d'autre part la répartition choisie, via les coefficients de regroupement $\#r(s,m,i)$ ($i \in I$), charge davantage le bien i. Par exemple, un regroupement discret, i.e. tel que $M\#(s)=I$, $\#r(s,m,i) = 0$ si $m \neq i$ et $\#r(s,i,i) = 1$ (alinéa 13.c), stipule l'incitation pour chaque $i \in I$, tandis qu'un regroupement grossier ne stipule qu'une incitation en moyenne sur tous les $i \in I$.

Pour les contraintes de types xv et xn, l'incitation exprimée par (13.16) concerne le rapprochement du prix $Pr(t,e)$ et du prix intra-sectoriel $Pr(t,s,i)$ dans le secteur destinataire de e [relations (13.2a) et (13.4a)]. Pour les contraintes de type xv, cette incitation est complétée, par les contraintes de type xg sur lesquelles repose l'introduction des prix intra-sectoriels $Pr(t,s,i)$ [alinéa 13.c et point (1) ci-dessus] ; ces contraintes expriment que le prix d'un échange intérieur est toujours celui du secteur fournisseur [relation (13.3a)]. Pour les contraintes de type xn, le secteur fournisseur est extérieur et l'incitation en cause est complétée par les contraintes de type xc, lesquelles fixent, au taux de change T_x près [point (1) ci-dessus et alinéa 13.e], les prix $Pr(t,e)$ des importations $e \in E_n$ [relation (13.6a)]. Enfin, pour les contraintes de type xo, la situation est inverse de celle des contraintes de type xn, les exportations $e \in E_o$ remplaçant les importations $e \in E_n$ [relations (13.5a) et (13.6a)].

Au delà du rôle particulier que la présentation adoptée ici fait jouer aux contraintes de type xg (alinéa 13.c), les contraintes de type xv et xg sont à considérer parallèlement et en rapport avec l'option concernant la manière dont les prix intérieurs dépendent des échanges (et pas seulement des biens ; alinéa 3.b). L'option retenue ici stipule des formes (et des rôles dans la démarche) différentes pour les contraintes de types xv et xg. D'autres options du même genre sont possibles : soit par interversion des secteurs fournisseurs et destinataires, soit par symétrisation. De plus, il y a l'option rigide qui, ignorant les nuances qu'introduisent les contraintes de types xg et xv, stipule qu'il n'y a qu'un prix intérieur pour chaque bien, mais ce prix pouvant différer des prix à l'extérieur ; cette option peut être exprimée en adjoignant, aux contraintes de type xg, les contraintes,

$$(13.17) \quad \text{pour } t \in T, i \in I, s \in S_n, s' \in S_n, Pr(t,s,i) = Pr(t,s',i).$$

(4) Les termes en $Yb(t,s,i)$ dans les contraintes de types xq, xv, xn, xo sont obtenus par la décomposition [avec la condition de cohérence (13.10)] du terme $Yb(t,s,i)Pr(t,s,i)$ figurant dans l'avant dernière somme sur $i \in I$ au second membre de la relation (13.14), cela en conservant le signe - qui figure devant cette somme.

Au delà de cet argument formel, ce signe - peut être justifié comme suit, par exemple pour une contrainte $xq(t,s,m)$: une valeur > 0 de $Yb(t,s,i)$ signifie que le bien i donne lieu dans le secteur s à un excédent, donc correspond à une consommation implicite, ce qui réclame que le terme en $Yb(t,s,i)Pr(t,s,i)$ dans cette contrainte soit négatif comme les autres termes de consommation (convention sur les coefficients techniques ; alinéa 4.b) ; de façon symétrique, une valeur < 0 de $Yb(t,s,i)$ correspond à un apport implicite, ce qui réclame que le terme en $Yb(t,s,i)Pr(t,s,i)$ soit positif comme les termes de production et justifie le signe - en cause. Le même argument s'applique aux

contraintes de types xv, xn, xo, contraintes où les consommations ou apports correspondent à des échanges du secteur s ; en particulier, ce signe - figure aussi dans les contraintes de type xo, bien que les termes principaux [premier membre de (13.16), point (3) ci-dessus] soient changés de signe par rapport aux contraintes de types xv et xn.

Une autre approche des termes en $Y_b(t,s,i)$ est présentée dans [32d].

De même, les termes en $C_z(s,i,e)$ dans les contraintes de types xv, xn, xo sont obtenus par la décomposition [avec les conditions de cohérence (13.9)] du terme $C_s(s,i,e)X_z(t,e)Pr(t,s,i)$ figurant dans la dernière somme sur $i \in I$ au second membre de la relation (13.14). La décomposition retenue repose sur l'option consistant à affecter aux contraintes de type xv, xn et xo les consommations correspondant respectivement aux échanges intérieurs, aux importations et aux exportations, cette décomposition correspondant formellement à celle de la somme sur E en cause figurant dans la relation (13.14) en les sommes figurant sur les secondes lignes des relations (13.2), (13.4) et (13.5) respectivement. Cette option n'est évidemment pas la seule possible ; en particulier certaines consommations d'échanges pourraient être affectées aux contraintes de type xq, même si ces dernières concernent la production.

e) Schémas d'utilisation. On s'intéresse essentiellement ici (alinéas 13.a et 9.e) à la détermination, via le système xpr introduit à cette fin (alinéa 13.b), de systèmes de prix intérieurs "adaptés" à un bloc de variables physiques donné (variables de types Xf, Xp, Xu, Xz ; alinéa 7b).

On considère donc des réalisations du modèle (alinéa 7.c) dans lesquelles, d'une part la structure spéciale inclut le système xpr, d'autre part toutes les variables de types Xf, Xp, Xu, Xz sont exogènes, les niveaux de ces variables ayant été en général obtenus par une détermination précédente à prix exogènes (alinéa 9.e). Dans ce cadre, on cherche à déterminer le système de prix par minimisation d'un critère exprimant le contrôle visé des transferts [alinéas 13.a, 13.c et ci-dessous ; problème (9.11), alinéa 9.e].

Ainsi, les contraintes effectives pour les déterminations visées sont : d'une part celles de la structure de base (alinéa 7.a) ; d'autre part les contraintes spéciales de types xq, xv, xg, xn, xo, xc constituant le système xpr en cause ; puis les contraintes circonstancielle (alinéa 6.a) qui fixent aux valeurs données le bloc des variables physiques ; enfin, éventuellement, des contraintes supplémentaires (circonstancielle et spéciale, alinéas 6.a et 6.b) qu'il est inutile de détailler ici.

On souligne l'interdépendance des divers groupes de contraintes ci-dessus : les prix à déterminer figurent aussi dans les contraintes d'équilibre comptable des secteurs intérieurs (type qo, alinéa 5.c) ; les variables figurant dans les contraintes du système xpr (types Pr, X1, ..., X8, Tx) peuvent aussi figurer dans certaines des contraintes circonstancielle (par exemple y être fixées ou bornées) ou dans certaines des autres contraintes spéciales ; etc. On souligne aussi que, puisque le bloc des variables physiques est exogène, les seules contraintes de base jouant un rôle sont les contraintes comptables (alinéa 5.b) et que ces contraintes ainsi que celles du système xpr sont linéaires.

L'influence des prix à l'extérieur $Pr_x(t,e)$ ($e \in E_n$ ou $e \in E_o$), supposés donnés, sur les prix intérieurs à déterminer est d'abord conditionnée par l'option retenue concernant le taux de change Tx, c'est à dire le rapport, qu'expriment les contraintes de type xc, entre les prix extérieurs $Pr(t,e)$ ($e \in E_n$ ou $e \in E_o$), qui sont a priori des variables, et les prix à l'extérieur. Deux options sont possibles à ce propos selon que le taux de change Tx est exogène ou endogène.

Dans le cas où Tx est exogène, les contraintes de type xc reviennent à

supposer que les prix extérieurs sont exogènes, par exemple égaux aux prix à l'extérieur si T_x est fixé à 1 ; les prix intérieurs à déterminer sont alors calés sur les prix à l'extérieur, normés par ces derniers ; l'approche est faite en termes monétaires.

Dans le cas où T_x est endogène, le système xpr doit être complété par une contrainte de normalisation définissant l'unité de valeur avec laquelle sont mesurés les prix intérieurs, faute de quoi, les déterminations faites avec les critères envisagés (alinéas 13.a, 13.c et ci-dessous) ont toutes chances de ne fournir que des prix intérieurs nuls. Une contrainte de normalisation simple s'écrit :

$$(13.18) \quad \text{pour } t \in T, \quad Pr(t, s_0, i_0) = 1,$$

où $s_0 \in S_n$ et $i_0 \in I$ sont respectivement un secteur intérieur et un bien spécifiés, l'unité de valeur étant ainsi la quantité unité du bien i_0 considérée dans le secteur s_0 (cette relativité à un secteur est importante). Chaque prix intra-sectoriel $Pr(t, s, i)$ représente alors le "contenu", en le bien i_0 , du bien i dans le secteur intérieur $s \in S_n$, contenu qui est relatif (dans le cadre des options sous-jacentes au système xpr en cause), non seulement au bien de référence i_0 et au secteur s_0 , mais encore au bloc des variables physiques en cause et au critère utilisé.

On souligne que le système de prix-contenus ainsi déterminé peut aussi bien définir une monnaie qu'un système de prix intérieurs calé sur les prix à l'extérieur : du point de vue de la représentation formelle des circulations monétaires, rien ne distingue le cas où T_x est exogène de celui en cause ici où T_x est endogène avec la contrainte (13.18). En particulier, dans ce dernier cas, on détermine conjointement des prix-contenus intra-sectoriels qui sont les contenus proprement dits et des prix-contenus inter-sectoriels.

Ces considérations peuvent être appliquées avec des biens de référence i_0 variés : types divers de travail, d'énergie, de matières premières, etc.

Le choix d'un bien "travail" pour i_0 fait référence à la théorie de la valeur-travail. Cette théorie a été surtout développée dans le cadre du modèle à production simple ([116], 1ère partie, [1], chap. I, [95], [106]) et accessoirement dans celui de la dualité en programmation linéaire ([83], [114]) ; reprise dans le cadre présenté ici elle pourrait donner lieu, soit à des traitements numériques plus "réalistes" que ceux que permettent les cadres précédents, soit à des développements théoriques. Un tel développement pourrait, par exemple, concerner l'adaptation du concept de marchandise-étalon de Sraffa ([116], chap. IV), en vue de définir des contraintes de normalisation plus élaborées que celles exprimées par la relation (13.18).

Le choix d'un bien "énergie" pour i_0 fait référence à l'analyse énergétique, laquelle, au niveau macroéconomique, a essentiellement été développée dans le cadre économétrique du modèle de Leontief ([27a], [109], § I.C) ; le cadre proposé ici devrait permettre des traitements conjuguant une approche macroéconomique avec une approche de la base physique en termes techniques (alinéas 1.b et 8.c), comme dans l'analyse énergétique sectorielle ([109], § I.B, chap. II).

Ces traitements permettraient en particulier d'étudier numériquement comment, au niveau macroéconomique, intersectoriel, les contenus (en travail, en énergie, ...) des biens dépendent, non seulement de la nature des techniques utilisées, mais aussi de leurs niveaux effectifs (i.e. du régime en cause, alinéas 7.b et 7.c), cela contrairement à l'idée assez courante selon laquelle ces contenus sont des caractéristiques intrinsèques des biens (cette idée n'est correcte que dans le cadre du modèle à production simple à cause de l'absence de redondance des techniques).

On remarque que mettre en évidence cette dépendance n'est pas un propos négatif : certes, elle montre que, dans le cadre formel d'une représentation réaliste de la base physique (i.e. prenant en compte les doubles productions, les redondances d'activité, les consommations dues aux transformations et aux échanges, ...) comme celle du modèle ATHEMA, il n'y a ni valeur-travail, ni contenus énergétiques "absolus" ; mais cela ne signifie pas que les systèmes de prix intérieurs correspondants sont sans intérêt, car c'est justement à travers leur caractère relatif et la dépendance en question qu'apparaît leur intérêt en prospective libre, via leur "adaptation" à un projet (alinéas 13.a et 13.f).

La dépendance précédente n'est qu'un cas particulier de celle du système de prix en cause vis-à-vis, d'une part des diverses données, entre autres des coefficients de regroupement (alinéa 13.c) et du bloc des variables physiques, d'autre part du critère utilisé. Elle peut être appréhendée de façon standard par des études de multiplicité et des études de variabilité (alinéa 9.a). On envisage brièvement ci-après les spécifications des coefficients de regroupement et du critère pour ces études.

En ce qui concerne les coefficients de regroupement, il faut choisir, conjointement, d'une part les ensembles $M_q(s)$, $M_v(s)$, $M_n(s)$, $M_o(s)$ ($s \in S_n$) permettant de repérer ces coefficients et les contraintes de types x_q , x_v , x_n , x_o , d'autre part les valeurs des coefficients eux-mêmes. Dans ces choix interviennent des considérants divers, formels ou réalistes, qui peuvent réclamer une expérimentation numérique via des études de variabilité convenables.

Les considérants formels concernent l'équilibrage entre le nombre de contraintes dans le système x_{pr} et le nombre de variables de prix à déterminer, compte tenu de ce que les contraintes de type q_0 sont aussi à prendre en compte à ce sujet. Plutôt que comme égalisation stricte de ces nombres pour chercher à annuler toutes les variables de types X_1, \dots, X_8 (qui sont là au contraire pour introduire de la souplesse ; mais l'étude mathématique de cette éventualité est à faire dans la ligne des travaux de Sraffa, [116], 2ème partie), cet équilibrage peut n'être qu'approximatif (ce qui simplifie la démarche) et consister seulement en l'élimination, soit d'une sur-détermination excessive via des redondances de contraintes, soit d'une sous-détermination risquant d'entraîner la nullité de nombreux prix lors de l'optimisation. Par exemple, choisir des regroupements discrets pour les contraintes de types x_n et x_o relève de la première anomalie, choisir les regroupements grossiers de la seconde.

Les considérants réalistes concernent des particularités ou déterminants divers du système productif et du système des échanges en cause, particularités ou déterminants, soit résultant des données correspondantes que sont les coefficients techniques et les niveaux des variables du bloc physique, soit exprimant des impératifs supplémentaires dans le cadre comptable des contraintes en cause. Par exemple, ils peuvent concerner l'affectation des excédents (de façon répartie ou concentrée) via les coefficients de types Q_b , V_b , N_b , O_b ou celle des dépenses d'investissement ou de transformation des équipements (aux activités concernées ou à d'autres) via les coefficients de types Q_u .

En ce qui concerne les critères à minimiser, à l'intérieur de l'idée directrice du contrôle des transferts par cette minimisation (alinéa 13.a), on peut distinguer : d'une part les critères de pur contrôle qui ne sont fonction que des variables de types X_1, \dots, X_8 , d'autre part les critères de type monétaire qui sont fonction des variables de transfert (types Q_b , R_b , D_p , D_m , R_b , R_m).

Comme critère Z_v de pur contrôle, on cite, en plus de celui défini par la relation (13.12), la variante qui fait intervenir des max au lieu des sommes, cette variante pouvant être linéarisée en imposant les contraintes spéciales stipulant que Z_v est un majorant de toutes les variables de types X_1, \dots, X_8 .

Un critère de type monétaire simple s'écrit :

$$(13.19) \quad Z_v = \sum_{t \in T} \sum_{g \in G_{\text{imp}}} R_b(t, g),$$

où, par exemple, G_{imp} est l'ensemble des imputations en recettes (sous-ensemble de G_r , alinéa 2.b) correspondant aux impôts voulus.

Les réalisations utilisées peuvent être statiques ou évolutives (alinéa 7.c), le cas statique étant le plus courant. Dans le cas évolutif, le système xpr est éventuellement à compléter par des contraintes spéciales contrôlant l'évolution des prix intérieurs ; par ailleurs, l'hypothèse selon laquelle le taux de change est indépendant de la période [point (2) de l'alinéa 13.d] est peu adaptée aux situations dans lesquelles les prix à l'extérieur ont une évolution inflationniste, cela surtout si le taux de change est endogène. Par contre, un taux de change variable permet d'étudier des systèmes de prix intérieurs stables dans une telle situation.

Bien que le formalisme en cause vise principalement à appréhender l'organisation intérieure, multisectorielle, et son influence sur les prix, il permet aussi des déterminations de prix-contenus dans un cadre consolidé [i.e. avec un seul secteur intérieur s_n , point (3) de l'alinéa 8.e], seuls les prix intra-sectoriels $Pr(t, s_n, i)$ intervenant alors. Ces prix peuvent ensuite être comparés à ceux obtenus dans un cadre multisectoriel (alinéa 9.d).

f) Epilogue. En terminant, la question se pose de l'utilisation des prix ainsi déterminés, de leur situation dans l'ensemble des études prospectives que le modèle ATHEMA vise à permettre relativement à un ensemble humain donné.

Au delà de la boutade selon laquelle, les économistes n'étant généralement intéressés que par les prix, il faut bien que le modèle ATHEMA leur en fournisse, une première réponse est qu'un système de prix est toujours intéressant à considérer, en lui-même, surtout s'il a été déterminé pour être "adapté" à un régime physique donné qu'il va ainsi refléter.

Les éléments d'une seconde réponse, plus sérieuse, figurent à l'alinéa 9.e : dans le cadre du processus itératif qui y est indiqué, les prix précédemment déterminés vont être fixés pour de nouvelles déterminations du bloc des variables physique [problème (9.8)]. Il s'agit alors de préciser avec quelle visée, i.e. avec quelle réalisation et plus précisément quelles contraintes spéciales de comportements, faire ces déterminations.

Dans le cadre de l'étude prospective d'un projet s'inscrivant dans un processus de développement maîtrisé mais non dirigiste (alinéas 1.a, 12.e, 13.a), une telle visée peut être de chercher à "engendrer" le bloc des variables physiques de départ en s'appuyant sur les prix qui lui sont adaptés : on peut dans ce sens s'intéresser à la recherche d'un système "incitatif" de contraintes spéciales, i.e. représentant des incitations ou réglementations acceptables, de telle sorte que, complétant le caractère adapté des prix en cause, ici exogènes, ce système définisse une réalisation peu sous-déterminée et avec laquelle le bloc des variables physiques de départ soit compatible.

A propos de cette recherche, on souligne seulement que le système xpr ne semble pas devoir constituer, au moins à lui seul, un tel système incitatif de contraintes spéciales. Le problème est à étudier parallèlement à ceux que pose la détermination des prix exposée ici, cela mathématiquement (il est posé de façon générale dans [32], alinéa 2.4.e) et par l'expérimentation numérique (commencée dans [32c]) au moyen de réalisations diverses du modèle.